

# ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА В ПЕРЕМЕННЫХ «ФУНКЦИЯ ТОКА-ВИХРЬ»<sup>1</sup>

В.Г. Иванов

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск,  
[ivgk26@gmail.com](mailto:ivgk26@gmail.com)

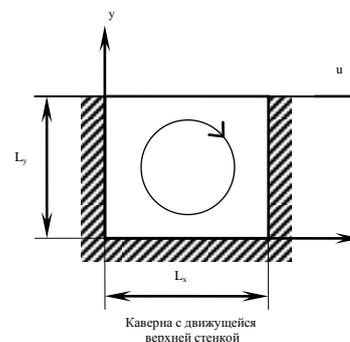
*В настоящей работе на основе метода конечного объема построена разностная схема, аппроксимирующая систему уравнений Навье-Стокса в переменных «функция тока – вихрь». Численное решение системы получено с использованием метода релаксации.*

Развитие механики жидкости и газа и ее приложений в последние годы связано с применением общих математических моделей, основанных на уравнениях Навье-Стокса. Эти уравнения выведены еще в середине XIX в., однако в общем виде мало изучены и содержат огромный запас информации. Их частными случаями являются классические уравнения идеальной (невязкой) жидкости и уравнения пограничного слоя. Следствием исходных уравнений Навье-Стокса являются также уравнения акустики, внутренних волн, теории устойчивости и осредненные уравнения турбулентного движения (уравнения Рейнольдса). Однако все упомянутые уравнения, многие из которых имеют достаточно сложный характер, не обнаруживают всего богатства физических эффектов, присущих исходным уравнениям Навье-Стокса. Ввиду специфической нелинейности последних, наличия малого параметра при старшей производной в сочетании с пространственным характером движения и нестационарностью, их можно изучать, по-видимому, лишь с помощью численных методов.

Подход с использованием вихря и функции тока в качестве независимых переменных является одним из самых распространенных методов решения двумерных уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости, его можно распространить на трехмерные задачи, при этом следует иметь в виду, что вихрь в трехмерном случае – вектор, а функция тока – векторный потенциал. Проблема задания краевых условий сохраняется и в пространственных задачах.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу о плоском течении вязкой несжимаемой жидкости с постоянными значениями плотности и коэффициента вязкости в прямоугольной области. Требуется выполнение условий прилипания частиц жидкости к твердой стенке и непротекания на ограничивающих течение поверхностях. Имеет место простейший случай изотермического движения. Верхняя стенка перемещается в своей плоскости с постоянной скоростью  $u$ . Жидкость, целиком заполняющая каверну, вовлекается в движение силами вязкости. Обозначим длину каверны  $L_x$ , а высоту  $L_y$ .



Каверна с движущейся верхней стенкой

Для однородной несжимаемой вязкой жидкости система уравнений Навье-Стокса имеет вид

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \nabla) V = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta V + f \cdot n,$$
$$\text{div} V = 0.$$

В этой системе уравнений искомыми функциями являются вектор скорости  $V$ , давление  $p$ , которые зависят от пространственных координат и времени  $t$ . Параметрами

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 (госконтракт № 14.В37.21.0667) и РФФИ, грант № 12-01-00433а

задачи будут плотность  $\rho$ , коэффициент кинематической вязкости  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ , где  $\mu$  - коэффициент динамической вязкости,  $f$  - силовая функция,  $n$  - единичный вектор,

$$\operatorname{div} V = \sum \frac{\partial v_k}{\partial x_k}, \nabla = \sum \frac{\partial}{\partial x_k}, \Delta = \nabla^2.$$

Для численного исследования плоскопараллельного течения в каверне применяются уравнения Навье-Стокса в переменных «функция тока - вихрь»

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right). \end{cases}$$

Функции тока  $\psi$  и вихрь  $\omega$  заданы следующими соотношениями

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

В переменных  $(\psi, \omega)$  граничные условия формулируются только для функции тока и отсутствуют для вихря.

Начальные условия:  $\omega = 0$ .

