

ВЫДЕЛЕНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ПОЛУЧЕННЫХ МЕТОДОМ СКВОЗНОГО СЧЕТА И АДАПТИЦИЯ РАСЧЕТНОЙ СЕТКИ К ПОЛОЖЕНИЮ РАЗРЫВОВ

А.В. Плёнкин¹

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Введение

Для расчета газодинамических течений широко используются методы сквозного счета. Их универсальность находится вне конкуренции, поскольку эти методы не требуют учета информации о положении разрывов. Однако такой подход приводит к размазыванию разрывов, что может негативно сказываться на качестве расчета. Кроме того, часто именно положение ударных волн в течении представляет специальный интерес. Отсюда возникает обратная задача - локализовать и классифицировать разрывы в поле, полученном в расчете. До последнего времени эта задача решалась в «ручном» режиме после завершения расчета. Задача локализации разрывов в поле, заданном на дискретном множестве точек, в общем случае не разрешима, но, учитывая специфику рассматриваемых задач, в частности то, что разрывы функций газодинамических величин представляются в виде набора кусочно-гладких кривых (поверхностей), можно надеяться получить результат с достаточной для приложений точностью. В данной работе предполагается, что функции газодинамических величин могут быть представлены в виде разложения по базису вейвлетов. В настоящее время, возникает необходимость проводить алгоритмическую локализацию непосредственно во время расчета для построения адаптивных сеток и повышения качества расчета. Эффективность применения адаптивных сеток ярко продемонстрирована в [1]. Используемые в этих целях алгоритмы должны быть универсальны (применимы к любым расчетным данным) и не должны требовать для каждого класса течений индивидуальной настройки. В работе рассматривается алгоритм соответствующий указанным требованиям. Особенностью метода является то, что он не требует тонкой настройки (одни и те же пороги чувствительности и наборы фильтров могут применяться для множества различных задач), что позволяет использовать его в автоматическом режиме. В то же время возможность тонкой настройки также заложена в алгоритм, что позволяет получить более качественные результаты в постобработке [2]. Также был разработан набор фильтров, позволяющий избавиться от большей части артефактов [3].

Алгоритм

В качестве исходных данных используются результаты расчета полей плотности и давления, заданных в узлах расчетной сетки. Сетка состоит из ячеек, которые задаются координатами узлов, являющимися их вершинами, и гранями. В результате обработки расчета каждому узлу сетки сопоставляется число, которое характеризует течение в окрестности узла (нет разрывов, ударная волна, контактный разрыв, волна разрежения и т.д.).

Обработку расчета можно условно разделить на 4 этапа: 1) разделение расчетной сетки на ломаные; 2) вейвлет обработка ломаных и выделение особенностей; 3) объединение результатов обработки ломаных; 4) фильтрация артефактов и классификация особенностей.

На первом этапе многомерная задача сводится к набору одномерных задач. Из сетки выбирается произвольное ребро. Затем из его соседей выбираются ребра, которые образуют

¹ ИПМ им. М.В. Келдыша, научный сотрудник, 125047, г. Москва, Миусская пл. 4, e-mail: golden_dragon_84@mail.ru

минимальный угол с этим ребром, причем угол должен быть меньше заданной величины, которая определяет гладкость строящейся ломаной. Если подходящего ребра нет, ломаная на этом конце обрывается, иначе это ребро добавляется в ломаную, и на его свободном конце повторяется аналогичная процедура. После того как на обоих концах ломаной не удалось подобрать подходящих ребер, начинается построение следующей ломаной. Ее построение начинается с ребра не входящего ни в одну ломаную, но ребра других ломаных могут быть в нее добавлены. Этап завершается, если каждое ребро включено в некоторую ломаную.

