

Численное решение уравнений эллиптического типа на неструктурированных сетках

Кошкина Алиса Александровна

Томский Государственный университет (Томск), Россия

alisakoshkina@yandex.ru

Введение

Бурное развитие численных методов и становление новой науки – вычислительной математики – связано с необходимостью решения крупных научно-технических проблем и появлением высокопроизводительных вычислительных машин. Успехи в области вычислительной математики и её приложениях в значительной степени способствовали повышению интереса к математике вообще и привели к созданию новых её разделов.

Изучением математических моделей физики занимается математическая физика. Уравнениями математической физики, в основном, являются уравнения с частными производными. Эти уравнения обычно выражают законы сохранения основных физических величин и, как правило, являются нелинейными.

Однако зачастую решение конкретных задач, связанных с изучением физических процессов требует расчетов в областях сложной геометрической формы, поэтому особое внимание уделяется численным методам, которые применимы на неструктурированных сетках, без перекрытия покрывающих область исследования. В этом и состоит актуальность данной работы.

Цель работы – разработка эффективного численного метода решения уравнений эллиптического типа на неструктурированных сетках.

Постановка задачи

Исследования стационарных процессов различной физической природы (колебания, диффузия, теплопроводность и т.д.) обычно приводят к уравнениям эллиптического типа. Классическим примером уравнения эллиптического типа является уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = f(x, y),$$

или уравнение Лапласа при $f(x, y) \equiv 0$, где U – гармоническая функция.

Функция U называется *гармонической в области D* , если она непрерывна в этой области вместе со своими производными до второго порядка и удовлетворяет уравнению Лапласа.

Здесь функция $U(x, y)$ имеет различный физический смысл, а именно: стационарное, независящее от времени, распределение температуры, скорость потенциального (безвихревого) течения идеальной (без трения и теплопроводности) жидкости, распределение напряженностей электрического и магнитного полей, потенциала в силовом поле тяготения и т.п.

Если на границе Γ расчетной области $\bar{D} = D \cup \Gamma$ задана искомая функция, то соответствующая *первая краевая* задача для уравнения Лапласа или Пуассона называется *задачей Дирихле*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= f(x, y), \quad (x, y) \in D, \\ u(x, y) &= \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma. \end{aligned}$$

Численные методы решения

Для построения разностной схемы на неструктурированных сетках в данной работе используется метод конечного объема. При этом разностная аппроксимация уравнений строится на основе приближенного интегрирования уравнений эллиптического типа по некоторому объему, который называется конечным. Точность полученной разностной схемы в значительной мере определяется формой треугольников и способом выбора конечного объема.

В данной работе рассматривается вариант выбора конечного объема в виде так называемой ячейки Дирихле. Ячейка Дирихле для внутренней точки P_0 сетки определяется как множество точек из области расчета, расположенных к узлу P_0 ближе, чем к любому другому узлу из P_i . Соседние узлы образуют шаблон разностной схемы точки P_0 , на котором производится аппроксимация уравнений. Для каждого узла P_i треугольной сетки строится контур, состоящий из точек S_k пересечения перпендикуляров, восстановленных к серединам граней соседних треугольников. Область, ограниченная этим контуром, представляет собой расчетную ячейку – конечный объем (рисунок 1).

Рассматривается два варианта неструктурированной сетки. В первом случае был разработан оригинальный алгоритм для построения сетки (рисунок 2). В другом случае использовался генератор сеток GMSH (рисунок 3).

