

Решение двумерной эллиптической краевой задачи в области с микровключениями многомасштабным методом Галеркина

Добролюбова Дарья Владимировна
Новосибирский государственный технический университет

Введение

Многомасштабность – характерная особенность как природных, так и искусственно созданных объектов. Например, геометрическая многомасштабность присутствует в задачах исследования свойств композитных материалов и нано-материалов, процессов, протекающих в пористых средах, турбулентных течений с большим числом Рейнольдса.

При решении таких задач необходимо учитывать неоднородную структуру среды, чтобы получить решение, соответствующее физике протекающего процесса. Это позволяют сделать методы класса multiscale.

На сегодняшний день можно перечислить множество таких методов: обобщенный метод конечных элементов (generalized FEM) [2], численная гомогенизация на основе вэйвлетов [8], вариационные многомасштабные методы [7, 9, 10], гетерогенные многомасштабные методы [6, 9], upscaling методы [1] и др.

Рассматриваемый в данной работе многомасштабный метод конечных элементов (MsFEM) берет свое начало в работе Babuska и Osborn [3], в которой авторы предлагают использование многомасштабных базисных функций для эллиптических уравнений с многомасштабным коэффициентом. Этот подход был обобщен в работе Hou и Wu [7] на более широкий класс задач с неоднородностью среды. Hou и Wu [7] также исследовали влияние выбора краевых условий (линейных или осциллирующих) для построения многомасштабных базисных функций на точность метода. Позднее, MsFEM был обобщен на нелинейные задачи [4].

Постановка задачи

Рассматривается задача о распределении напряженности стационарного электрического поля \vec{E} в непроводящей среде с микровключениями.

Математическая модель

Математическая модель имеет вид

$$-\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} U) = \rho \text{ в } \Omega, \quad (1)$$

где Ω – двумерная расчетная область, U – скалярный потенциал электрического поля, ε – диэлектрическая проницаемость, ρ – плотность электрических зарядов.

На границе $\partial\Omega_1 = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ области моделирования задано краевое условие Дирихле:

$$U|_{\Gamma_1} = U_{g_1},$$

$$U|_{\Gamma_2} = U_{g_2}.$$

На границе $\partial\Omega_2 = \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ задано краевое условие Неймана:

$$\varepsilon \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega_2} = 0$$

Диэлектрическая проницаемость определяется следующим образом:

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1 - \text{скелет}, \\ \varepsilon_2 - \text{включения}. \end{cases}$$

Вариационная постановка

Для построения вариационной формулировки введем гильбертово пространство $H^1(\Omega)$ с нормой:

$$\|u\|^2 = \int_{\Omega} u \cdot u d\Omega + \int_{\Omega} \text{grad}u \cdot \text{grad}u d\Omega.$$

и скалярным произведением:

$$(u, v) = \int_{\Omega} u \cdot v d\Omega + \int_{\Omega} \text{grad}u \cdot \text{grad}v d\Omega,$$

Определим пространство $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ – как множество функций из $H^1(\Omega)$, удовлетворяющих однородным условиям Дирихле на границе $\partial \Omega_1$ области Ω .

Вариационная формулировка задачи (1) имеет вид:

Найти $U \in U_g + H_0^1(\Omega)$ такое, что для $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ выполняется:

$$\int_{\Omega} \varepsilon \text{grad}U \cdot \text{grad}v d\Omega = \int_{\Omega} \rho v d\Omega,$$

Разобьем область моделирования Ω на N непересекающихся элементов Ω_K так, как показано на рисунке 1. Это разбиение \mathcal{T}_h назовем грубой сеткой или макро-сеткой. На рисунке 1 приведен фрагмент области Ω , состоящий из четырех элементов грубого разбиения.