Граничные условия:

$$x = 0: \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0; \omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

$$x = L_x: \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0; \omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

$$y = 0: \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0; \omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$$

$$y = L_y: \frac{\partial \psi}{\partial y} = u; \omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$$

## ПОЛУЧЕНИЕ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОГО АНАЛОГА.

Получение конечно-разностного аналога исходной системы дифференциальных уравнений производится методом конечного объема. Расчетная область разбивается на некоторое ограниченное число непересекающихся конечных объемов. В центре каждого конечного объема рассчитывается завихренность и функция тока, а на его гранях – компоненты скорости. Дифференциальные уравнения интегрируются по каждому из конечных объемов. Подынтегральные выражения вычисляются с использованием кусочно-непрерывных функций. В результате получается дискретный аналог дифференциальных уравнений, в который входят значения искомых переменных в некоторых узловых точках.

Расчетную область покрываем равномерной сеткой.

Определяем:

$$\omega_h = \{(x_{c_i}, y_{c_j}); x_{c_i} = (i - \frac{1}{2})h_x, i = 0, \dots, N_x + 2,$$

$$y_{c_j} = (j - \frac{1}{2})h_y, j = 0, \dots, N_y + 2\};$$

$$h_x = \frac{L_x}{N_x + 1}; h_y = \frac{L_y}{N_y + 1}.$$

Здесь  $N_x + 2$  - количество узлов по длине каверны, а  $N_y + 2$  количество узлов по высоте каверны.  $h_x$  - шаг по длине каверны, т.е. расстояние между узлами,  $h_y$  - шаг по высоте каверны.

Координаты центра конечных объемов  $x_i, y_i$  определяются следующим образом

$$x_i = \frac{1}{2}(xc_i + xc_{i+1}), i = 0, \dots, N_x + 1$$

$$y_j = \frac{1}{2}(yc_j + yc_{j+1}), j = 0, \dots, N_y + 1$$

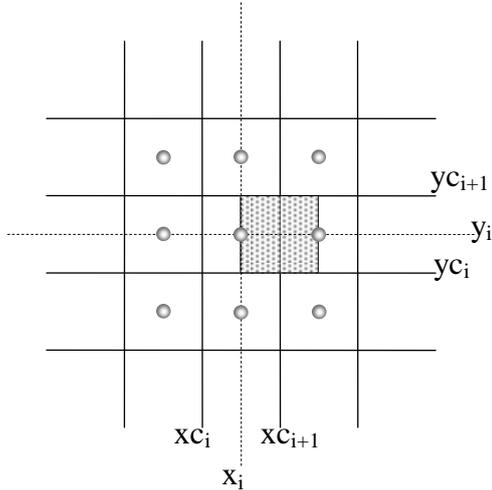


Рис. 1.а

Конечный объем для  $u$

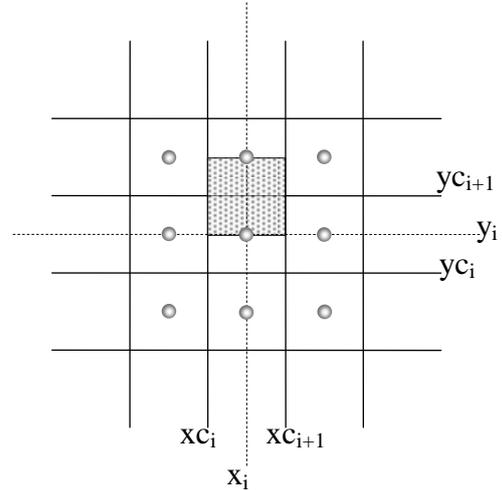


Рис. 1.б

Конечный объем для  $v$

Вводим сеточные функции, аппроксимирующие исходные функции тока и вихря на множестве  $\bar{\omega}_h : \psi(x_i, y_j), \omega(x_i, y_j)$ ;

