

Исследование процессов в средах с фрактальной структурой имеет важное практическое значение в физике, геофизике, экономике и в других науках. Понятие фрактала является ключевым в теории физики открытых систем [1], нелинейной и хаотической динамики [2], [3]. Применение понятия фрактала, например, при описании динамических систем наделяет их свойствами присущими сложным нелинейным системам, например, эффектами эрдитарности. Напомним, что свойством эрдитарности обладают такие системы, в которых учитывается не только настоящее состояние системы или ближайшее предыдущее состояние, то есть начальные значения параметров состояния системы, а также некоторые производные по времени, но также и все предыдущие состояния, в которых находилась данная система [4]. Поэтому изучение таких систем имеет важное принципиальное значение.

Рассмотрим следующую эрдитарную систему, которая записывается в терминах производных дробного порядка в смысле Герасимова-Капуто следующим образом [5],[6]:

$$\partial_{0t}^{\beta} x(\tau) + \lambda \partial_{0t}^{\gamma} x(\tau) + \omega^{\beta} x(t) = \delta \sin(\varphi t), \quad (1)$$

с начальными условиями:

$$x(0) = x_1, \quad x'(0) = x_2, \quad (2)$$

где x_1, x_2 – заданные константы, λ – коэффициент трения, ω – собственная частота, δ и φ – амплитуда и частота внешнего воздействия, $1 < \beta < 2, 0 < \gamma < 1$.

Решение задачи (1), (2) можно найти численными методами, которые можно легко реализовать на ЭВМ. В работе с помощью интегрального преобразования Лапласа было найдено аналитическое решение в терминах специальной обобщенной функции Райта. Так же были построены фазовые портреты в зависимости от значений дробных параметров β и γ , установлены различные режимы: затухающие колебания, резонанс, предельные циклы.

Список литературы

- [1] Климонтович Ю.Л. Введение в физику открытых систем. М.: Янус-К. 2002. 284 с.
- [2] Гринченко В.Т., Мацыпура В.Т., Снарский А.А. Введение в нелинейную динамику: Хаос и фракталы. М.: ЛКИ. 2007. 264 с.
- [3] Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е. Лекции по нелинейной динамике. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика. 2011. 516 с.
- [4] Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1982. 304 с.
- [5] Вольтерра В. Обобщение линейных законов деформации и их приложение к задачам внутреннего трения // АН СССР. Прикладная математика и механика. 1948. Т. 12. С.529–539.
- [6] Caputo M. Elasticità e dissipazione. Bologna: Zanichelli, 1969. 150 p.