

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОБАРА И ЕГО ЭКОЛОГИЧЕСКИХ ПОСЛЕДСТВИЙ В РАЙОНЕ ВПАДЕНИЯ р. СЕЛЕНГИ В оз. БАЙКАЛ<sup>1</sup>

Б. О. Цыденов

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск

Исследования естественной конвекции в гидродинамических процессах экосистемы водоёмов, вызывают постоянно растущий научный и практический интерес. Особое внимание уделяется данной тематике в последние годы в связи с проблемой взаимодействия человечества с окружающей средой. По прогнозам директора Института водных проблем РАН Данилова–Данильяна В. И. [1] глобальный водный кризис ожидается в интервале от 2025 до 2035-2040 гг. К истощению водных ресурсов ведёт не рост расходуемой воды, а её загрязнение. Огромное количество пресной воды хранится в озерах. Только в Байкале сосредоточено около 20% мировых запасов пресной воды и более 80% запасов России. К числу явлений, которое может оказать существенное влияние на процессы распространения загрязнения в водоёме, относится термобар. Под *термобаром* понимается узкая зона в глубоком озере умеренных широт, в которой происходит погружение имеющей наибольшую плотность воды от поверхности до дна.

## Физическая и математическая поставка задачи

Весной образование и развитие термобара в водоёме может существенным образом зависеть от наличия речного притока с более высокой температурой, вносящего свой вклад в гидростатическую неустойчивость водных масс. Увеличение проникающей солнечной радиации и приток тёплых речных вод приводят к тому, что прибрежные поверхностные воды озера быстрее нагреваются и достигают *температуры максимальной плотности* (ТМП). Более теплые и наиболее плотные водные массы опускаются до дна, образуя фронтальный раздел (термобар). Слева и справа от термобара образуются две циркуляционные ячейки с зоной опускания воды. Этот фронтальный раздел препятствует горизонтальному перемешиванию вод между двумя циркуляционными ячейками и проникновению прибрежных вод в центральную часть водоёма. По мере прогрева озера термобар смещается к центру и исчезает, когда температура всей акватории становится больше ТМП.

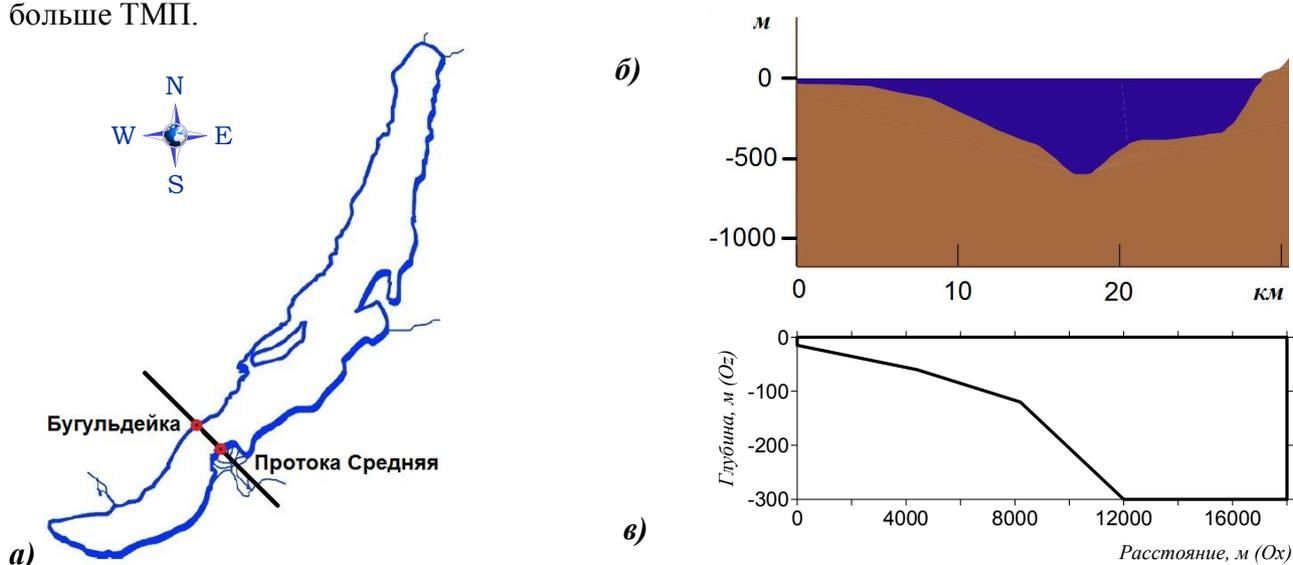


Рисунок 1 – Сечение протока Средняя – Бугульдейка: а – схема поперечного разреза озера Байкал; б – рельеф дна для указанного разреза; в – расчётная область