В конечном итоге мы получили разностную схему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{ij}}{x_{i+1} - x_i} - \frac{\psi_{ij} - \psi_{i-1,j}}{x_i - x_{i-1}} \right] (yc_{j+1} - yc_j) + \left[ \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{ij}}{y_{j+1} - y_j} - \frac{\psi_{ij} - \psi_{i,j-1}}{y_j - y_{j-1}} \right] (xc_{i+1} - xc_i) = \\ -\omega_{ij}(xc_{i+1} - xc_i)(yc_{j+1} - yc_j); i = 1, \dots, N_x; j = 1, \dots, N_y; \\ \psi_{0j} = 0; \psi_{N_x+1,j} = 0; j = 1, \dots, N_y; \\ \psi_{i,0} = 0; \psi_{i,N_y+1} = 0; i = 1, \dots, N_x; \\ e\omega_{i,j} = a\omega_{i+1,j} + b\omega_{i-1,j} + c\omega_{i,j+1} + d\omega_{i,j-1} + f; i = 1, \dots, N_x; j = 1, \dots, N_y; \\ \omega_{i,0} = -2 \frac{\psi_{i,1}}{(y_1 - y_0)^2}; i = 1, \dots, N_x; \\ \omega_{i,N_y+1} = (1 - kr) * \omega_{i,N_y+1} + kr * \left( -2 \frac{\psi_{i,N_y}}{(y_{N_y+1} - y_{N_y})^2} \right) - 2 \left( \frac{-u}{y_{N_y+1} - y_{N_y}} \right); i = 1, \dots, N_x; \\ \omega_{0,j} = -2 \frac{\psi_{1,j}}{(x_1 - x_0)^2}; j = 1, \dots, N_y; \\ \omega_{N_x+1,j} = -2 \frac{\psi_{N_x,j}}{(x_{N_x+1} - x_{N_x})^2}; j = 1, \dots, N_y. \end{array} \right.$$

где

$$a = \left( \max \{ -u_{i+1j}, 0 \} + \frac{v}{x_{i+1} - x_i} \right) (yc_{j+1} - yc_j);$$

$$b = \left( \max \{ u_{i-1j}, 0 \} + \frac{v}{x_i - x_{i-1}} \right) (yc_{j+1} - yc_j),$$

$$c = \left( \max \{ -v_{ij+1}, 0 \} + \frac{v}{y_{j+1} - y_j} \right) (xc_{j+1} - xc_j);$$

$$d = \left( \max \{ v_{ij-1}, 0 \} + \frac{v}{y_j - y_{j-1}} \right) (xc_{j+1} - xc_j),$$

$$f = \frac{(yc_{j+1} - yc_j)(yc_{j+1} - yc_j)}{\Delta t} \omega_{ij}, e = a + b + c + d + \frac{(yc_{j+1} - yc_j)(xc_{i+1} - xc_i)}{\Delta t}.$$

Заметим, что коэффициенты  $a, b, c, d, e$  - положительные, и имеет место диагональное преобладание:  $e > a + b + c + d$ .

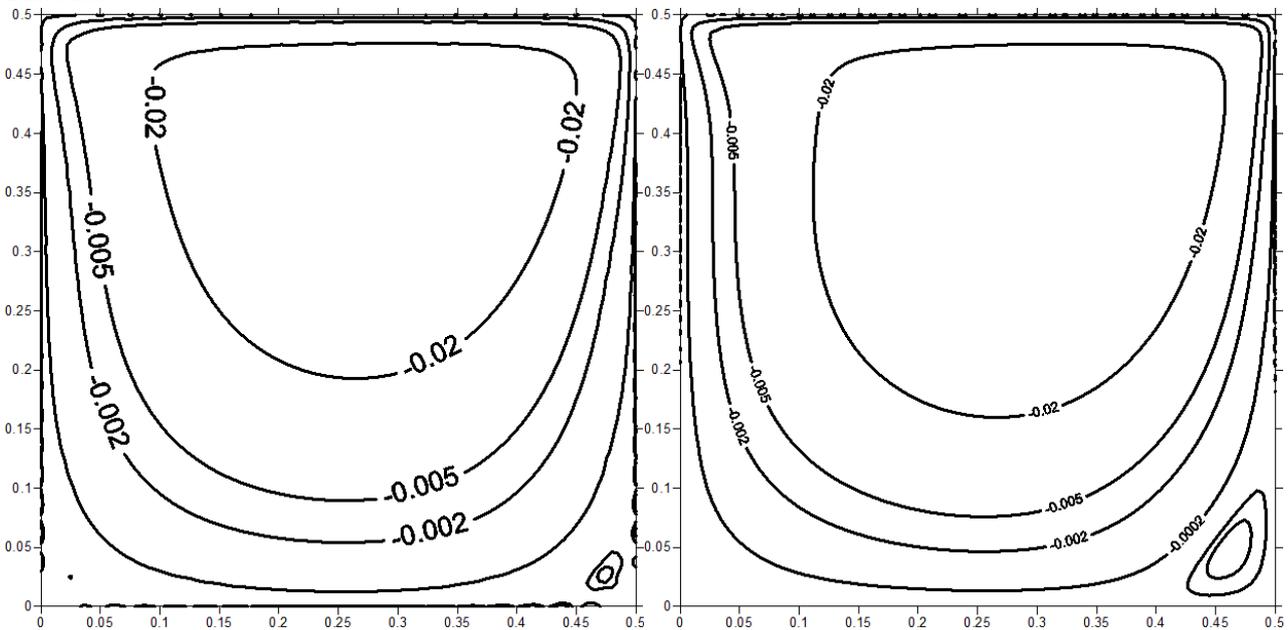
Нелинейность делает невозможным прямое решение этой системы и заставляет обращаться к итерациям (метод релаксации). Итерации прекращаются при достижении требуемой точности сходимости к решению стационарной аппроксимирующей системы:

