Математическое моделирование процесса диффузии в области с контрастными включениями на базе разрывного метода Галёркина

Марков Сергей Игоревич
Новосибирский государственный технический университет (Новосибирск), Россия
e-mail: www.sim91@list.ru

Актуальные на данный момент задачи исследования свойств процессов, протекающих в неоднородных средах, таких как эксплуатация газонефтяных месторождений, распределение тепловых и электромагнитных полей, требуют не только физически релевантного решения, но и оптимального его достижения в силу ограниченности вычислительных ресурсов компьютеров.

Одним из подходов, применяемых для моделирования таких процессов, является метод конечных элементов. В отличие от непрерывного метода Галёркина разрывный метод обладает свойством локальной консервативности, выраженной в том, что решение определяется независимо на каждом конечном элементе с согласованием поведения решения на межэлементной границе (в соответствие с теоремой Тихонова о следах функций) с помощью специальных лифтинг-операторов. Такая стратегия позволяет оптимально применять *p*-*h*-технологию для повышения аппроксимирующих свойств решения, а также работать с несогласованными сетками. Однако наряду с положительными качествами метода следует отметить значительное увеличение степеней свободы (размерность СЛАУ) в отличие от непрерывной постановки Галёркина. Данная проблема решается либо распараллеливанием метода, либо использованием многомасштабной постановки.

Вариационная постановка метода

Рассмотрим двумерную замкнутую область $\Omega \subset R^2$ в декартовых координатах (x, y) с границей $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, где $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \varnothing$. Диффузионный процесс описывается уравнением

$$-\nabla \cdot (\lambda \nabla u(x,y)) = f(x,y), \text{ в области } \Omega \subset R^2 \tag{1}$$

с краевыми условиями Дирихле и Неймана:

$$u\big|_{\Gamma_D} = g_D, \tag{2}$$

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_N} = g_N, \tag{3}$$

Перейдём от уравнения (1) к системе уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \sigma = \nabla u, \\ -\nabla \cdot (\lambda \sigma) = f, \end{cases} \tag{4}$$

$$u\big|_{\Gamma_D} = g_D, \tag{5}$$

$$\lambda \sigma \cdot n\big|_{\Gamma_N} = g_N, \tag{6}$$

где n – вектор внешней нормали.
Введем разбиение области $\Omega : \Xi_h = \{K\}$ с границей $\Gamma = \bigcup_{K \in \Xi} \partial K$, под K понимается конечный элемент. Для каждого $K \in \Xi_h$ обозначим через p наивысшую локальную степень полиномов. Конечноэлементные пространства определяются в виде [1]:

$$V_h = \left\{ v \in L_2(\Omega) : v\big|_K = P_p(K) - \text{ полиномы степени не больше } p \right\}, \tag{7}$$

$$\Sigma_h = \left\{ \tau \in [L_2(\Omega)]^2 : v\big|_K = [P_p(K)]^2 - \text{векторное пространство} \right\} \tag{8}$$

Решение $u(x,y)$ внутри каждого конечного элемента решение представляется непрерывной функцией

$$u(x,y)=\sum_{i=1}^{4}q_i\Psi_i(x,y) \tag{9}$$

где $\Psi_i(x,y)$ - базисная функция, ассоциированная с i-ым узлом конечного элемента.

Скалярно умножим каждое уравнение системы (4) на тестовые функции из пространств (7) и (8) соответственно на конечном элементе. Применив первую формулу Грина, получим

$$\begin{cases}\int\limits_K \sigma\cdot\tau dK=\int\limits_K \nabla u\cdot\tau dK, \forall\in\tau\in\Sigma_h,\\ -\int\limits_K(\nabla\cdot\lambda\sigma)vdK=\int\limits_K fvdK,\ \forall v\in V_h,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\int\limits_K \sigma\cdot\tau dK=-\int\limits_K u\nabla\cdot\tau dK+\int\limits_{\partial K}un_K\cdot\tau dS,\\ \int\limits_K \lambda\sigma\cdot\nabla vdK=\int\limits_K fvdK+\sum\limits_K\int\limits_{\partial K}\lambda\sigma\cdot\ n_K vdS,\end{cases} \tag{10}$$

где n_K - вектор внешней нормали.