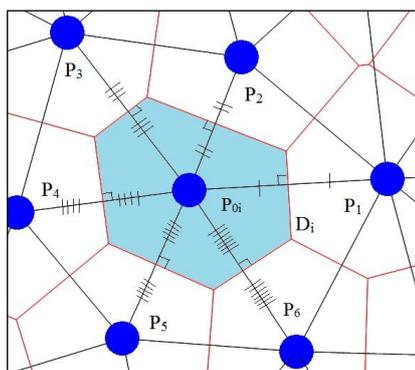


рисунок 1. Конечный объем – ячейка Дирихле

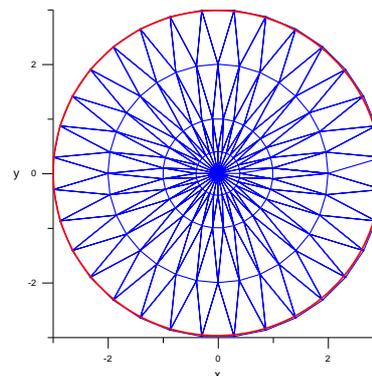


рисунок 2. Неструктурированная сетка, построенная по оригинальному алгоритму

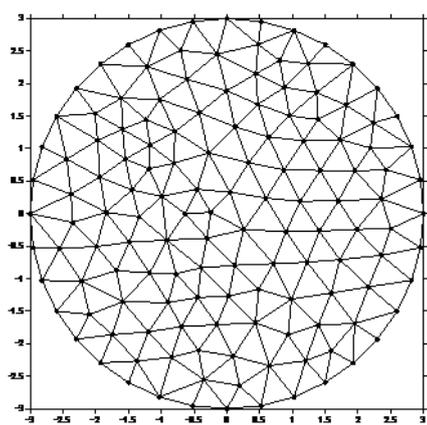


рисунок 3. Треугольная сетка, построенная с помощью GMSH

Вывод разностной схемы уравнений с помощью метода конечного объема

Пусть дано

$$Lu = f,$$

где

$$Lu = \begin{cases} \Delta u, & (x, y) \in D, \\ u, & (x, y) \in \Gamma, \end{cases} \quad f = \begin{cases} g(x, y), & (x, y) \in D, \\ \varphi(x, y), & (x, y) \in \Gamma \end{cases},$$

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \text{оператор Лапласа.}$$

На произвольной области \bar{D} строим сетку как описано выше: $\bar{\omega}_h = \omega_h \times \gamma_h$, где ω_h – множество внутренних узлов сетки, γ_h – множество граничных узлов.

Проинтегрируем уравнение по КО D_i (рис.1) и получим

$$\iint_{D_i} \Delta u dx dy = \iint_{D_i} f dx dy, \text{ где } (i) \in \omega_h.$$

По формуле Грина переходим к криволинейному интегралу по периметру КО, а затем применим квадратурную формулу средних прямоугольников и формулу центральных разностей

$$\iint_{D_i} \Delta u dx dy = \oint_{\Gamma_i} \frac{\partial u}{\partial n} dl \approx \sum_{q=1}^{m_i} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_{M_{q_i}} l_{q_i}, (i) \in \omega_h;$$

$$\oint_{\Gamma_i} \frac{\partial u}{\partial n} dl \approx \sum_{q=1}^{m_i} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_{M_{q_i}} l_{q_i} \approx \sum_{q=1}^{m_i} \frac{u(P_q) - u(P_i)}{|P_q P_i|} l_{q_i}, (i) \in \omega_h.$$

Здесь \bar{n} – внешняя нормаль к КО D_i , m_i – количество узлов i -го сеточного шаблона с центром в точке P_i , M_{q_i} – середина отрезка $P_q P_i$, $l_{q_i} = |C_q C_{q-1}|$ – длина отрезка $C_q C_{q-1}$, вершинами которого являются точки пересечения перпендикуляров к серединам отрезков $P_q P_i$ и $P_{q-1} P_i$ соответственно. Введем сеточную функцию v_h , которая представляет собой приближенное решение поставленной задачи (3.1), т.е.

$$v_{P_q} \approx u(P_q), q = \bar{0}, m_i, (i) \in \omega_h.$$

В соответствие (3.1) поставим разностную задачу

$$L_h v_h = f_h,$$

где

$$L_h v_h = \begin{cases} \sum_{q=1}^{m_i} \frac{l_{q_i}}{|P_q P_i|} v_{P_q} - v_{P_i} \sum_{q=1}^{m_i} \frac{l_{q_i}}{|P_q P_i|}, & (i) \in \omega_h, \\ v_{P_i}, & (i) \in \gamma_h \end{cases},$$

$$f_h = \begin{cases} g(P_i), & (i) \in \omega_h, \\ \varphi(P_i), & (i) \in \gamma_h. \end{cases}$$

Решение сеточных уравнений численными методами приводит к системам линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). В работе применяются метод сопряженных градиентов и предобусловленный метод сопряженных градиентов. Выбор основан на результатах тестирования.