На втором этапе производится независимая обработка ломаных. Обрабатываются только ломаные, у которых число узлов N больше 6. Массивы плотности d_k и давления p_k , где $0 \leq k < N$, заданные в узлах ломаной также обрабатываются независимо. Для каждого из массивов вычисляется два преобразования $m(x)$ и $c(x)$:

$$m_k = \sum_n \eta_{n-2k} \sum_i \xi_{n-2i} x_i, \quad c_k = \sum_n \varsigma_{n-2k} \sum_i \xi_{n-2i} x_i, \quad \text{для } 0 \leq k < N.$$

При этом x_i - элементы массивов плотности или давления, продолженных на границах из соображений симметрии, ξ и η вещественная и мнимая компоненты низкочастотного фильтра симметричного комплексного вейвлета Добеши 6, ς вещественный фильтр классического вейвлета Добеши 6 [4]. Указанные преобразования соответствуют двум введенным в [4] детекторам, которые используются совместно для повышения точности локализации разрывов. В каждом из четырех полученных массивов выделяются два типа узлов:

1) 'нули' – если значения массива в двух соседних узлах имеют разный знак, или только одно из значений нулевое, то выделяется узел с минимальным по модулю значением. Два первых и два последних узла не выделяются. Из множества нулей исключаются точки соответствующие осцилляциям. Считается, что точка соответствует осцилляциям, если слева и справа от нее в радиусе трех точек есть выделенные нули;

2) 'локальные экстремумы модуля' – узел выделяется, если модуль значения поля в нем больше заданного порога чувствительности α , он не меньше модулей значений четырех его левых и правых соседей и строго больше модуля значения хотя бы одного из ближайших соседей. Три первых и три последних узла не выделяются.

Таким образом, каждый узел ломаной получает некоторый набор из 8 возможных меток: mzd, sed, mzp, ser, med, czd, ter, czp. Символ 'm' означает, что метка относится к основному детектору, 'с' – к корректору, 'd' означает, что метка характеризует поле плотности, а 'p' – давления. Символы 'z' и 'e' определяют, какие структуры были выделены в детекторе: 'z' соответствует переходам через ноль, а 'e' - локальным экстремумам модуля. Первые четыре метки соответствуют сильным разрывам, а последние – слабым разрывам [4].

На третьем этапе определяется окончательный набор меток, которыми обладают узлы сетки. Набор меток, которые получает узел, определяется как объединение всех меток, которые он получил при обработке каждой из содержащих его ломаных.

Затем производится фильтрация артефактов и классификация особенностей. Описание алгоритмов фильтрации артефактов для случая плоских сеток приводится в [3].

Адаптация расчетной сетки к положению разрывов

Рассмотрим вариант применения детектора для адаптации расчета к положению разрывов на примере одномерной задачи о распаде и взаимодействии разрывов в трубе под действием импульсного вложения энергии.

В начальный момент времени заданы три области с постоянными значениями газодинамических величин:

(1) невозмущенный неподвижный газ: $x > 2$, $\rho_1=1$, $u_1=0$, $p_1=1$,

(2) объемная часть разряда: $0 < x < 2$, $\rho_2=1$, $u_2=0$, $p_2=12.4625$,

(3) область за фронтом падающей волны: $x < 0$, $\rho_3=3.7629$, $u_3=2.5194$, $p_3=9.6450$.

В результате распада разрыва в точке $x=0$ формируются две ударных волны и контактный разрыв между ними. Распад разрыва в точке $x=2$ дает идущую влево волну разрежения, идущую вправо ударную волну и контактный разрыв между ними.

