0.1. *Ван Л.* Локальный рост решений дифференциальных уравнений и ?-спектр дифференциального оператора

Экспериментально показано, что неустойчивость решений начальных и начально-краевых задач может развиваться, даже если весь спектр соответствующего линейного дифференциального оператора находится в области устойчивости. Именно такая ситуация имеет место при докритических ламинарно-турбулентных переходах течений вязкой несжимаемой жидкости [1]. В некоторых работах предполагается, что этот феномен связан с расположением спектральных пятен соответствующих операторов.

Псевдоспектр (ε-спектр) матрицы A представляет собой такое множество комплексных чисел λ, для которых при некотором $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство

$$\sigma_{\min}(A - \lambda I) \leq \varepsilon,$$

где $\sigma_{\min}$ — минимальное сингулярное число, I — единичная матрица.

Эта работа посвящена изучению устойчивости решений, если псевдоспектр линеаризованного дифференциального оператора частично находится в области неустойчивости. Экспериментально установлено, что максимум нормы решения обратно пропорционален минимальному значению параметра ε всех пятен ε-спектра, которые находятся в правой полуплоскости и объединяют в себе более одного собственного значения.

Кроме этого были разработаны два алгоритма выбора начальных условий для получения решений, имеющих максимальный рост на начальном временном отрезке. Один из алгоритмов использует матрицу из собственных векторов, а другой основан на методе дихотомии [2].

С помощью данных алгоритмов было построено локально растущее решение задачи Коши для одной модели флаттера [3]. Был рассмотрен случай, когда весь спектр матрицы системы расположен в левой полуплоскости. В результате применения алгоритмов построения начальных данных найдено решение, которое растет почти на два порядка.

Аналогичные построения применялись для спектра оператора Орра — Зоммерфельда для плоскопараллельного течения Пуазейля. С помощью упомянутых выше алгоритмов при значении числа Рейнольдса $Re = 5000$ получены решения линеаризованной системы Навье — Стокса, растущие более чем в 50 раз. Для дискретизации задачи были использованы коллокационные матричные производные размера 100×100 [4].

В работе показано, что даже если все собственные значения оператора лежат в области устойчивости, решения соответствующих задач для дифференциальных уравнений могут тем не менее расти в начальный момент времени. Причем этот рост может быть весьма значительным и приводить на практике к разрушению ламинарных течений или инженерных конструкций.

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008)

Научный руководитель — к.ф.-м.н. Бибердорф Э.А.

Список литературы

[1] Trefethen L. N., Trefethen A. E., Satish C. R., Tobin A. Hydrodynamic Stability Without Eigenvalues // Science, New Series. Vol. 261. N. 5121. P. 578–584

[2] Годунов С.К. Современные аспекты линейной алгебры / Новосибирск: Научная книга, 1997.

[3] Буньков В. Г., Годунов С. К., Курзин В. Б., Садкейн М. Применение нового математического аппарата «одномерные спектральные портреты матриц» к решению проблемы аэроупругих колебаний решеток лопастей// Ученые записки ЦАГИ. 2009. Т. XL. №. 6, С. 3–13.

[4] Trefethen L.N. Spectral Methods in MATLAB / Philadelphia: SIAM, 2000.