Необходимо аппроксимировать σ и u на конечном элементе функциями $u_h\in V_h$ и $\sigma_h\in\Sigma_h$. Просуммировав результат по всей расчетной области, получим:

$$\begin{cases}\int\limits_\Omega \sigma_h\cdot\tau d\Omega=-\int\limits_\Omega u_h\nabla_h\cdot\tau d\Omega+\sum\limits_K\int\limits_{\partial K}\hat{u}_K n_K\cdot\tau dS, \forall\tau\in\Sigma_h,\\ \int\limits_\Omega \lambda\sigma_h\cdot\nabla_h vd\Omega=\int\limits_\Omega fvd\Omega+\sum\limits_K\int\limits_{\partial K}\lambda\hat{\sigma}_K\cdot\ n_K vdS, \forall v\in V_h,\end{cases} \tag{11}$$

где $\hat{u}_K,\hat{\sigma}_K$ - «численные потоки», аппроксимирующие $u,\sigma=\nabla u$ на $\partial\Omega$.

Для доопределения решения на границе конечных элементов введём следы функций $v\in V_h$ и $\tau\in\Sigma_h$ [1] на $\partial\Omega$:

$$v_K=\lim_{\varepsilon\to 0}v(x-\varepsilon n_K),\ \text{на }\partial\Omega, \tag{12}$$

$$\tau_K=\lim_{\varepsilon\to 0}\tau(x-\varepsilon n_K)\ \text{на }\partial\Omega, \tag{13}$$

где ε – малое число.

Введём обозначение $e_{\text{int}}\in\Gamma$ - внешнее ребро конечного элемента, $e_{bnd}\in\Gamma^0$ - внутреннее и определим операторы следа.

Операторы среднего:

$$\{\text{v}\}=\frac{1}{2}(v_i+v_j)\ \text{на } e_{\text{int}}, \tag{14}$$

$$\{\text{v}\}=v_i\ \ \text{на } e_{bnd}, \tag{15}$$

$$\{\tau\}=\frac{1}{2}(\tau_i+\tau_j)\ \text{на } e_{\text{int}}, \tag{16}$$

$$\{\tau\}=\tau_i\ \text{на } e_{bnd}, \tag{17}$$

Операторы скачка:

$$[\text{v}]=v_i\,n_i+v_j n_j\ \text{ на } e_{\text{int}}, \tag{18}$$

$$[\text{v}]=v_i\,n_i\ \text{ на } e_{bnd}, \tag{19}$$

$$[\tau]=\tau_i\,n_i+\tau_j n_j\ \text{ на } e_{\text{int}}, \tag{20}$$

$$[\tau]=v_i\,n_i\ \text{ на } e_{bnd}, \tag{21}$$

Воспользуемся фактом, что $\forall q\in T(\varGamma),\forall\varphi\in\left[T(\varGamma)\right]^2$, верно

$$\sum_K\int\limits_{\partial K}q_K\varphi_K\cdot n_K dS=\int\limits_{\varGamma}[q]\cdot\{\varphi\}dS+\int\limits_{\varGamma^0}[\varphi]\cdot\{q\}dS, \tag{22}$$

и запишем систему (11) в виде

$$\begin{cases} \int\limits_{\Omega} \sigma_h \cdot \tau d\Omega = -\int\limits_{\Omega} u_h \nabla_h \cdot \tau d\Omega + \int\limits_{\Gamma} [\hat{u}] \cdot \{\tau\} dS + \int\limits_{\Gamma^0} [\tau] \cdot \{\hat{u}\} dS, \forall \tau \in \Sigma_h, \\ \int\limits_{\Omega} \lambda \sigma_h \cdot \nabla_h v d\Omega = \int\limits_{\Omega} f v d\Omega + \int\limits_{\Gamma^0} \lambda [\hat{\sigma}] \cdot \{v\} dS + \int\limits_{\Gamma} \lambda [v] \cdot \{\hat{\sigma}\} dS, \forall v \in V_h, \end{cases} \tag{23}$$