Результаты расчетов

1) Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге

В качестве тестовой задачи рассмотрим

$$Lu = \begin{cases} \Delta u, & (x, y) \in D, \\ u, & (x, y) \in \Gamma, \end{cases} \quad f = \begin{cases} 0, & (x, y) \in D, \\ 1, & (x, y) \in \Gamma. \end{cases}$$

Она является тестовой для того, чтобы определить оптимальный метод для решения СЛАУ и выбрать расчетную сетку.

Сначала круг покрываем конечным множеством точек – сеткой. Рассмотрим два варианта неструктурированной сетки для круга. Один построен вручную по алгоритму, описанному выше.

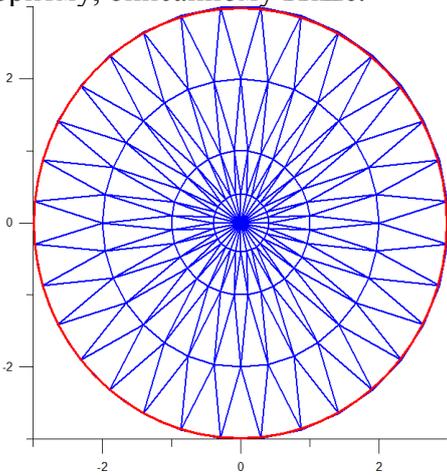


рисунок 4. Треугольная сетка, построенная по алгоритму

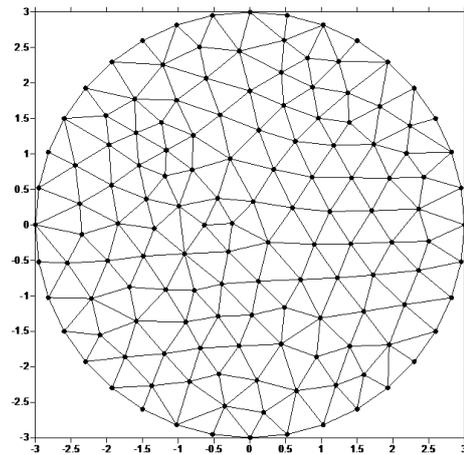


рисунок 5. Треугольная сетка, построенная при помощи GMSH

С помощью метода конечных объемов задача решается на различных треугольных неструктурированных сетках (рисунок 4, рисунок 5). На полученных сетках строятся ячейки Дирихле, которые играют роль конечных объемов (рисунок 6, рисунок 7). На каждом конечном объеме аппроксимируется дифференциальная задача разностной, как было описано выше. В итоге получается система линейных алгебраических уравнений, искомым вектор которой является численным решением разностной задачи.

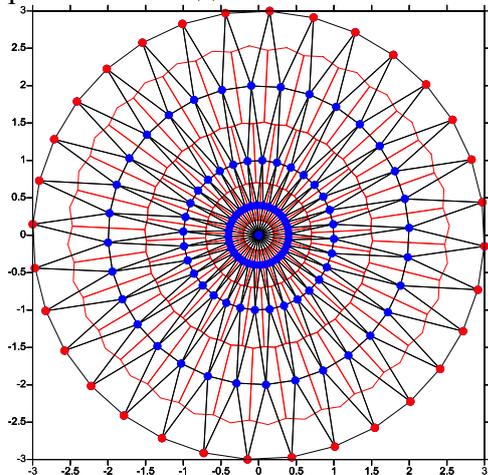


рисунок 6. Ячейки Дирихле для сетки, построенной по алгоритму

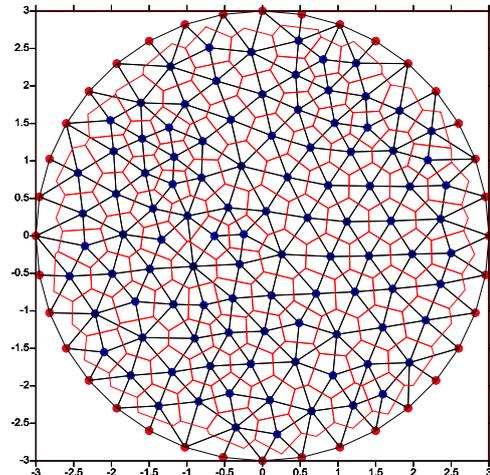


рисунок 7. Ячейки Дирихле для сетки, построенной с помощью GMSH

Для решения СЛАУ применяем метод сопряженных градиентов и предобусловленный метод сопряженных градиентов, основанный на неполной LU –

факторизации и методе верхней релаксации. В качестве предобуславливателя используется неполная LU – факторизация, т.к. матрица системы является несимметрической. Ниже приведены графики сходимости норм векторов невязок для каждого метода при численной решении разностной задачи на сетке, построенной по описанному алгоритму (рисунок 8). По горизонтальной оси указано количество итераций, а по вертикальной оси – норма вектора невязки.

