

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ ИНТЕРВАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ОЦЕНКИ МНОГОМЕРНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ ЛОПАПАТОЧНОЙ СИЛОВОЙ УСТАНОВКИ

Д.Ю. Людвин

Институт вычислительных технологий СО РАН

e-mail: lyudvin@ngs.ru

В работе рассматривается задача вычисления многомерных перемещений элементов конструкции лопаточной силовой установки. Вычисление многомерных перемещений производится с использованием семейств градуировочных характеристик измерительных каналов, полученных экспериментально при заданных эталонных значениях координатных составляющих перемещений.

Задача аппроксимации градуировочных характеристик решается на основе метода интервальной идентификации полиномиальной регрессии [1]. Модели зависимостей имеют вид интервальных полиномов, свободные члены которых являются интервалами.

Далее на основе полученных уравнений зависимостей вычисляются координатные составляющие перемещений элементов конструкции, соответствующие определенным значениям цифровых кодов. Эта задача сводится к оценке множества решений интервальной системы нелинейных уравнений. В работе предлагаются алгоритмы получения внешней и внутренней оценок данного множества решений, основанные на интервальном методе распространения ограничений, многомерном интервальном методе Ньютона, методах дробления решений. Представлены результаты численных экспериментов.

1. Постановка задачи

Пусть вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ характеризует перемещение торца лопатки в выбранной системе координат. Обозначим через c_i ($i = 1, \dots, n$) цифровой код i -го измерительного канала системы измерения.

Для эталонных значений $x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj}$ координатных составляющих перемещений торца лопатки в результате N измерений получена таблица

$$T = \{c_{ij}, x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj} \mid j = 1, \dots, N, i = 1, \dots, n\}$$

значений цифровых кодов c_{ij} . На основе данной таблицы экспериментальных данных производится аппроксимация градуировочной характеристики i -го измерительного канала в классе полиномиальных функций $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ вида

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k_1=0}^{K_1} \sum_{k_2=0}^{K_2} \dots \sum_{k_n=0}^{K_n} a_{(i)k_1k_2\dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}. \quad (1)$$

Для построения зависимости цифрового кода c_i от координатных составляющих x_1, x_2, \dots, x_n используется интервальный (нестатистический) подход.

Рассмотрим множество значений коэффициентов $a_{(i)k_1k_2\dots k_n}$ ($k_m = 1, \dots, K_m, m = 1, \dots, n$) полинома (1), удовлетворяющих следующим ограничениям

$$|c_{ij} - f_i(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj})| \leq \varepsilon_i,$$

где $j = 1, \dots, N$, $\varepsilon_i \geq 0$. В этом множестве отыскиваются такие значения коэффициентов $a_{(i)k_1k_2\dots k_n}$, при которых достигается минимум величины ε_i , т.е. решается задача математического программирования

$$\begin{array}{ll} \text{найти минимум} & \varepsilon_i \\ \text{при ограничениях} & |c_{ij} - f_i(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj})| \leq \varepsilon_i, \\ & j = 1, \dots, N \end{array}$$

Найденные значения $a_{(i)k_1k_2\dots k_n}$ и ε_i определяют интервальный полином $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ вида

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = [-\varepsilon_i, \varepsilon_i] + \sum_{k_1=0}^{K_1} \sum_{k_2=0}^{K_2} \dots \sum_{k_n=0}^{K_n} a_{(i)k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}, \quad (2)$$

свободный член которого $a_{(i)00\dots 0} = [-\varepsilon_i, \varepsilon_i] + a_{(i)00\dots 0} = [a_{(i)00\dots 0} - \varepsilon_i, a_{(i)00\dots 0} + \varepsilon_i]$. Под интервальным полиномом $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ будем понимать множество вещественных полиномов $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, свободный член которого принимает любое значение из интервала $a_{(i)00\dots 0}$.

Для вычисления координатных составляющих перемещений торца лопатки, соответствующих значениям цифровых кодов, получаемых в ходе измерений, необходимо решить интервальную систему полиномиальных уравнений

$$F(X) = C, \quad (3)$$

где $F(X) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n))^T$ – вектор интервальных полиномов (2). Значения цифровых кодов $C = (c_i) \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n$ с учетом погрешностей измерения задаются интервалами $c_i = [\underline{c}_i, \bar{c}_i]$.