Если в вышерассмотренном свойстве (22) положить $q = tr(v)$, $\varphi = tr(\tau)$, то, используя первую формулу Грина, можно показать, что

$$-\int\limits_{\Omega} \nabla_h \cdot \tau v d\Omega = \int\limits_{\Omega} \tau \cdot \nabla_h v d\Omega - \int\limits_{\Gamma} \{\tau\} \cdot [v] dS - \int\limits_{\Gamma^0} [\tau] \cdot \{v\} dS \tag{24}$$

Положим в (24) $v = u_h$ и подставим в правую часть первого уравнения системы (23)

$$\int\limits_{\Omega} \sigma_h \cdot \tau d\Omega = \int\limits_{\Omega} \tau \cdot \nabla_h u_h \, d\Omega + \int\limits_{\Gamma} [\hat{u} - u_h] \cdot \{\tau\} \, dS + \int\limits_{\Gamma^0} [\tau] \cdot \{\hat{u} - u_h\} \, dS, \tag{25}$$

где $\nabla_h V_h \in \Sigma_h$.

Из (25) можно записать

$$\sigma_h = \sigma_h(u_h) = \nabla_h u_h - r\left(\left[\hat{u}(u_h) - u_h\right]\right) - l\left(\left\{\hat{u}(u_h) - u_h\right\}\right), \tag{26}$$

где

$$\begin{cases} \int\limits_{\Omega} r(\varphi) \cdot \tau d\Omega = -\int\limits_{\Gamma} \varphi \cdot \{\tau\} dS, \\ \int\limits_{\Omega} l(q) \cdot \tau d\Omega = -\int\limits_{\Gamma^0} q \cdot [\tau] dS, \end{cases} \tag{27}$$

Будем называть (27) лифтинг-операторами, подтягивающие решения на границе.

Положим в (27) $\tau = \nabla_h v$ и перепишем второе уравнение системы (23) с учётом (25) в виде:

$$\int\limits_{\Omega} \lambda \nabla_h u_h \cdot \nabla_h v d\Omega + \int\limits_{\Gamma} \lambda \left(\left[\hat{u} - u_h\right] \cdot \left\{\nabla_h v\right\} - \left\{\hat{\sigma}\right\} \cdot [v] \right) dS + \int\limits_{\Gamma^0} \lambda \left(\left\{\hat{u} - u_h\right\} \left[\nabla_h v\right] - \left\{v\right\} [\hat{\sigma}] \right) dS = \int\limits_{\Omega} f v d\Omega \tag{28}$$

Соотношение (28) называют вариационной постановкой разрывного метода Галёркина в общем виде. В зависимости от выбора численных потоков, можно получить разные вычислительные схемы с нужными свойствами при решении задачи.

Для вычислительной схемы IP-метода (метод внутреннего штрафа) выбирают численные потоки в виде

$$\hat{u}_K = \begin{cases} \{u_h\} \text{ на } \Gamma^0, \\ g_D \text{ на } \Gamma_D, \\ u_h, \text{ на } \Gamma_N, \end{cases} \quad \hat{\sigma}_K = \begin{cases} \{\nabla u_h\} - \alpha_j([u_h]) \text{на } \Gamma^0, \\ \nabla u_h - \alpha_j([u_h]) \text{на } \Gamma_D, \\ n g_N, \text{ на } \Gamma_N, \end{cases} \tag{29}$$