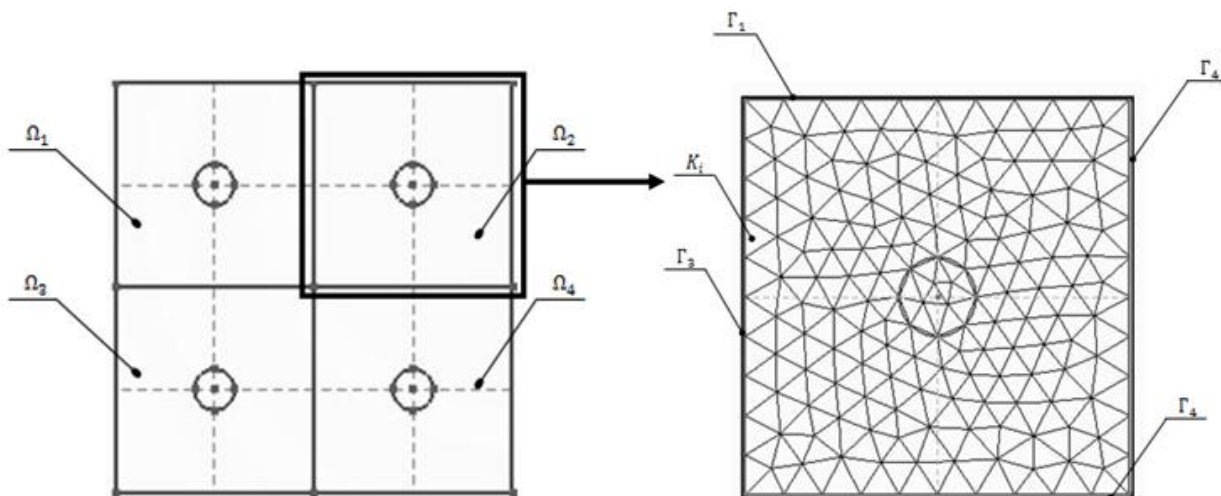


Рисунок 1 – Дискретизация фрагмента области Ω

Введем конечноэлементное пространство $P_h(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, определив базисные функции ψ_i^k на каждом макроэлементе Ω_K , $P_h(\Omega) = span\{\psi_i^k\}$. Тогда дискретная вариационная постановка выглядит следующим образом:

Найти $u_h \in P_h(\Omega)$ такое, что $\forall v_h \in P_h(\Omega)$ выполняется:

$$\sum_K \int_{\Omega_K} \varepsilon grad u_h \cdot grad v_h d\Omega_K = \sum_K \int_{\Omega_K} \rho v_h d\Omega_K.$$

Многомасштабные базисные функции

Рассмотрим макроэлемент Ω_K области Ω , представленный на рисунке 1. Многомасштабные базисные функции ψ_i^k на макроэлементе Ω_K определяются следующим образом: базисная функция ψ_i^k равна единице в i -м узле макроэлемента и нулю в остальных его узлах и удовлетворяет однородной задаче:

$$L \psi_i^k = 0 \quad \text{на } \Omega_K \in \mathcal{T}_h, \quad (2)$$

$$\psi_i^k|_{\partial\Omega_K} = \varphi_i^0.$$

где L - эллиптический оператор (1), φ_i^0 - стандартные кусочно-линейные базисные функции, определенные в узлах разбиения \mathcal{T}_h .

На макроэлементе Ω_K введем конечноэлементное разбиение τ_h . Это разбиение назовем мелкой сеткой. В каждом узле мелкого разбиения τ_h определим стандартные кусочно-линейные базисные функции φ_i . Введем пространство $V_h = span\{\varphi_i\}$.

Тогда дискретная вариационная постановка для задачи (2) в форме Галеркина имеет вид:

Найти $\psi_i^{k,h} \in H^1$ такое, что $\forall v_h \in V_h$

$$\sum_i \int_{K_i} \varepsilon grad \psi_i^{k,h} grad v_h dK_i = 0$$

Алгоритм

Многомасштабный метод конечных элементов характеризуется иерархией моделей:

- 1) математическая модель в макроэлементе;
- 2) краевые условия на границе макроэлемента;
- 3) исходная задача на грубой сетке с многомасштабными базисными функциями.

Тогда последовательность действий при решении задачи ММКЭ можно описать следующим образом [5]:

Разбиение расчетной области на макроэлементы на основе информации о макросистеме и включениях.

Для каждого макроэлемента Ω_K :

Решение редуцированной задачи для поиска краевых условий;

Решение задачи (2) – поиск многомасштабных базисных функций ψ_i^k ;

Сборка глобальной матрицы жесткости на грубой сетке.

Решение исходной задачи на грубой сетке.