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке стипендии Президента РФ для молодых ученых и аспирантов (СП-71.2012.5), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013» (соглашение №14.В37.21.0667), Министерства образования и науки РФ (задание №8.4859.2011)

В качестве исследуемой области выбрано поперечное сечение на границе Южного и Среднего Байкала: протока Средняя (устье р. Селенги) – Бугульдейка. Данные о рельефе дна, соответствующие указанному сечению, взяты из батиметрической электронной карты озера Байкал [2] (см. рис. 1).

Натурные наблюдения показывают, что при образовании и развитии термобара основные изменения происходят в направлении от устья реки к центру озера (вдоль оси  $Ox$  на рис. 1в). При этом характеристики в направлении, перпендикулярном оси  $Ox$  (вдоль оси  $Oy$ ), достаточно однородны. Поэтому можно с большой степенью обоснованности исключить из уравнений математической модели все производные по  $y$ , тем самым рассматривая явление термобара в квазидвухмерном приближении [3]. С учётом этого допущения негидростатическая модель термобара, учитывающая влияние силы Кориолиса, связанной с вращением Земли, и записанная в приближении Буссинеска имеет вид:

а) уравнения количества движения

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uw}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) + 2 \cdot \Omega_z v - 2 \cdot \Omega_y w, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial vw}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial v}{\partial z} \right) + 2 \cdot \Omega_x w - 2 \cdot \Omega_z u; \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial w^2}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial w}{\partial z} \right) - g \cdot \frac{\rho}{\rho_0} + 2 \cdot \Omega_y u - 2 \cdot \Omega_x v;\end{aligned}$$

б) уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0;$$

в) уравнение энергии

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial uT}{\partial x} + \frac{\partial wT}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( D_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho_0 c_p} \frac{\partial H_{sol}}{\partial z};$$

г) уравнение баланса солёности и концентрации загрязняющих веществ в озере ( $\Phi=S, C$ )

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial u\Phi}{\partial x} + \frac{\partial w\Phi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( D_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right),$$

где  $u, v$  – горизонтальные компоненты скорости;  $w$  – вертикальная компонента скорости;  $\Omega_x, \Omega_y$  и  $\Omega_z$  – компоненты вектора угловой скорости вращения Земли;  $g$  – ускорение свободного падения;  $c_p$  – удельная теплоёмкость;  $T$  – температура;  $S$  – солёность;  $C$  – концентрация примеси;  $p$  – давление;  $\rho_0$  – плотность воды при стандартном атмосферном давлении, температуре  $T_L$  и солёности  $S_L$  ( $T_L$  и  $S_L$  – характерная температура и солёность озера соответственно). Коротковолновая солнечная радиация, проникающая в воду, рассчитывается по закону Бугера–Ламберта–Бэра

$$H_{sol} = H_{Ssol,0} (1 - r_s) \exp(-\varepsilon_{abs} |z|),$$

где  $r_s \approx 0.2$  – коэффициент отражения воды,  $\varepsilon_{abs} \approx 0.3 \text{ м}^{-1}$  – коэффициент поглощения солнечной радиации в воде. Приток солнечной радиации на поверхность озера  $H_{Ssol,0}$  определяется следующим соотношением [4, 5]:

$$H_{Ssol,0} = \begin{cases} S_0 \cdot (a_g - a_w) \cdot \cos \zeta, & \text{если } \cos \zeta > 0; \\ 0, & \text{если } \cos \zeta \leq 0, \end{cases}$$

здесь  $S_0 \approx 1367 \text{ Вт/м}^2$  – солнечная постоянная,  $\zeta$  – зенитный угол Солнца,  $a_g = 0.485 + 0.515 \cdot (1.014 - 0.16 / \sqrt{\cos \zeta})$ ,  $a_w = 0.039 \cdot (r_w / \cos \zeta)^{0.3}$  ( $r_w$  – содержание водяного пара в атмосфере,  $\text{кг/м}^2$ ).