где $\alpha_j([u_h]) = \mu [u_h]$, коэффициент стабилизации μ зависит от коэффициентов исходного уравнения, размера конечного элемента и от порядка базисных функций. С учётом (29) перепишем (28) в виде:

$$\int\limits_{\Omega} \lambda \nabla u \cdot \nabla v d\Omega - \int\limits_{\Gamma} \lambda \left([u] \left\{\nabla v\right\} + \left\{\nabla u\right\} [v] \right) dS + \sum_{l \in \Gamma_D \cup \Gamma^0} \int\limits_{l} \mu [u][v] = \int\limits_{\Omega} f v d\Omega \tag{30}$$

Результаты численных экспериментов

В качестве тестовой задачи рассмотрим решение уравнения (1) в области Ω, изображенной на рис.1, с параметрами задачи $f = 1$, $u|_{\Omega} = 0$, $\lambda = \begin{cases} 1, \text{если } (x,y) \in \Omega_1, \\ 1e-9, \text{если } (x,y) \in \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4 \cup \Omega_5, \end{cases}$

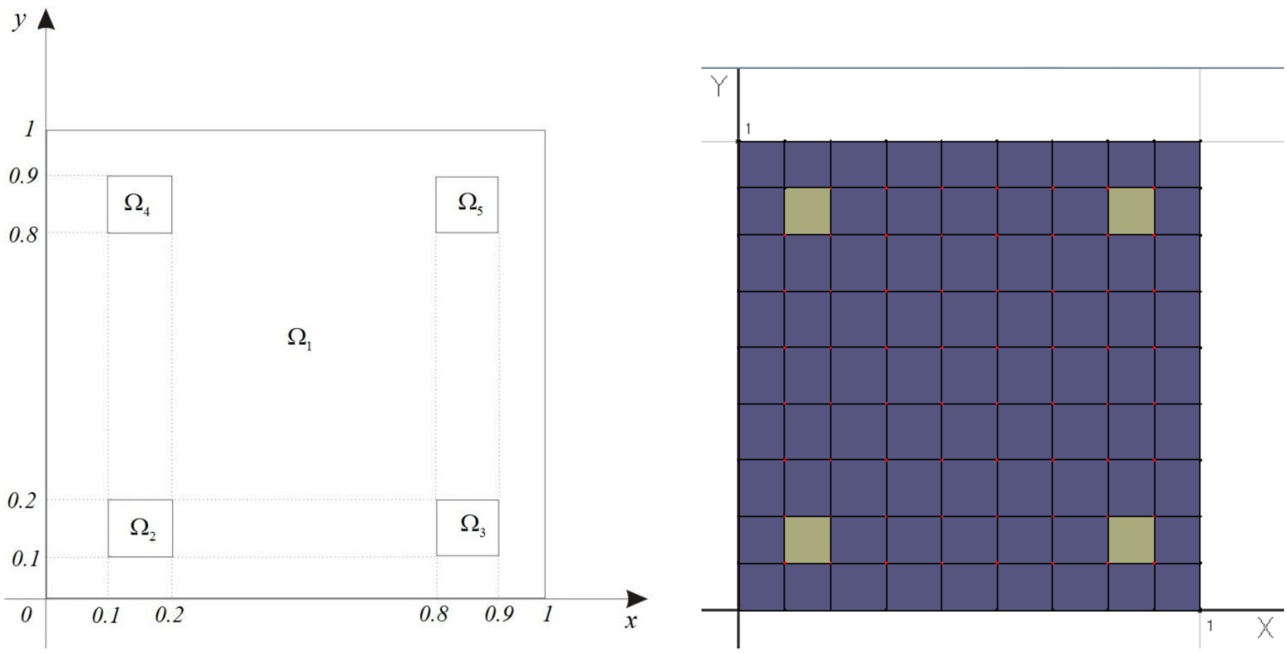

Рис.1. Расчетная область и сетка с шагом $h = 0.1$

На рис.2 представлено решение, полученное разрывным методом Галёркина, когда решение строится на каждом конечном элементе, и непрерывным методом Галёркина, когда решение является непрерывной функцией во всей области.