Преобразуем интервальную систему уравнений (3) к виду $F(X) - C = 0$. Определим функцию $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, зависящую от некоторого параметра $P = (p_i) \in \mathbb{R}^n$, принимающего значения из многомерного интервала $P = (p_i) \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n$, компоненты которой имеют вид

$$\varphi_i(X, p_i) = \sum_{k_1=0}^{K_1} \sum_{k_2=0}^{K_2} \dots \sum_{k_n=0}^{K_n} a_{(i)k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} + p_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4)$$

где $p_i \in p_i = [-\varepsilon_i, \varepsilon_i] - c_i$. Тогда интервальную систему (3) можно представить в виде

$$\varphi_i(X, p_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{или} \quad \Phi(X, P) = 0, \quad (5)$$

где $\varphi_i(X, p_i)$ – интервальное расширение функции (4) на интервале p_i , $\Phi = (\varphi_1(X, p_1), \dots, \varphi_n(X, p_n))^T$, $P = (p_1, \dots, p_n)^T$.

Множество решений интервальной системы (5) определим как

$$\mathcal{E}(\Phi, P) = \{X \in \mathbb{R}^n | (\exists P \in P)(\Phi(X, P) = 0)\}. \quad (6)$$

Задача состоит в нахождении внешней оценки множества (6), т.е. наименьшего бруса $V \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n$, содержащего это множество. Нас также будет интересовать задача внутреннего оценивания множества (6) или, иными словами, нахождения наибольшего интервального вектора $U \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n$, содержащегося во множестве решений интервальной системы (5).

2. Внешняя интервальная оценка множества многомерных перемещений

Для внешнего оценивания множества (6) можно использовать интервальный метод Ньютона [2]–[4]. Пусть $X = x_1 \times \dots \times x_n \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n$ – брус, на котором будем искать решение системы (5). Итерационный алгоритм метода Ньютона на основе наклонов определим следующим образом

$$\begin{cases} X^{(0)} := X, \\ X^{(k+1)} := X^{(k)} \cap \mathcal{N}(X^{(k)}, X^{(k)}, P), \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (7)$$

где $\mathcal{N}(X^{(k)}, X^{(k)}, P) = X_0 + \text{Encl}(\Phi^{\angle}(X^{(k)}, X^{(k)}, P), -\Phi(X^{(k)}, P))$, $X^{(k)}$ – середина бруса $X^{(k)}$, $\Phi^{\angle}(X^{(k)}, X^{(k)}, P)$ – интервальный наклон функции $\Phi(X, P)$ на брус

$\mathbf{X}^{(k)} \times \mathbf{P}$ относительно точки $\mathbf{X}^{(k)}$, $Encl(\Phi^{\leftarrow}(\mathbf{X}^{(k)}, \mathbf{X}^{(k)}, \mathbf{P}), -\Phi(\mathbf{X}^{(k)}, \mathbf{P}))$ – внешняя оценка множества решений интервальной линейной системы уравнений

$$\Phi^{\leftarrow}(\mathbf{X}^{(k)}, \mathbf{X}^{(k)}, \mathbf{P})(\mathbf{X} - \mathbf{X}^{(k)}) = -\Phi(\mathbf{X}^{(k)}, \mathbf{P}), \quad (8)$$

полученная с помощью некоторой фиксированной процедуры $Encl$.

Итерационный процесс (7) продолжаем до тех пор, пока расстояние между $\mathbf{X}^{(k)}$ и $\mathbf{X}^{(k+1)}$ не меньше некоторой малой величины $\delta > 0$. В качестве процедуры $Encl$ решения интервальной системы линейных уравнений (8) применяем метод Хансена-Сенгупты [5].

Известно, что многомерный метод Ньютона работает неэффективно на большом исходном брус \mathbf{X} , поскольку не приводит к значительному сужению этого бруса особенно в случае, когда вычисленный на \mathbf{X} интервальный наклон $\Phi^{\leftarrow}(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}, \mathbf{P})$ является особенной матрицей. Поэтому наряду с методом Ньютона мы будем использовать также метод распространения ограничений на основе анализа совместности по значениям [4].