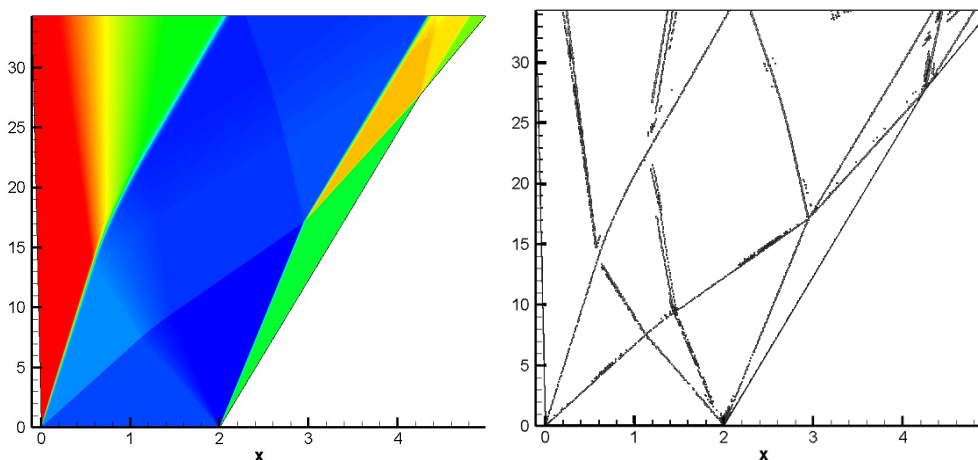


Рис. 1. Распределение плотности в расчете на равномерной подвижной сетке, содержащей 2048 ячеек (слева), и разрывы, локализованные в расчете (справа).

Течение в последующие моменты времени рассчитывалось путем численного интегрирования нестационарных одномерных уравнений Эйлера. Использовался одномерный вариант разностной схемы Годунова 2-го порядка аппроксимации. Изначально расчеты проводились на равномерной подвижной сетке, границы которой соответствуют положению крайней левой и крайней правой ударных волн. Результаты расчета на сетке, содержащей 2048 ячеек, представлены на рисунке 1 слева. Затем в расчет был внедрен алгоритм выделения особенностей течения. Локализация разрывов проводилась на каждом шаге расчета (рисунок 1 справа).

Для проверки качества выделения разрывов, для начального интервала времени было проведено сравнение результатов локализации с точным решением (таблица 1). Для контактных разрывов и ударной волны получено достаточно точное совпадение, локализованные границы волны разрежения смещены внутрь волны разрежения.

Таблица 1 Сравнение точных и полученных скоростей разрывов

Распад слева	Теоретическая скорость	Полученная скорость
Контактный разрыв	1.468936	1.462891
Ударная волна	5.150371	5.131882
Распад справа	Теоретическая скорость	Полученная скорость
Волна разрежения – левая граница	-4.177036	-3.928539
Волна разрежения – правая граница	-1.87936	-1.953756
Контактный разрыв	1.91473	1.911167

После этого был реализован адаптивный вариант расчета, использующий информацию о положении разрывов, полученную от детектора. На каждом шаге расчета сначала проводилась локализация разрывов в исходных данных (начальных или данных с предыдущего шага). Затем ячейки, в которых были локализованы разрывы, и две соседние с

ними ячейки разбивались на восемь равных частей. Таким образом, формировалась неравномерная сетка, на которой выполнялся очередной шаг расчета.

Результаты неадаптивного расчета, проведенного на равномерной сетке, содержащей 256 ячеек, и адаптивного расчета, проведенного с использованием информации о положении разрывов на неравномерной сетке (изначально сетка состоит из 256 ячеек, но каждая может разбиваться на 8 частей), представлены на рисунке 2.

Использование адаптивного подхода позволило существенно повысить качество расчета за счет уменьшения зон размазывания разрывов (особенно контактных рис. 3).