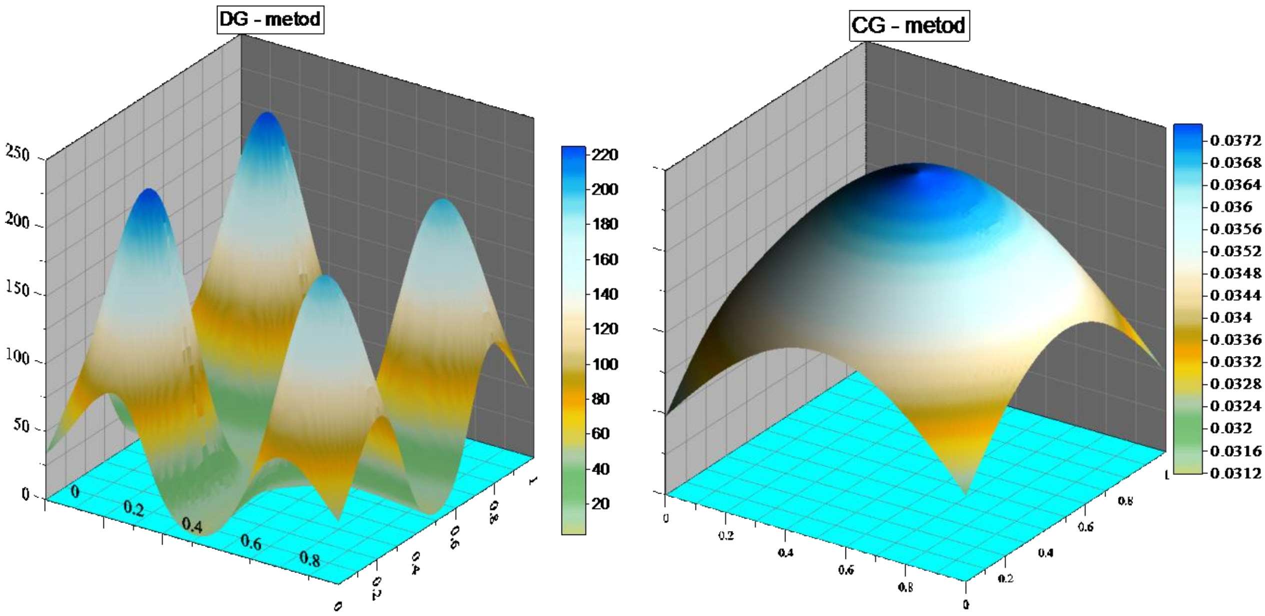

Рис.2. Решение, полученное разрывным (слева) и непрерывным (справа) методом Галёркина

Существенное противоречие решений заключается в использовании сетки, которая не позволяет на требуемом уровне подробности учитывать микровключения $\Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, \Omega_5$, что даёт физически нерелевантное решение.

Если продолжить дробление сетки, то, начиная с некоторого шага, решения, полученные разными методами, совпадут. Результаты эксперимента представлены на рис.3.

