Интегральная схема из семейства полу-Лагранжевых методов для двумерного уравнения неразрывности

Вяткин Александр Владимирович
Институт вычислительного моделирования СО РАН (Красноярск), Россия
e-mail: vyatkin@icm.krasn.ru

Аннотация

Построено теоретическое обоснование численного метода из семейства полу-Лагранжевых методов для уравнения неразрывности. Схема имеет первый порядок точности и позволяет аккуратно учитывать краевые условия. Доказано, что для билинейной интерполяции численного решения выполняется дискретный аналог балансового соотношения.

Пусть D — квадрат $[0,1]\times[0,1]$. В области $[0,T]\times D$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(u\rho)}{\partial x}+\frac{\partial(v\rho)}{\partial y}=0,$$

заданное с некоторыми граничными условиями. Для построения численного решения используем квадратную сетку D_h с шагом $h=1/N$ и временные слои $t_k=k\,\tau$ с шагом $\tau=T/M$. Чтобы определить численное решение $\rho^k_{i,j}$, построим траектории восьми точек из окрестности узла (x_i,y_j) с k-го временного слоя на $k-1$. Пересечения этих траекторий с плоскостью t_{k-1} образуют многоугольник $P^{k-1}_{i,j}$. Если траектории раньше пересекают плоскость $x=0$, то возникает многоугольник $L^{k-1}_{i,j}$. Численное решение ρ_h определим по формуле

$$\rho^k_{i,j}=\frac{1}{\mathrm{mes}(\Omega_{i,j})}\int\limits_{P^{k-1}_{i,j}}\rho^{\mathrm{I}}_h\left(t_{k-1},x,y\right)\,dP+$$
$$+\frac{1}{\mathrm{mes}(\Omega_{i,j})}\int\limits_{L^{k-1}_{i,j}}(\rho u)^{\mathrm{I}}\left(t,0,y\right)\,dL,$$

где $\mathrm{mes}(\Omega_{i,j})$ означает площадь $\Omega_{i,j}$, а функция ρ^I_h — билинейная интерполяция ρ_h. Сходимость исследована в дискретном аналоге нормы пространства $L_1(D)$:

$$\|\rho_h(t_k,\cdot)\|_{L^h_1}=\sum_{i,j=0}^{N}\left|\rho^k_{i,j}\right|\,\mathrm{mes}(\Omega_{i,j}).$$

Доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *Для численного решения ρ_h задачи справедлива оценка:*

$$\|\rho_h(t_k,\cdot)-\rho(t_k,\cdot)\|_{L^h_1}\le k(c_1h^2+c_2h\tau^2)$$

с константами c_1, c_2 не зависящими от k, h, τ.

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и $t_k=T$, $\tau=c\,h$, тогда*

$$\|\rho_h(T,\cdot)-\rho(T,\cdot)\|_{L^h_1}\le c_3Th.$$

Для интерполяции ρ^I_h доказан дискретный аналог балансового соотношения.

Теорема 2. *Пусть ρ_h — численное решение задачи. Тогда $\forall\ k=1,\dots,M$*

$$\int\limits_D\rho^{\mathrm{I}}_h\left(t_k,x,y\right)\,dD=\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_0^1(\rho u)^{\mathrm{I}}\left(t,0,y\right)\,dy\,dt+$$
$$+\int\limits_{D\setminus R}\rho^{\mathrm{I}}_h\left(t_{k-1},x,y\right)\,dD-\int\limits_R\rho^{\mathrm{I}}_h\left(t_{k-1},x,y\right)\,dD.$$

Вычислительные эксперименты подтверждают теоретические выкладки.

Исследование проведено в рамках проекта РФФИ, грант № 11-01-000224-а.

Список литературы

[1] Синь В. Semi-Lagrangian scheme for solving hyperbolic equation of first order/ В. Синь, А.В. Вяткин, В. В. Шайдуров // Молодой учёный — 2013 — № 9 — С. 6-13.