Для турбулентного замыкания используются двухпараметрическая  $k-\omega$  модель турбулентности Уилкокса [6], состоящая из уравнений для кинетической энергии ( $k$ ) и частоты турбулентных пульсаций ( $\omega$ ), а также алгебраические соотношения [7] для определения турбулентной диффузии [8]:

$$K_x = 2.5M^2 / c, \quad K_z = \nu_T + \nu,$$

$$D_x = K_x, \quad D_z = K_z,$$

где  $\nu_T = k / \omega$  – турбулентная кинематическая вязкость;  $\nu$  – молекулярная кинематическая вязкость воды.

В качестве уравнения состояния  $\rho = \rho(T, S, p)$  выбрано уравнение Чена–Миллера [9], принятое UNESCO. Данное уравнение состояния связывает плотность воды с температурой, солёностью, давлением и справедливо в диапазоне  $0 \leq T \leq 30^\circ\text{C}$ ,  $0 \leq S \leq 0.6 \text{ г/кг}$ ,  $0 \leq p \leq 180 \text{ бар}$ .

В начальный момент времени система находится в состоянии покоя и удовлетворяет заданным полям температуры и солёности

$$t = 0: \quad u = 0; \quad v = 0; \quad w = 0; \quad T = T_L; \quad S = S_L; \quad C = 0; \quad k = 0; \quad \omega = \omega_0.$$

Граничные условия имеют следующий вид:

а) на поверхности

$$K_z \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\tau_{surf}^u}{\rho_0}; \quad K_z \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\tau_{surf}^v}{\rho_0}; \quad w = 0; \quad D_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{H_{net}}{\rho_0 \cdot c_p}; \quad \frac{\partial S}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial C}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial k}{\partial z} = 0; \quad \omega = \frac{\sqrt{k}}{c_\mu^0 \kappa (z + z_0)},$$

где  $H_{net}$  – тепловой поток, состоящий из длинноволновой радиации и скрытого и чувствительного тепла [10],  $\kappa = 0.41$  – константа фон Кармана,  $z_0 = 0.5$  – высота шероховатости. Сдвиговое напряжение ветра на поверхности озера описывается законом

$$\tau_{surf}^u = c_{10} \rho_a \sqrt{v_{10}^2 + u_{10}^2} \cdot u_{10};$$

$$\tau_{surf}^v = c_{10} \rho_a \sqrt{v_{10}^2 + u_{10}^2} \cdot v_{10},$$

здесь  $\rho_a$  – плотность воздуха у поверхности воды;  $u_{10}$ ,  $v_{10}$  – составляющие скорости ветра на высоте 10 м;  $c_{10} = 1.3 \times 10^{-3}$ ;

б) на дне (на твёрдых границах)

$$u = 0; \quad v = 0; \quad w = 0; \quad D_z \frac{\partial T}{\partial n} = \frac{H_{geo}}{\rho_0 c_p}; \quad \frac{\partial S}{\partial n} = 0; \quad \frac{\partial C}{\partial n} = 0; \quad \frac{\partial k}{\partial n} = 0; \quad \omega = \frac{\sqrt{k}}{c_\mu^0 \kappa (z + z_0)},$$

где  $H_{geo}$  – геотермальное тепло;  $n$  – направление внешней нормали к области;  $z_0 = 0.05$ ;

в) на границе втекания реки (на левой границе) (см. рис. 2в)

$$u = u_R; \quad v = 0; \quad w = 0; \quad T = T_R; \quad S = S_R; \quad C = 1; \quad k = k_R; \quad \omega = \omega_R,$$

где  $u_R$  – скорость речного притока,  $T_R$  и  $S_R$  – температура и солёность реки соответственно.