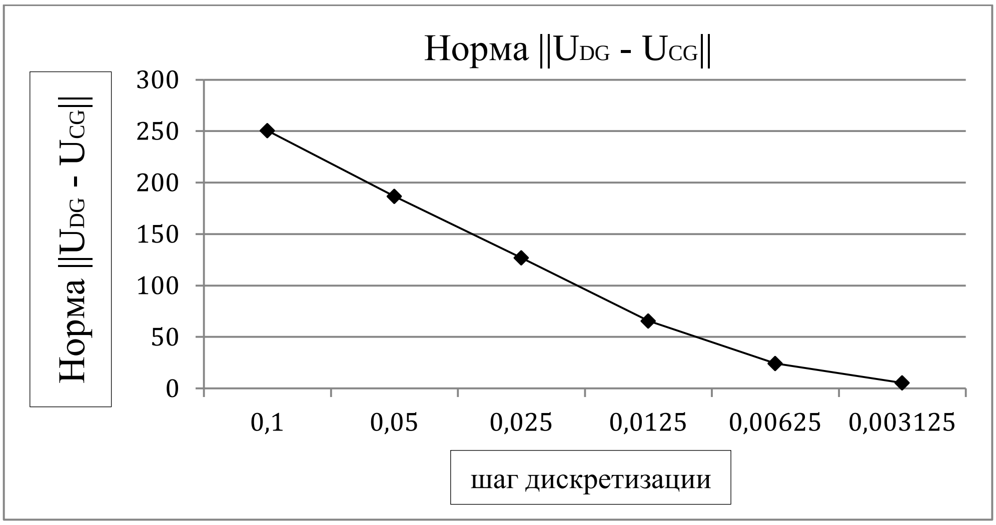

Рис.3. Норма разности решений с последующим дроблением сетки, понимается норма $\|F\|_{L^2}$

Следует отметить, что разрывный метод Галёркина целесообразно использовать в областях с мелкими контрастными включениями (резко меняющимся коэффициентом диффузии), а также в задачах, решение которых строится на несогласованных сетках. На рис.4 приведён результат численного эксперимента, показывающий целесообразность использования непрерывного метода при решении задачи, поставленной выше, но с менее контрастными микровключениями.

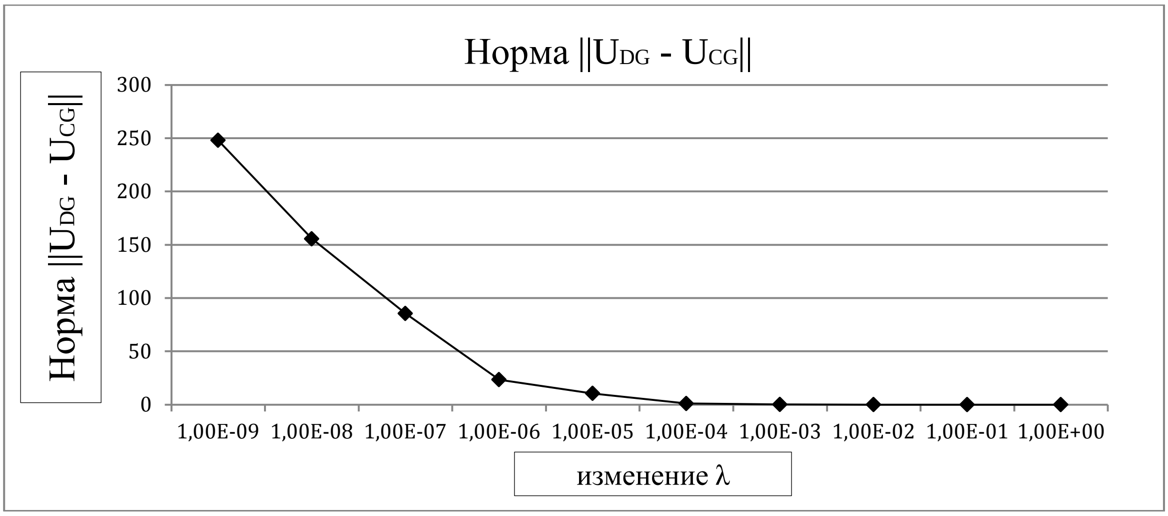

Рис.4. Влияние контрастности микровключений на решение задачи CG- и DG-методом

Таким образом, использование разрывного метода Галёркина (DG-метод) позволяет достичь физически релевантного решения на более грубой сетке, что упрощает задание расчетной области и ускоряет процесс решения конечноэлементной СЛАУ.

Список использованной литературы

1. D.N.Arnold, F.Brezzi, B.Cocburn, D.Marini. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems //SIAM J. Numer. Anal. 2002. V.39.

2. C.E.Baumann and J.T.Oden. A discontinuous hp finite element method for convection-diffusion problems //Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 175, 2000, pp311-341.