Представим левую часть i -го ($i = 1, \dots, n$) уравнения $\varphi_i(\mathbf{X}, \mathbf{p}_i) = 0$ системы (5) в виде интервального полинома $q_i(x_i) = \sum_{k_i=0}^{K_i} q_{k_i} x_i^{k_i} + p_i$ относительно переменной x_i , коэффициенты которого q_{k_i} есть интервальные расширения полиномов

$$q_{k_i} = \sum_{k_1=0}^{K_1} \dots \sum_{k_{i-1}=0}^{K_{i-1}} \sum_{k_{i+1}=0}^{K_{i+1}} \dots \sum_{k_n=0}^{K_n} a_{(i)k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} \dots x_{i-1}^{k_{i-1}} x_{i+1}^{k_{i+1}} \dots x_n^{k_n}.$$

Тогда i -е уравнение примет вид полиномиального интервального уравнения $q_i(x_i) = 0$ степени K_i относительно переменной x_i . Известно, что полином с интервальными коэффициентами можно ограничить двумя вещественными полиномами [6]. Найдем для $q_i(x_i)$ вещественные полиномы $q_i^l(x_i)$ и $q_i^h(x_i)$ ограничивающие его снизу и сверху соответственно. Вычислим наименьший действительный корень x_i^l уравнения $q_i^l(x_i) = 0$ и наибольший действительный корень x_i^h уравнения $q_i^h(x_i) = 0$. В качестве внешней оценки множества решений уравнения $q_i(x_i) = 0$ на интервале x_i возьмем $\hat{x}_i = [x_i^l, x_i^h] \cap x_i$. Если найденный таким образом брус $\hat{\mathbf{X}} = \hat{x}_1 \times \dots \times \hat{x}_n$ не пуст, то он содержит множество решений системы (5) и в случае $\hat{\mathbf{X}} \subset \mathbf{X}$ является его более точной внешней оценкой.

В процедуре анализа совместности по значениям мы использовали интервальные расширения полиномов n переменных вида $Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k_1=0}^{K_1} \sum_{k_2=0}^{K_2} \dots \sum_{k_n=0}^{K_n} a_{k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$ на брус $\mathbf{X} = x_1 \times \dots \times x_n$. Для их вычисления представим полином Q как полином степени K_1 относительно переменной x_1 с коэффициентами, являющимися полиномами $n-1$ переменных, которые представляем как полиномы степени K_2 относительно переменной x_2 и т.д. пока не получим полиномы степени K_n относительно переменной x_n с вещественными коэффициентами. Вычислив интервальные расширения вещественных полиномов на интервале x_n и подставив их в качестве коэффициентов полиномов относительно переменной x_{n-1} , получим соответствующие интервальные полиномы. Чтобы оценить множество значений интервального полинома, вычисляем интервальные расширения ограничивающих его вещественных полиномов и находим их объединение. Далее аналогичным образом оцениваем множества значений интервальных полиномов относительно x_{n-2} на x_{n-2} и т.д. В конечном итоге получаем интервальное расширение Q на брус \mathbf{X} .

Отметим, что данную процедуру внешнего оценивания множества значений полинома мы используем также для нахождения на каждом шаге метода Ньютона интервального многомерного наклона $\Phi^{\leftarrow}(X^{(k)}, X^{(k)}, P)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Для повышения эффективности описанных выше методов целесообразно дробить исходный брус на более мелкие подбрусы, которые будем хранить в рабочем списке \mathcal{L} . Опишем общую схему алгоритма дробления брусов и усечения полученных подбрусов на основе метода Ньютона и анализа совместности по значениям.

Шаг 1.1. Заносим исходный брус X в список \mathcal{L} в качестве его первой записи. Изначально искомый брус V , являющийся внешней оценкой множества решений системы (5), пуст.

Шаг 1.2. Если список \mathcal{L} пуст, то переходим на шаг 1.4, в противном случае извлекаем из \mathcal{L} первую запись. Обозначим извлеченный брус через Y . Удаляем первую запись из \mathcal{L} . Если максимальная ширина компонент бруса Y меньше заданной малой величины $\varepsilon > 0$, то присваиваем $V := \square V \cup Y$ и переходим на шаг 1.2 (здесь $\square S$ – интервальная оболочка множества S).