$$\| \psi^{(k+1)} - \psi^{(k)} \| < \varepsilon; \| \omega^{(k+1)} - \omega^{(k)} \| < \varepsilon; \| r_\psi^{(k)} \| < \varepsilon; \| r_\omega^{(k)} \| < \varepsilon.$$

Значения конвективных потоков аппроксимируются с использованием схемы «против потока». Согласно этому подходу, значение  $\omega$  на грани конечного объема равно значению в соседней узловой точке с «подветренной стороны» грани.

С помощью разностной схемы получены результаты численного решения стационарной задачи, при заданном числе Рейнольдса.

На рисунках показаны линии  $\psi = const$  стационарного поля течения в квадратной выемке.



(рис. 2.а)  
 $N_x = N_y = 40, Re = 300$

(рис. 2.б)  
 $N_x = N_y = 40, Re = 1000$

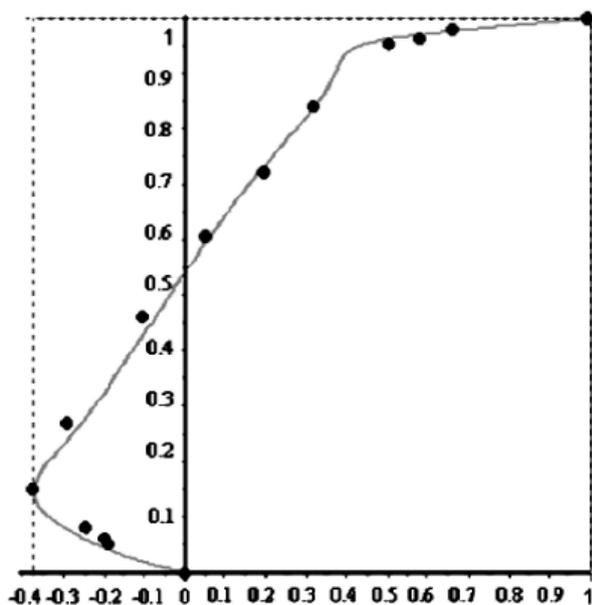
Расчеты велись на каверне размерами  $L_x = 0,5, L_y = 0,5$ . В первом случае использовалась сетка  $40 \times 40$  и число Рейнольдса  $Re = 300$ , во втором сетка  $40 \times 40$  и  $Re = 1000$ .

Видно, что течение имеет циркуляционный характер. Наибольшая интенсивность расположения линий тока находится в верхней части, где жидкость вовлекается в движение движущейся крышкой за счет сил трения.

В связи с увлечением жидкости крышкой движение несимметрично, т.е. центр вихря, в котором значение функции тока максимально, смещен по направлению движения, т.е. в сторону верхнего правого угла.

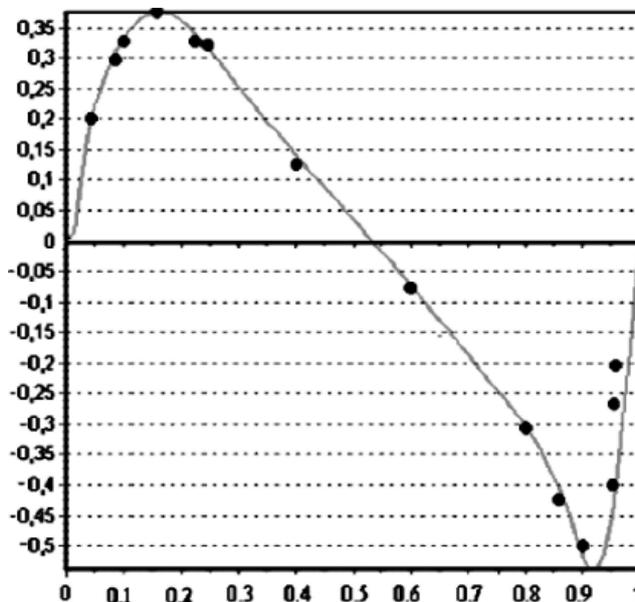
В нижнем правом углу заметно вторичное движение в виде небольшого вихря.