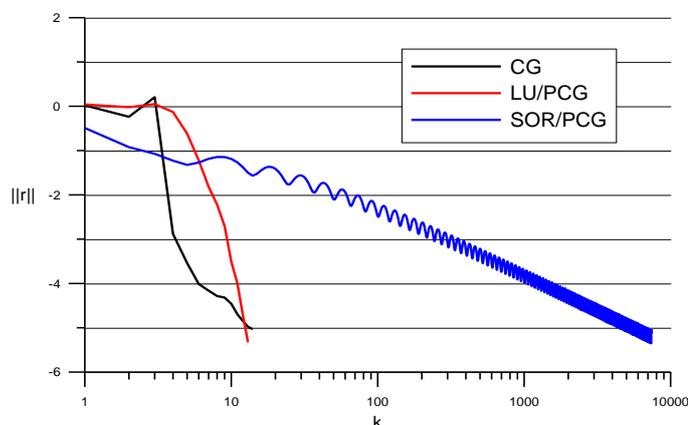


рисунок 8. График сходимости итераций для CG и PCG для сетки, построенной вручную

Число обусловленности полученной СЛАУ $\mu = 464$, т.е. система плохо обусловлена. Решение СЛАУ находилось с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$. Из графика видно, что метод CG сходится за 14 итераций, а метод PCG, основанный на неполной LU-факторизации, – за 13 итераций. Метод верхней релаксации в качестве предобуславливателя не является эффективным.

Численное решение на сетке, построенной с помощью GMSH, находилось с помощью тех же методов. Графики сходимости методов представлены на рисунке 9.

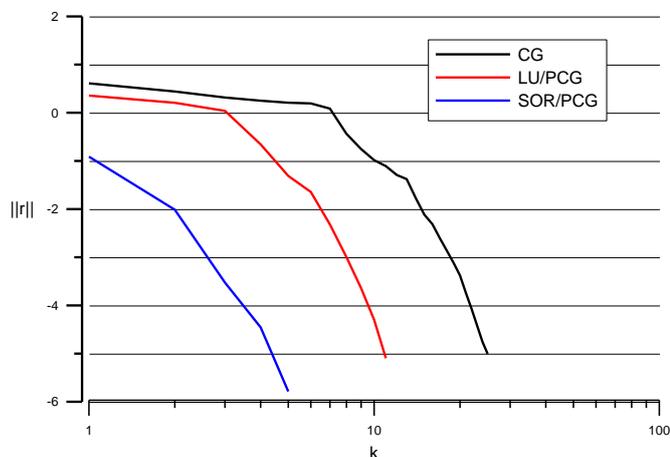


рисунок 9. График сходимости итераций для CG и PCG для сетки, построенной с помощью GMSH

Число обусловленности полученной СЛАУ $\mu = 73$, т.е. система хорошо обусловлена. Решение находилось с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$. Из графика видно, что все методы сходятся. Это объясняется малым числом обусловленности системы. Метод PCG, основанный на методе верхней релаксации, сходится за 5 итераций (рис .4.6). Для выбранной сетки этот метод оказался эффективным.

На основе результатов, полученных при реализации различных методов, можно сделать вывод, что эффективным методом для плохо обусловленной СЛАУ является предобусловленный метод сопряженных градиентов с применением неполной LU-

факторизации. А для хорошо обусловленной системы минимальные вычислительные ресурсы использует PCG, основанный на методе верхней релаксации.

2) Задача Дирихле для уравнения Лапласа в области сложной геометрии
Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$Lu = \begin{cases} \Delta u, & (x, y) \in D, \\ u, & (x, y) \in \Gamma, \end{cases} \quad f = \begin{cases} 0, & (x, y) \in D, \\ x^2 - y^2, & (x, y) \in \Gamma. \end{cases}$$

в области \bar{D} (рисунок 10).