г) на открытой границе задаются условия радиационного типа [11]

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (\phi = u, v, T, S, C); \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial k}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0,$$

здесь фазовая скорость  $c_\phi$  рассчитывается из пространственных и временных тенденций внутри границ области:

$$c_\phi = - \frac{\partial \phi / \partial t}{\partial \phi / \partial x}.$$

Начальное поле давления определяется из решения уравнений состояния и гидростатики с граничным условием на поверхности  $p = p_a$  ( $p_a$  – атмосферное давление) методом Рунге – Кутты четвёртого порядка точности. Уравнение гидростатики выводится из уравнения движения для вертикальной компоненты скорости (при условии  $w=0$  и отсутствии силы Кориолиса) и имеет вид:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

### Численный метод решения

Решение конвективно-диффузионных уравнений основано на *методе конечных объёмов (МКО)*, идея которого легко поддается прямой физической интерпретации [12]. Для получения пространственной дискретизации задачи расчётная область (см. рис. 2в) разбивается на соприкасающиеся конечные объёмы так, чтобы каждая узловая точка содержалась в одном конечном объёме. Заданная сетка определяется множеством узлов и множеством значений сеточных функций. Дифференциальное уравнение интегрируется по каждому конечному объёму с использованием кусочно-гладких профилей, интерполирующих изменение сеточной функции между узлами сетки. Полученный дискретный аналог выражает интегральный закон сохранения для конечного объёма [12]. Следует заметить, что МКО занимает лидирующее положение по отношению к иным способам дискретизации уравнений гидрогазодинамики, к примеру, этот метод используется в гидродинамических пакетах FLUENT, STARCCD, CFX, CFD-ACE, FINE (NUMECA) и др. [13]. Согласно МКО скалярные величины (температура, давление, солёность) определяются в центре сеточной ячейки, в то время как компоненты вектора скорости – в средних точках на границах ячеек. В целях приближения расчётной области к прибрежному профилю озера применяется метод блокировки фиктивных областей [12]: приравниваются нулю компоненты скорости в выключенной зоне за счёт использования больших значений коэффициентов вязкости в этой зоне.

Численный алгоритм нахождения поля течения и температуры опирается на разностную схему Кранка – Николсон. Конвективные слагаемые в уравнениях аппроксимируются по противопотоковой схеме QUICK Леонарда [14].

Для согласования рассчитываемых полей скорости и давления разработана процедура SIMPLER для течений с плавучестью, представляющего собой модификацию метода SIMPLE Патанкара и Сполдинга [12]. Алгоритм SIMPLER основан на циклической последовательности операций «предположение–коррекция»:

1. Задание приближенного поля давления  $p^*$ , температуры  $T^*$  и солёности  $S^*$ .
2. Решение уравнений количества движения для получения приближенных значений компонент скорости  $u^*$  и  $w^*$  из уравнений вида (здесь и ниже используются обозначения, принятые в [12])

$$a_e^u u_e^* = \sum_{nb} a_{nb}^u u_{nb}^* + b^u + (p_P^* - p_E^*) h_z;$$

$$a_n^w w_n^* = \sum_{nb} a_{nb}^w w_{nb}^* + b^w + (p_P^* - p_N^*) \Delta x - \frac{\rho_n^* g}{\rho_0} h_x \cdot h_z,$$

где  $\sum_{nb}$  означает суммирование по всем соседним узлам конечного объёма  $W, E, S$  и  $N$ ;

$h_x$  и  $h_z$  – шаги сетки в соответствующем направлении.

3. Решение уравнений энергии (для получения  $T$ ) и солёности (для получения  $S$ ) и расчёт  $\rho' = \rho(p^*, T, S) - \rho(p^*, T^*, S^*)$ .
4. Решение уравнения для поправки давления  $p'$  из уравнений

$$a_P p'_P = a_E p'_E + a_W p'_W + a_N p'_N + a_S p'_S + b,$$

где  $a_E = d_e h_z$ ,  $a_W = d_w h_z$ ,  $a_N = d_n h_x$ ,  $a_S = d_s h_x$ ,  $a_P = a_E + a_W + a_N + a_S$ ,

$$b = (u_w^* - u_e^*) h_z + (w_s^* - w_n^*) h_x + \frac{g}{\rho_0} (c_n \rho'_n - c_s \rho'_s) h_x.$$