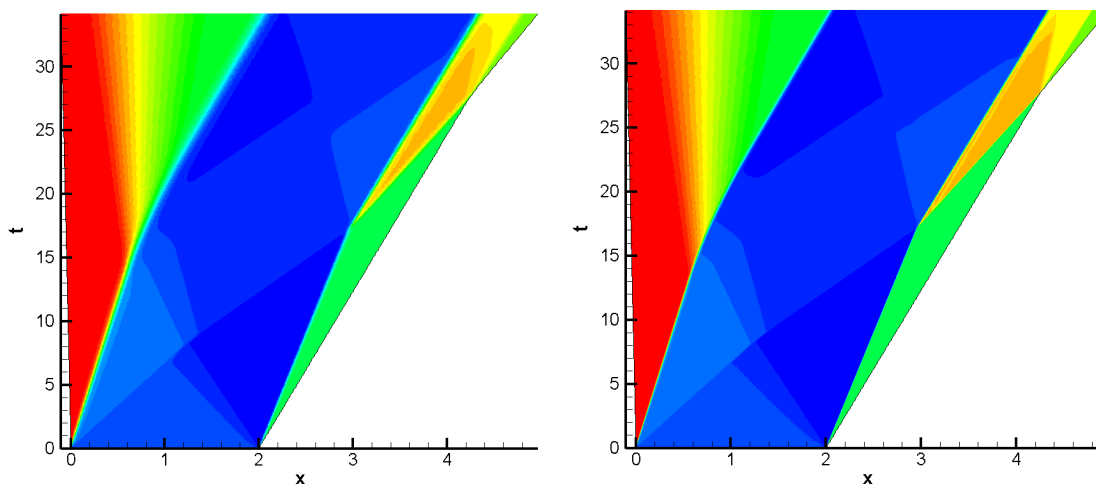


Рис. 2. Распределение плотности в расчете на равномерной подвижной сетке, содержащей 256 ячеек (слева) и в расчете, выполненном на адаптивной сетке (справа).

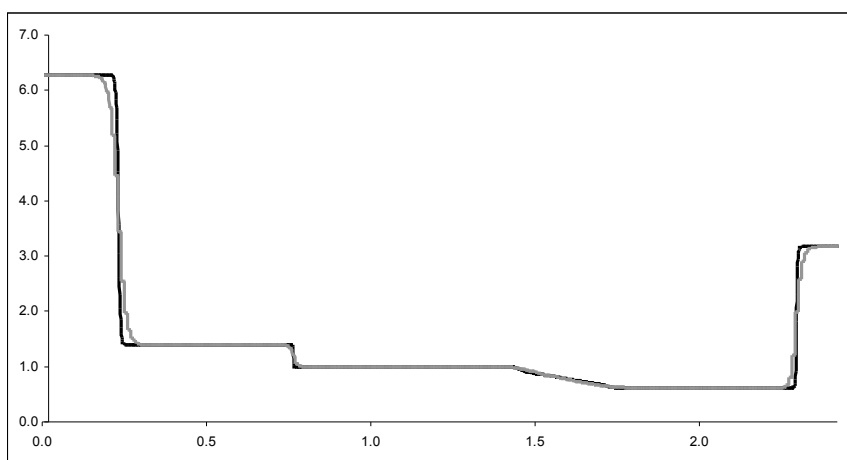


Рис. 3. Распределение плотности в момент $t = 5$ для адаптивного (черный) и неадаптивного (серый) расчетов.

Данный пример демонстрирует точность выделения сингулярностей течения и высокий потенциал использования детектора для адаптации расчета к положению разрывов. Естественно, описанный выше подход является одним из простейших. На практике могут использоваться методы, связанные не только с построением адаптивных сеток, но и с модификацией в окрестности разрывов самого разностного алгоритма.

Локализация разрывов в трехмерных расчетах

Рассмотрим модельное поле:

$$\rho_{i,j,k} = \begin{cases} 2, & i \geq 0.1 * ((j-50)^2 + (k-50)^2) \\ 1, & i < 0.1 * ((j-50)^2 + (k-50)^2) \end{cases}, \quad p_{i,j,k} = \begin{cases} 2, & \begin{cases} i \geq 0.1 * ((j-50)^2 + (k-50)^2) \\ j \geq 50 \end{cases} \\ 1, & \begin{cases} i < 0.1 * ((j-50)^2 + (k-50)^2) \\ j < 50 \end{cases} \end{cases},$$

где $i, j, k \in Z$, $0 \leq i < 50$, $0 \leq j < 100$, $0 \leq k < 100$. Таким образом, на одной половине чаши параболоида существует разрыв и плотности и давления, моделирующий ударную волну, а на другой – только разрыв плотности, моделирующий контактный разрыв.