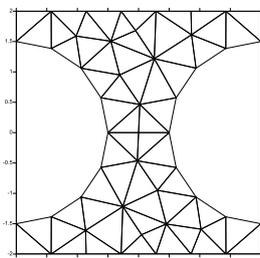


рисунок 10. Сетка для области сложной геометрии, построенная с помощью GMSH, состоит из 52 узлов

С помощью GMSH сетка построена для области, полученной при высечении полуокружностей из квадрата.

Разностная схема для этой задачи и представленной сетки строится аналогично описанному выше подходу.

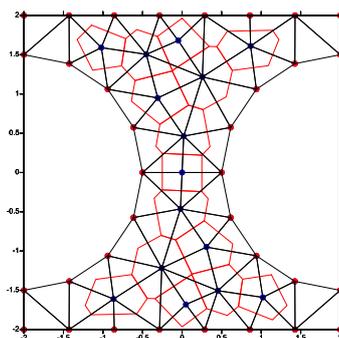


рисунок 11. Ячейки Дирихле для сетки, построенной с помощью GMSH

Для каждой внутренней точки построен конечный объем, по которому происходит интегрирование уравнения. Переходя к криволинейному интегралу, используем формулы центральных разностей и квадратурную формулу средних прямоугольников, получим разностную задачу. Для определения искомого вектора решается СЛАУ.

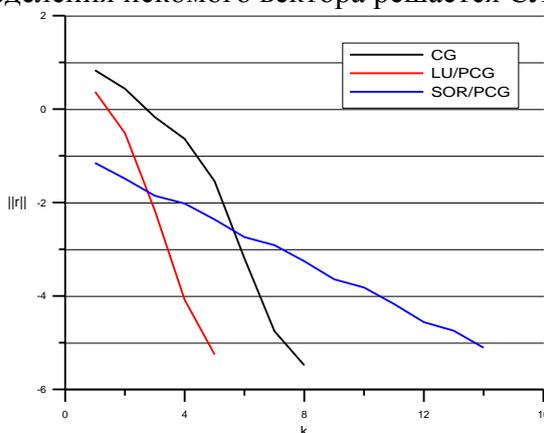


рисунок 12. График сходимости итераций для CG и PCG для сетки, построенной с помощью GMSH

Число обусловленности системы $\mu = 13$, т.е. система хорошо обусловлена. Это объясняется малым объемом числом уравнений в разностной схеме.

На основе полученных результатов, можно сделать вывод о том, что эффективным оказался метод PCG, в котором в качестве предобуславливателя использовалась неполная LU-факторизация.

Заключение

В данной работе были рассмотрены численные методы решения уравнений эллиптического типа, опирающиеся на использование метода конечных объемов.

Для построения сетки для расчетной области было использовано два варианта: самостоятельная разработка алгоритма построения неструктурированной сетки для круга и использование генератора сеток. Для этого был освоен пакет программ GMSH – построитель сеток, который можно использовать для двумерного и трехмерного случаев.

Также был разработан алгоритм для построения по заданной неструктурированной треугольной сетки ячеек Дирихле-Вороного, которые использовались в качестве конечных объемов.

С помощью метода конечных объемов получена устойчивая разностная схема, которая имеет погрешность аппроксимации $O(h^2)$ и приводит к системе линейных алгебраических уравнений. Решение СЛАУ находилось с помощью метода сопряженных градиентов, а также предобусловленного метода сопряженных градиентов. Для последнего проведен обзор прямых и итерационных методов, которые можно использовать в качестве предобуславливателя. Для определения оптимального метода решения СЛАУ был проведен ряд тестов для плотнозаполненной матрицы и разреженной матрицы.

В круге решается задача Дирихле для уравнения Лапласа на двух неструктурированных сетках, полученной на основе оригинального алгоритма и при помощи генератора сеток GMSH. А также рассматривается задача Дирихле в невыпуклой области сложной геометрии, для которой сетка получена с помощью GMSH.

Согласно полученным результатам, можно сделать вывод, что наиболее эффективным численным методом является метод конечных объемов, использующий неструктурированную треугольную сетку, построенную по принципу триангуляции Делоне, где в качестве конечных объемов используются ячейки Дирихле-Вороного. Для определения таблицы значений численного решения, которое является искомым вектором при решении СЛАУ, оптимальным является предобусловленный метод сопряженных градиентов, основанный на неполной LU-факторизации.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФПЦ «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 (госконтракт №12.В37.21.0667) и РФФИ, грант №12-01-0043а.