Вычисление элементов a_{ij} глобальной матрицы жесткости требует вычисления следующих интегралов:

$$a_{ij} = \int_{\Omega_K} \varepsilon \text{grad} \psi_i^k \cdot \text{grad} \psi_j^k d\Omega_K$$

Для этого можно воспользоваться квадратурными формулами. Чтобы вычислить значения $\text{grad}(\psi_i^k)$ в произвольных точках макроэлемента необходимо представить многомасштабную базисную функцию как линейную комбинацию локальных линейных базисных функций на элементе мелкого разбиения, в который попадает данная точка.

Исследования

1. Верификация

Верификация разработанного алгоритма была проведена путем сравнения решений, полученных классическим МКЭ и ММКЭ в неоднородной области с различной контрастностью включений.

Таблица 1 – Решения, полученные МКЭ и ММКЭ при различных значениях ε_1 и ε_2

| $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ | FEM | time, sec | MsFEM | time, sec |
|-------------------------------|-------------------------------|-----------|-------------------------------|-----------|
| | $\frac{\ U^* - U^h\ }{\ U\ }$ | | $\frac{\ U^* - U^h\ }{\ U\ }$ | |
| 1,00E-01 | 3,8697312E-04 | 0,1240 | 3,5007153E-04 | 0,0590 |
| 1,00E-02 | 4,6509578E-04 | 0,0128 | 4,1375736E-04 | 0,0598 |
| 1,00E-03 | 4,7089269E-04 | 0,1030 | 4,7016642E-04 | 0,0620 |
| 1,00E-04 | 4,9000972E-04 | 0,1260 | 4,3922520E-04 | 0,0558 |
| 1,00E-05 | 4,7639618E-04 | 0,1020 | 5,2877791E-04 | 0,0550 |

В данном случае U^* – решение, полученное методом конечных элементов на более мелкой сетке. Относительная погрешность оценивается по формуле:

$$\frac{\|U^* - U^h\|}{\|U^*\|} = \frac{\sqrt{\sum_i (U_i^* - U_i^h)^2}}{\sqrt{\sum_i (U_i^*)^2}}, \quad (3)$$

Из таблицы 1 видно, что MsFEM и FEM имеют в данном случае практически одинаковую погрешность. Полученные результаты согласуются с результатами, представленными в работе [7].

На рисунке 2 представлен вид многомасштабной базисной функции ψ_3^k на одном из макроэлементов в случае, когда в каждом макроэлементе содержится девять включений, диэлектрическая проницаемость скелета $\varepsilon_1 = 1$, а диэлектрическая проницаемость включений $\varepsilon_2 = 1 \cdot 10^{-4}$. На нем хорошо видно, что многомасштабная базисная функция учитывает наличие включений внутри макроэлемента.

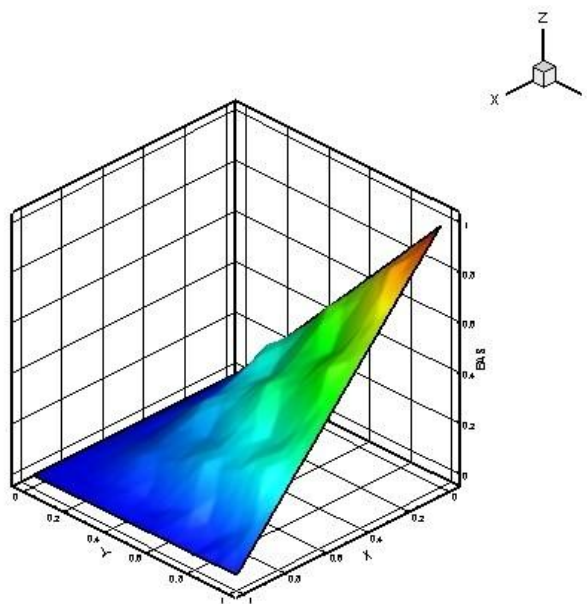


Рисунок 2 – Многомасштабная базисная функция ψ_3^k ,
 $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 1 \text{E} - 4$

2. Исследование влияния выбора квадратурных формул на точность и время решения

Для областей с различными объемными соотношениями и количеством включений были выполнены исследования по выбору квадратурной формулы, обеспечивающей заданную точность. В результате исследования было выяснено, что при использовании различных квадратурных формул погрешность решения различается незначительно. В таблице 2 представлено изменение точности решения задачи в зависимости от выбранной формулы численного интегрирования для случая, когда в каждом макроэлементе содержится девять включений.