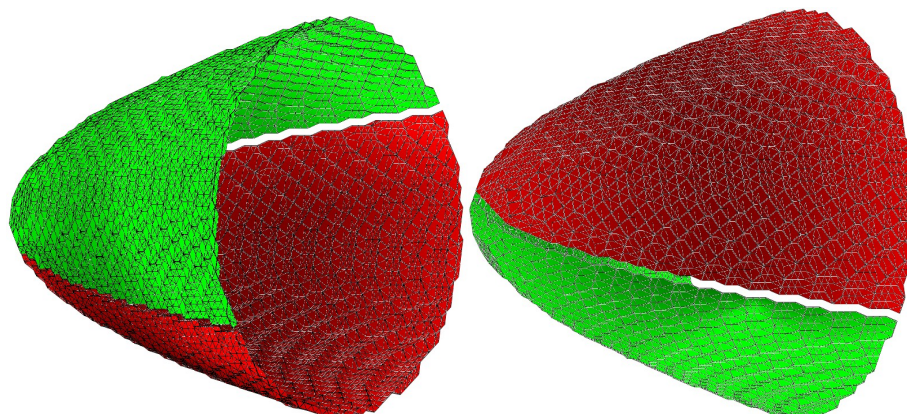


Рис. 4. Разрывы, локализованные в модельных данных.

На рисунке 4 представлены результаты локализации разрывов. Красная поверхность соответствует ударной волне, а зеленая – контактному разрыву. В плоскости $j = 50$ имеется разрыв давления, но на нем не выполняются условия Гюгонио и поэтому детектор не выделяет разрыв. Ошибка локализации не превышает одну ячейку сетки.

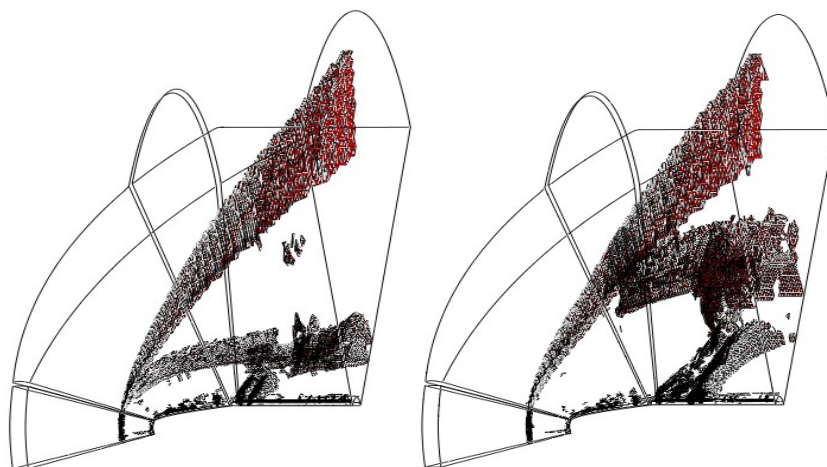


Рис. 5. Результаты локализации ударных волн на шаге 176000 (слева) и 239200 (справа).

Для анализа была выбрана задача о сверхзвуковом обтекании тела под углом атаки шесть градусов. Расчет выполнялся методом установления по модели Навье - Стокса на сетке, состоящей из 25 блоков. На рисунке 5 представлены результаты локализации ударных волн в трех блоках расчетной сетки для двух моментов времени. Четко локализуются структуры, соответствующие головной ударной волне и уплотнению, возникающему за волной разрежения при обтекании цилиндрических тел.