5. Расчёт  $p$  путём добавления  $p'$  к  $p^*$ .
6. Корректировка компонент скорости  $u$  и  $w$  из формул вида

$$u_e = u_e^* + d_e(p'_P - p'_E);$$

$$w_n = w_n^* + (p'_P - p'_N)d_n - \frac{\rho'_n g}{\rho_0} c_n,$$

$$\text{где } d_e = \frac{h_z}{a_e^u}, \quad d_n = \frac{h_x}{a_n^w}, \quad c_n = \frac{h_x \cdot h_z}{a_n^w}.$$

7. Решение уравнений энергии, солёности, количества движения для  $v$  и расчёт  $\rho = \rho(p, T, S)$ .
8. Возврат к пункту 2 и повтор расчётов до тех пор, пока не будет достигнута сходимость.

Системы сеточных уравнений на каждом шаге по времени решаются методом нижней релаксации или явным методом Н. И. Булеева [15].

### Некоторые результаты расчётов

Начальное распределение температуры в озере Байкал имеет постоянное значение, равное  $3^\circ\text{C}$ , в то время как температура воды в р. Селенге соответствует  $5^\circ\text{C}$  и нагревается на  $0.4^\circ\text{C}$  в день. Река впадает в озеро со скоростью  $0.015 \text{ м/с}$ . Минерализация воды в озере составляет  $0.096 \text{ г/кг}$ , а в реке линейно растёт от  $0.140 \text{ г/кг}$  до  $0.150 \text{ г/кг}$ . Переменный поток тепла, поступающий на водную гладь, включает в себя длинноволновую радиацию, а также потоки скрытого и чувствительного тепла [10]. На дне задаётся геотермальное тепло  $H_{geo} = 0.1 \text{ Вт/м}^2$ . В качестве атмосферных данных выступает информация из архива погодных условий метеостанции г. Байкальск в период с 01.05.2002 по 30.05.2002 г. (<http://meteo.infospace.ru>).

Вычислительная область имеет протяженность  $18 \text{ км}$  и глубину  $300 \text{ м}$  (см. рис. 2в). Открытый участок речного стока (на левой границе) составляет  $15 \text{ м}$  от поверхности озера. Расчётная область (см. рис. 2б) покрывается равномерной ортогональной сеткой с шагами  $h_x = 50 \text{ м}$  и  $h_z = 5 \text{ м}$ . Шаг по времени  $\Delta t = 60 \text{ с}$ . Вычисления проводились на суперкомпьютере ТГУ «СКИФ Cyberia».

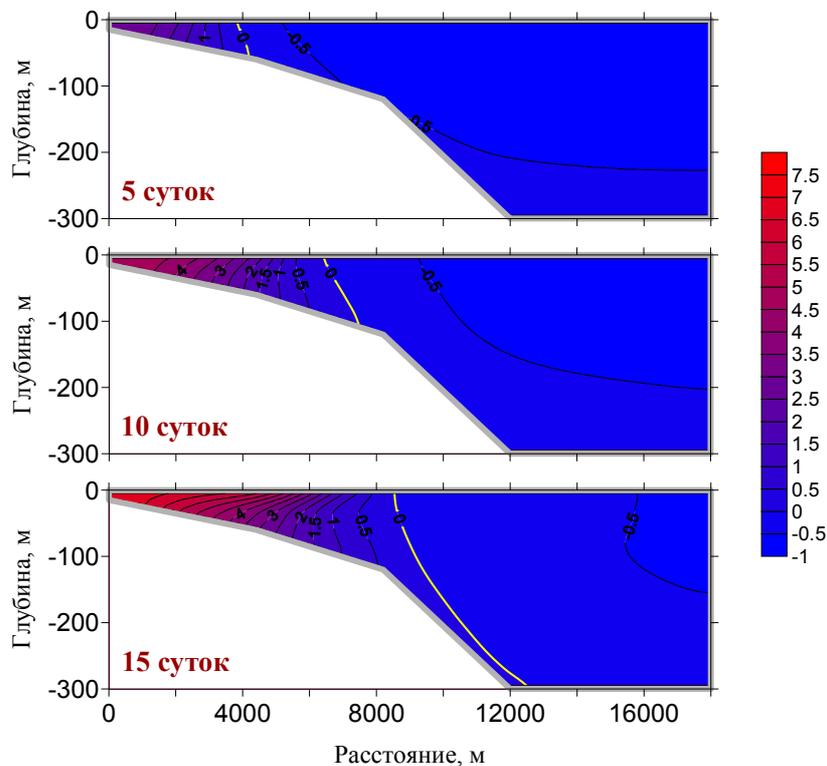


Рисунок 2 – Изолинии функции  $T - T_{MD}(p, S)$  через 5, 10, 15 суток (сверху вниз)