Шаг 1.3. Применяем к брусу Y процедуру усечения, алгоритм которой приводим ниже. Если полученный в результате этой процедуры брус Z пуст, то переходим на шаг 1.2. В противном случае дробим Z на два бруса Z' и Z'' , разбивая его самую широкую компоненту пополам. Если максимальная ширина компонент бруса Z' не меньше ε , то заносим брус Z' в список \mathcal{L} . Аналогично поступаем с брусом Z'' .

Шаг 1.4. Принимаем брус V в качестве искомой внешней оценки и заканчиваем работу алгоритма.

Опишем теперь процедуру усечения бруса Y . Наибольшее усечение бруса следует ожидать по той компоненте, изменение которой приводит к наибольшему изменению функции $\Phi(X, P)$. В качестве такой компоненты для бруса Y можно выбрать j -ую компоненту ($j = 1, \dots, n$), для которой максимальна величина $\text{wid} y_j \cdot \sum_{i=1}^n |\varphi_{ij}^{\leftarrow}(Y, \tilde{Y}, P)|$, где $\tilde{Y} = \text{mid } Y$. Далее найдем как можно более точные оценки j -ой координаты множества решений системы (5) на брусе Y , т.е. как можно более точные оценки снизу для $\min\{x_j \mid x \in \mathcal{E}(\Phi, P) \cap Y\}$ и сверху для $\max\{x_j \mid x \in \mathcal{E}(\Phi, P) \cap Y\}$. Результатом процедуры усечения бруса Y по j -ой компоненте будет брус $Z := (y_1, \dots, y_{j-1}, [\xi_j, \psi_j], y_{j+1}, \dots, y_n)^T$.

Ниже приводим алгоритм нахождения оценки ξ_j для $\min\{x_j \mid x \in \mathcal{E}(\Phi, P) \cap Y\}$.

Шаг 2.1. Присваиваем $k := 0$, $\xi_j^{(0)} := \underline{y}_j$, $Q = Y$.

Шаг 2.2. Если $\text{wid } q_j < \varepsilon$, то переходим на шаг 2.6, иначе дробим брус Q по j -ой компоненте на два подбруса

$$Q' = (q_1, \dots, q_{j-1}, [\underline{q}_j, \text{mid } q_j], q_{j+1}, \dots, q_n)^T, \quad (16)$$

$$Q'' = (q_1, \dots, q_{j-1}, [\text{mid } q_j, \bar{q}_j], q_{j+1}, \dots, q_n)^T. \quad (17)$$

Шаг 2.3. Проверяем, существует ли решение на брусе Q' , т.е. содержат ли 0 все компоненты интервального расширения $\Phi(Q', P)$. Если брус Q' не содержит точек из множества $\mathcal{E}(\Phi, P)$ решений системы (5), то присваиваем $Q := Q''$ и переходим на шаг 2.2.

Шаг 2.4. Применяем к брусу Q' метод Ньютона и процедуру анализа совместности по значениям. Полученный брус присваиваем Q' . Если Q' пуст, то $Q := Q''$ и переходим на шаг 2.2.

Шаг 2.6. Присваиваем $\xi_j := \xi_j^{(k)}$ и заканчиваем работу алгоритма.

Аналогичным образом находим оценку ψ_j для $\max\{x_j \mid x \in \mathcal{E}(\Phi, P) \cap Y\}$.

3. Внутренняя интервальная оценка множества многомерных перемещений

Пусть $X^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in X$, например, $X^* = \text{mid } X$. Найдем для некоторого $k = 1, \dots, n$ ближайший к точке X^* отрезок прямой, проходящей через эту точку параллельно k -ой оси координат и принадлежащий множеству $\mathcal{E}(\Phi, P) \cap X$. Данная прямая описывается системой уравнений

$$x_j = x_j^*, \quad j = 1, \dots, n, \quad j \neq k. \quad (18)$$

Подставив (18) в (5), получим интервальную систему полиномиальных уравнений относительно переменной x_k

$$\varphi_i(x_1^*, \dots, x_{k-1}^*, x_k, x_{k+1}^*, \dots, x_n^*, p_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (19)$$

Если множество решений i -го уравнения системы (19) не пусто, вычислим ближайший к x_k^* интервал r_i , принадлежащий этому множеству и интервалу x_k . В противном случае прямая (18) не пересекает $\mathcal{E}(\Phi, P) \cap X$.