Использованы следующие обозначения:

- N – общее число узлов интегрирования;
- time, sec – время работы программы в секундах;
- Формула Гаусса, n – формула Гаусса численного интегрирования для n узлов.

Относительная погрешность решения вычисляется по формуле (3).

Таблица 2 – Изменение точности решения в зависимости от выбранной формулы численного интегрирования при решении задачи (1)

| N | Формула трапеций | time, sec | Формула Гаусса, n = 2 | time, sec | Формула Гаусса, n = 3 | time, sec | Формула Гаусса, n = 5 | time, sec |
|-----|------------------|-----------|-----------------------|-----------|-----------------------|-----------|-----------------------|-----------|
| 16 | 4,5586704E-04 | 0,0535 | 1,2075039E-03 | 0,0543 | | | | |
| 25 | 9,6170422E-04 | 0,0420 | | | | | 4,4877638E-04 | 0,0545 |
| 36 | 1,2285647E-03 | 0,0548 | 1,2110632E-02 | 0,0590 | 4,5796092E-04 | 0,0563 | | |
| 81 | 4,8805247E-04 | 0,0565 | | | 4,4033428E-04 | 0,0573 | | |
| 100 | 2,8795954E-03 | 0,0545 | 3,4122647E-03 | 0,0615 | | | 5,9368478E-04 | 0,0608 |
| 144 | 4,7108007E-04 | 0,0600 | 1,9007415E-03 | 0,0613 | 6,0826664E-04 | 0,0610 | | |
| 196 | 1,4117606E-03 | 0,0603 | 5,7309544E-03 | 0,0678 | | | | |
| 225 | 5,7396863E-04 | 0,0608 | | | 4,3503041E-03 | 0,0615 | 7,1533964E-04 | 0,0648 |
| 256 | 9,9183943E-04 | 0,0615 | 6,8814716E-04 | 0,0638 | | | | |
| 324 | 5,9931012E-04 | 0,0640 | 4,8177263E-04 | 0,0655 | 4,3461148E-04 | 0,0693 | | |
| 400 | 6,0332836E-04 | 0,0668 | 4,7481540E-04 | 0,0698 | | | 1,0164128E-03 | 0,0673 |

Список литературы

1. Arbogast, T. Numerical subgrid upscaling of two-phase flow in porous media / T. Arbogast // Lecture Notes in Physics. – 1999. – vol. 552. – С. 35-49.
2. Babushka, I. Generalized finite element methods: Their performance and their relation to mixed methods / I. Babushka, E. Osborn // Numer. Anal.. – 1983. – 20. – С. 510-536.
3. Babuska, I. Special finite element methods for a class of second order elliptic problems with rough coefficients / I. Babuska, G. Caloz, J.E. Osborn // Numer. Anal.. – 1994. – 31. – С. 945-981.
4. Efendiev, Y. Multiscale finite element methods for nonlinear problems and their applications / Y. Efendiev, T.Y Hou, V. Ginting // Comm. Math. Sci.. – 2004. – 2. – С. 553-589.
5. Engquist, B. The heterogeneous multiscale method / B. Engquist // Comm. Math. Sci.. – 2003. – vol. 1, no 1. – С. 87-132.
6. Efendiev, Y. Multiscale finite element methods. Theory&application / Y. Efendiev, T. Hou. – NY : Springer, 2009. – 241 с. – (Surveys and Tutorials in the Applied Mathematical Sciences ; vol. 4).
7. Hou, T.Y. A Multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media. / T.Y. Hou, X.H. Wu // Comput. Phys.. – 1997. – 134. – С. 169-189.
8. Копысов, С.П. Об одном методе определения эффективных упругих характеристик композитов с помощью вейвлет-преобразования / С.П. Копысов, Ю.А. Сагдеева // Интеллектаульные системы в производстве. – 2007. – номер 1. – С. 49-62.
9. Страховская, Л.Г. Об одной специальной разностной схеме / Л.Г. Страховская, Р.П. Федоренко // Численные методы механики сплошной среды. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1976. – Т.7. №4. – С. 149-163.
10. Шокин, Ю.И. Современные многосеточные методы. Часть I. Многомасштабные методы / Ю.И. Шокин, Э.П. Шурина, Н.Б. Иткина. – Новосибирск : НГТУ, 2010. – 68 с.