На рис. 2 приведены изолинии функции  $T-T_{MD}$  ( $T_{MD}$  – температура максимальной плотности), построенные через 5, 10, 15 суток от начала вычислительного эксперимента. Нулевая изолиния (на рис. 2 обозначена желтым цветом) соответствует температуре максимальной плотности. Видно, что поступающая в озеро речная вода, которая от озерной отличается высокой минерализацией и температурным режимом, способствует формированию термобара и его дальнейшему продвижению в центр озера. Полученные результаты согласуются с описанием природных наблюдений.

### Список литературы

1. Данилов–Данильян В. И. Водные ресурсы – стратегический фактор долгосрочного развития экономики России // Вестник РАН. – 2009. – Т. 79, № 9. – С. 789–798.
2. Батиметрическая электронная карта озера Байкал / П. П. Шерстянкин [и др.] // ДАН. – 2006. – Т. 408, №1. – С. 102–107.
3. Цветова Е. А. Численная модель термобара в озере Байкал // Метеорология и гидрология. – 1997. – № 9. – С. 58–68.
4. Гидротермодинамическое взаимодействие озера с атмосферой / С. С. Зилитинкевич [и др.]. – Л.: Наука, 1990. – 140 с.
5. Hurley P. The air pollution model (TAPM) Version 2. Part 1 : technical description // CSIRO Atmospheric Research technical paper. – 2002. – № 55.
6. Wilcox D. C. Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models // AIAA Journal. – 1988. – Vol. 26, № 11. – P. 1299–1310.
7. Holland P. R. Numerical modelling of the thermal bar and its ecological consequences in a river-dominated lake / P. R. Holland, A. Kay, V. Botte // J. Mar. Syst. – 2003. – Vol. 43, № 1-2. – P. 61–81.
8. Цыденов Б. О. Применение  $k-\omega$  модели турбулентности для исследования термобара в глубоком озере / Б. О. Цыденов, А. В. Старченко // Всеросс. конф. по математике и механике, посвящ. 135-летию ТГУ и 65-летию ММФ : сб. тезисов. Томск, 02–04 октября 2013 г. – Томск, 2013. – С. 83.
9. Chen C. T. Precise thermodynamic properties for natural waters covering only limnologies range / C. T. Chen, F. G. Millero // Limnol. Oceanogr. – 1986. – Vol. 31, № 3. – P. 657–662.
10. Цыденов Б. О. О параметризации тепловых потоков на поверхности воды при математическом моделировании весенне-летнего термобара в озере Байкал // Всерос. молод. конкурс научно-иссл. работ студ. и асп. в обл. физ. наук : сб. тр. / под общ. ред. В. Н. Зимин, В. Н. Наумов, А. Н. Морозов. – М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2012. – С. 234–239.
11. Orlanski I. A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows // J. Computational Phys. – 1976. – Vol. 21, № 3. – P. 251–269.
12. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости : пер. с англ. / С. Патанкар ; под ред. В. Д. Виоленского. – М. : Энергоатомиздат, 1984. – 124 с.
13. Смирнов Е. М. Метод конечных объемов в приложении к задачам гидрогазодинамики и теплообмена в областях сложной геометрии / Е. М. Смирнов, Д. К. Зайцев // Научно-технические ведомости СПбГПУ. – 2004. – №2 (36). – С. 70–81.
14. Leonard B. A Stable and Accurate Convective Modeling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1979. – Vol. 19, № 1. – P. 59–98.
15. Булеев Н. И. Метод неполной факторизации для решения двумерных и трехмерных разностных уравнений типа диффузии // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1970. – Т. 10, № 4. – С. 1042–1044.