0.1. *Богданова А.В., Борисенко Д.А., Володько О.С.* **Представление решения двумерного уравнения теплопроводности в системе Maple**

Для тестирования численных алгоритмов, применяемых при решении одномерных и двумерных задач переноса — диффузии, необходимо иметь набор тестовых задач и оптимальный вариант представления решения для использования в других программах: формулу, которая определяет решение в каждый момент времени и в любой точке пространства через элементарные или специальные функции. Это осуществимо в случае задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial C}{\partial t} = a\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad C|_{t=0} = C_0(x), \tag{1}$$

где $t > 0$ время, x — пространственная переменная, $C(x,t)$ — неизвестная функция, $C_0(x)$ — функция, задающая начальное распределение температуры, $a > 0$ — постоянный коэффициент теплопроводности.

Известно, что решение задачи (1) находится по формуле [1]

$$C(x,\ t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C_0(x)}{2(\pi a)^{1/2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4at}} d\xi.$$

Есть несколько начальных конфигураций, для которых этот интеграл берется через элементарные или специальные функции [2]. Например, если начальное распределение представляет собой «полочку» или функцию Гаусса и т.д. Так, если начальное распределение представляет собой равнобедренный треугольник с основанием $2l$ высоты b, то решение выражается через $erf(x)$ — функцию ошибки.

В случае двумерного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \tag{2}$$

имеются две возможности обобщения результатов, полученных для одномерного случая:

1. В качестве решения уравнения (2) берется произведение одномерных решений по переменным x, y, тогда начальное распределение также представляет собой произведение начальных распределений одномерных задач и решение в двумерном случае выражается через элементарные и специальные функции. Для рассмотренного случая начальное распределение будет представлять собой пирамиду.
2. Ищется осесимметрическое решение, которое в полярной системе определяется согласно [1, 3]

$$C\left(b,r,l,a,t\right) = \frac{b}{2at}\int_0^l \xi C_0(\xi) e^{-\frac{r^2+\xi^2}{4at}} I_0\left(\frac{r\xi}{2at}\right) d\xi.$$

Для рассмотренного случая получаем начальное распределение в виде круглого конуса высоты b и радиуса l, а решение в любой момент времени задается интегралом

$$C\left(b,r,l,a,t\right) = \frac{b}{2at}\int_0^l \xi\left(1-\frac{\xi}{l}\right)\cdot \\ \cdot e^{-\frac{r^2+\xi^2}{4at}} I_0\left(\frac{r\xi}{2at}\right) d\xi. \tag{3}$$

Интеграл не является табличным и есть несколько возможностей для его нахождения:

1. Численное интегрирование.
2. Разложение модифицированной функции Бесселя в ряд Тейлора и последующее интегрирование, которое дает в системе Maple бесконечный ряд

$$C\left(b,r,l,a,t\right) = \frac{b}{2at}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r}{4at}\right)^{2k}\frac{e^{-\frac{r^2}{4at}}}{k!\,(k+1)}\cdot \\ \cdot\left(\int_0^l \xi^{2k+1} e^{-\frac{\xi^2}{4at}} d\xi - \int_0^l \frac{\xi^{2k+2}}{l} e^{-\frac{\xi^2}{4at}} d\xi\right).$$

   Интегралы выражаются через экспоненциальную функцию и функцию ошибки.
3. Разложение в (3) экспоненциальной функции в ряд Тейлора дает представление интеграла (3) в виде бесконечного ряда гипергеометрических функций.

Второй вариант представления решения более удобен для использования при тестировании численных алгоритмов.

Научный руководитель — к.ф.-м.н. Компаниец Л. А.

Список литературы

[1] Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики / М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 576 с.
[2] Кузнецов Д. С. Специальные функции / М.: Высшая школа, 1962. 247 с.
[3] Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы /М.: Наука, 1966. 228 с.