Искомый отрезок задается соотношениями: $\underline{r} \leq x_k \leq \bar{r}$, $x_j = x_j^*$, где $j \neq k$, $r = \bigcap_{i=1}^n r_i$. Если ни одна из прямых, проходящих через точку X^* параллельно осям координат, не пересекает множество $\mathcal{E}(\Phi, P) \cap X$, то необходимо выбрать другую точку X^* , например, найти некоторое приближение решения системы уравнений $\Phi(X, \text{mid } P) = 0$.

Далее интервал $[\underline{r} + \varepsilon, \bar{r} - \varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$, разбиваем на m непересекающихся подынтервалов, $\mathbf{d}^{(s)}$, $s = \overline{1, m}$, одинаковой ширины, таких что $\bigcup_{s=1}^m \mathbf{d}^{(s)}$. Для каждого интервала $\mathbf{d}^{(s)}$ вычислим брус $\mathbf{U}^{(s)} \subseteq \mathbb{I}\mathbb{R}^n$, который является внутренней оценкой множества $\mathcal{E}(\Phi, P) \cap X$.

Положим, что k -ая компонента $\mathbf{U}^{(s)}$ есть интервал $\mathbf{d}^{(s)}$, т.е. $\mathbf{u}_k^{(s)} = \mathbf{d}^{(s)}$. Остальные компоненты $\mathbf{u}_j^{(s)}$, $j = \overline{1, n}$, $j \neq k$, определим следующим образом. Находим отрезки прямых, проходящих через точки $(x_1^*, \dots, x_{k-1}^*, \underline{\mathbf{d}}^{(s)}, x_{k+1}^*, \dots, x_n^*)$ и $(x_1^*, \dots, x_{k-1}^*, \bar{\mathbf{d}}^{(s)}, x_{k+1}^*, \dots, x_n^*)$ параллельно j -ой оси координат и принадлежащие множеству $\mathcal{E}(\Phi, P) \cap X$ так, как это было описано выше. Пусть j -ая координата точек первого отрезка удовлетворяет неравенствам $t_1^l \leq x_j \leq t_1^h$, второго отрезка – неравенствам $t_2^l \leq x_j \leq t_2^h$. Тогда искомая j -ая компонента бруса $\mathbf{U}^{(s)}$ равна $\mathbf{u}_j^{(s)} = [\max\{t_1^l, t_2^l\}, \min\{t_1^h, t_2^h\}]$.

Данную процедуру можно многократно повторять, выбирая в качестве начальной точки X^* середины граней брусков $\mathbf{U}^{(1)}$ и $\mathbf{U}^{(m)}$, проходящих через точки $(x_1^*, \dots, x_{k-1}^*, \underline{\mathbf{d}}^{(1)}, x_{k+1}^*, \dots, x_n^*)$ и $(x_1^*, \dots, x_{k-1}^*, \bar{\mathbf{d}}^{(m)}, x_{k+1}^*, \dots, x_n^*)$ соответственно перпендикулярно j -ой оси координат.

4. Результаты численных экспериментов

Представленные в работе алгоритмы были реализованы в программной системе Matlab, дополненной пакетом интервального расширения INTLAB 5.5. Мы провели ряд численных экспериментов для различных семейств градуировочных характеристик, полученных в результате идентификации интервальной регрессии.

Представим результаты внешнего и внутреннего оценивания множества двумерных перемещений торца лопатки, семейства градуировочных характеристик которых имеют вид