Далее рассмотрим горизонтальные и вертикальные компоненты скорости  $(u, v)$  в центре каверны. В дальнейших расчетах была выбрана сетка  $N_x = 80, N_y = 80$  при числе Рейнольдса  $Re = 1000$ .



(рис. 3.а)

$N_x = N_y = 40, Re = 1000$



(рис. 3.б)

$N_x = N_y = 40, Re = 1000$

Можно говорить о достаточной точности схемы для сеток с числом узлов  $N_x = 80, N_y = 80$ . Подтверждением вышесказанного служат рисунки 3.а и 3.б, где приведены распределения горизонтальной (рис. 3.а) и вертикальной (рис. 3.б) скоростей в различных сечениях каверны при  $Re = 1000$ . Сплошной линией отмечен результат текущих расчетов, точками - расчет из работы [8].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С помощью метода конечного объема построена конечно-разностная схема, аппроксимирующая систему уравнений Навье-Стокса в переменных «функциях тока-вихрь». Проведено исследование порядка аппроксимации и устойчивости полученной системы. При выводе разностного уравнения для функции тока была установлена погрешность аппроксимации второго порядка. Получая конечно-разностный аналог для завихренности, была использована схема «против потока» первого порядка точности. Показано, что конечно-разностная схема имеет первый порядок аппроксимации. Доказано, что разностная схема для  $\omega$  удовлетворяет спектральному признаку Неймана, т.е. является абсолютно устойчивой.

Полученные разностные уравнения решаются методом релаксации. Теоретически доказано, что метод сходится при любом начальном приближении. Для доказательства была использована теорема Островского-Райха.

Написана программа, моделирующая движение жидкости в каверне с начальными и граничными условиями, исследование которых было проведено ранее. Опытным путем было получено значение шага  $\tau$ , а также наиболее подходящие коэффициенты для метода релаксации. Графически были представлены линии тока для разных чисел Рейнольдса. Представлены сравнения с другими источниками.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен: В 2 т. / Пер. с англ. М.: Мир, 1990. Т.2. 392 с.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа: Учеб. для вузов. - изд. 6-е, перераб. и доп. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит, 1987. 840 с.
3. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / Пер. с англ. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.
4. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 592 с.
5. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. Лит, 1980. 536 с.
6. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса, теория и численный анализ. М.: Мир, 1981. 408 с.
7. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М.: Наука, 1984. 287 с.
8. Ghia U., Ghia K.N., Shin C.T. High-re solutions for incompressible flow using the Navier – Stokes equations and a multigrid method // J. Comput. Phys. 1982. Vol. 48. P. 387.
9. Балаганский М.Ю., Захаров Ю.Н. Итерационные схемы решения системы уравнений Навье – Стокса в переменных «функция тока - вихрь» // Вычислительные технологии Т. 8, № 5, Кемерово, 2003. С. 14-22.
10. Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1986. 288 с.
11. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с.
12. Захаров Ю.Н., Кривушин С.А. Метод минимальных невязок решения системы уравнений Навь – Стокса // Вест. Кем. гос. ун-та. Математика. Вып. 4. Кемерово, 2000. С. 108-113.
13. Тейлор Т.Д., Нфедо Э. Расчет течения вязкой жидкости в канале при помощи метода расщепления // Численные методы в механике жидкостей. М.: Мир, 1973. С. 218-229.
14. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.
15. Пухначев В. В. Лекции по динамике вязкой несжимаемой жидкости. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1969. Ч. 1. 198 с.
16. Булеев Н.И., Тарунин Е.Л. Исследование скорости сходимости схемы  $\omega, \psi$  при различной структуре условия для вихря у твердой стенки // Численные методы механики сплошной среды: Сб. Науч. Тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. ИТПМ. 1984. Т. 15, №6. С. 28-40.
17. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: В 2 т. / Пер. с англ. М.: Мир, 1991. Е.2. 552 с.
18. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. 552 с.