В течении также наблюдается нестационарный процесс. За головной ударной волной был выделен разрыв слабой интенсивности (рис. 5 слева). Этот скачок постепенно удаляется от тела (рис. 5 справа) и при дальнейшем установлении течения должен покинуть расчетную область. Указанный факт свидетельствует о том, что течение еще не установилось и требуется продолжение расчета.

В силу слабой интенсивности обнаружить указанный нестационарный разрыв стандартными средствами может быть достаточно трудоемко. Так, на шаге 176000 его наличие может быть визуально установлено по распределению поля плотности (рис. 6(a)). Однако на шаге 239200 визуально установить наличие разрыва уже невозможно (рис. 6(б)). В то же время разработанный нами метод позволяет обнаружить и локализовать этот разрыв, что позволяет использовать детектор для анализа качества расчетов.

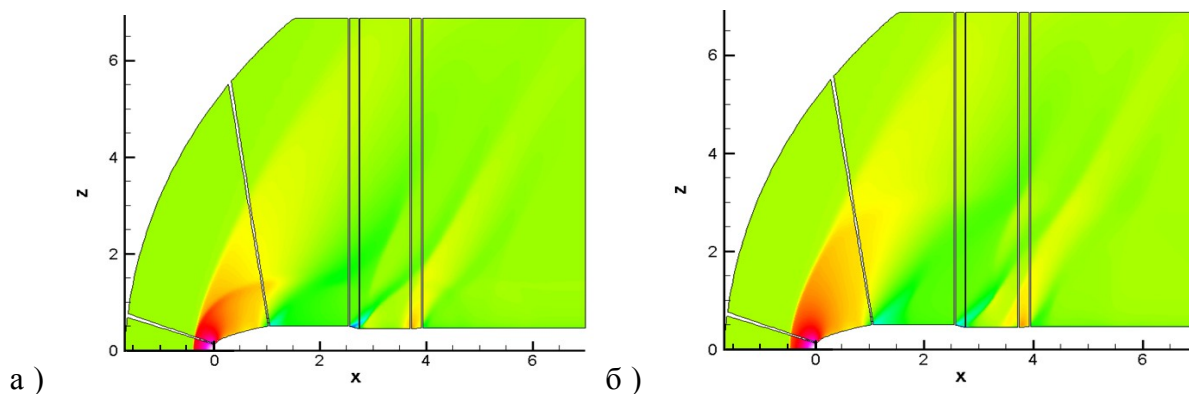


Рис. 6. Распределение плотности в плоскости $y=0$ на шаге 176000 (а) и шаге 239200 (б).

Заключение

Разработанный алгоритм локализации особенностей позволяет эффективно обрабатывать расчеты в областях со сложной геометрией и подавлять значительную часть артефактов. Кроме того детектор может быть успешно использован для повышения качества расчета, за счет его адаптации к положению разрывов.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ 11-01-00390-а, 11-08-00269-а и программы 3 ОМН РАН.

Список литературы

1. В. И. Мажукин, А.А. Самарский, О. Кастельянос, А.В. Шапранов, Метод динамической адаптации для нестационарных задач с большими градиентами, *Математическое Моделирование*, 1993, т. 5, №4, с.32-56.

2. А.Л. Афендииков, А.Е. Луцкий, А.В. Плёнкин, Многомасштабный анализ особенностей газодинамических полей, *Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН №98*, 2008г.

3. А.Л. Афендииков, А.Е. Луцкий, А.В. Плёнкин, Вейвлетный анализ локализованных структур в идеальной и вязкой моделях, *Математическое Моделирование 2011г, том 23, №1*, страницы 41-50.

4. А.Л. Афендииков, Л.И. Левкович-Маслюк, А.Е. Луцкий, А.В. Плёнкин, Локализация разрывов в полях газодинамических функций с помощью вейвлет анализа, *Математическое Моделирование 2008г, том 20, №7*, страницы 65-84.