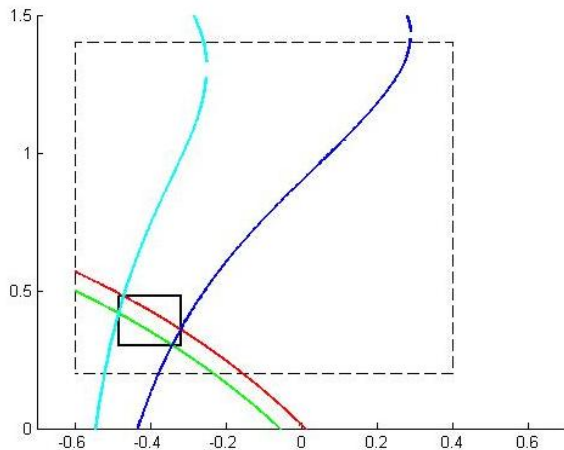
$$f_i(x_1, x_2) = [-\varepsilon_i, \varepsilon_i] + \sum_{k_1=0}^2 \sum_{k_2=0}^2 a_{(i)k_1k_2} x_1^{k_1} x_2^{k_2}, \quad i = 1, 2,$$

где

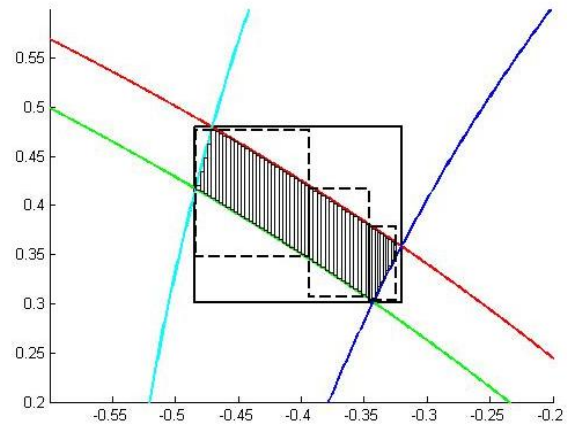
$a_{(1)00} = 2562.3632$	$a_{(2)00} = 3045.7782$
$a_{(1)01} = -221.0272$	$a_{(2)01} = -218.5782$
$a_{(1)02} = 70.5782$	$a_{(2)02} = 80.1020$
$a_{(1)10} = -297.6301$	$a_{(2)10} = 317.1479$
$a_{(1)11} = 301.4891$	$a_{(2)11} = -342.3596$
$a_{(1)12} = -93.0325$	$a_{(2)12} = 112.5637$
$a_{(1)20} = 58.3290$	$a_{(2)20} = 30.1870$
$a_{(1)21} = -88.8764$	$a_{(2)21} = 10.7886$
$a_{(1)22} = 36.0065$	$a_{(2)22} = -19.9298$
$\varepsilon_1 = 5$	$\varepsilon_1 = 8$

На рисунке 1а) пунктирной линией изображен исходный брус $X = [-0.6, 0.6] \times [0, 2, 1.5]$, цветными линиями показаны границы множества $E(\Phi, P)$ решений системы, сплошной черной линией изображена внешняя оценка $V = [-0.4840, -0.3199] \times [0.3016, 0.4797]$ этого множества.

На рисунке 1б) сплошной черной линией изображены внутренние оценки множества решений $E(\Phi, P)$, цветными линиями показаны границы этого множества, пунктирной линией изображены интервальные оболочки внутренних оценок, полученных в результате трех итераций описанного в §3 алгоритма $U_1 = [-0.4834, -0.3938] \times [0.3478, 0.4766]$, $U_2 = [-0.3938, -0.3456] \times [0.3068, 0.4175]$, $U_3 = [-0.3457, -0.3241] \times [0.3039, 0.3783]$.



а) внешняя оценка множества решений



б) внутренние оценки множества решений

Рисунок 1. Результаты внешнего и внутреннего оценивания множества решений интервальной системы полиномиальных уравнений

Список литературы

1. Подружко А.А., Подружко А.С. Интервальное представление полиномиальных регрессий. – Едиториал УРСС, 2003.
2. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. – М.: Мир, 1987.
3. Жолен Л., Кифер М., Дидри О., Вальтер Э. Прикладной интервальный анализ. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005.
4. Хансен Э., Уолстер Дж. У. Глобальная оптимизация с помощью методов интервального анализа. – М.– Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2012.

5. Hansen E., Sengupta S. Bounding solutions of systems of equations using interval analysis // BIT. –1981. –Vol.21. – P. 203-211.
6. Van Henteryck P., McAllester D., Kapur D. Solving Polynomial Systems Using a Branch and Prune Approach // SIAM J. Num. Anal. – 1997. – Vol. 34, No. 2. – P. 797-827.