

# Об алгоритме расчёта образования волн подводным оползнем с использованием нелинейно-дисперсионной модели\*

О. И. ГУСЕВ

*Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия*  
e-mail: gusev\_oleg\_igor@mail.ru

Проведено расщепление системы полных нелинейно-дисперсионных уравнений мелкой воды, учитывающих подвижность дна, на две части. Описан конечно-разностный алгоритм решения расщеплённой системы. В задаче о генерации волн подводным оползнем полученные результаты сравниваются с расчётами по классической модели мелкой воды и модели потенциальных течений.

*Ключевые слова:* подводный оползень; поверхностные волны; уравнения мелкой воды; нелинейно-дисперсионные уравнения; численное моделирование; конечно-разностная схема.

## Введение

В последнее время широкое распространение получила гипотеза о том, что аномально большие для сейсмического происхождения волны цунами образованы с участием схода оползней [1, 2]. При этом много работ посвящено численному моделированию явления с различными моделями оползней и процесса образования поверхностных волн [3].

Моделирование поверхностных волн в рамках полных моделей гидродинамики требует больших вычислительных ресурсов, поэтому широкое применение получили приближенные модели. В теории мелкой воды можно выделить классическую модель первого приближения, не воспроизводящую дисперсию, модели типа Буссинеска и полные нелинейно-дисперсионные (НЛД-) модели второго приближения. В работах [4] для моделирования образования волн подводным оползнем применялись модели типа Буссинеска [5], при выводе которых предполагалась малость амплитуды. Полные НЛД-модели свободны от этого ограничения, что позволяет им точнее воспроизводить волновое поле [6]. Наиболее известными полными НЛД-моделями являются уравнения Грина–Нагди [7], модели Железняк–Пелиновского [8, 9], Алешкова [10] и Лью–Лайнетта [11].

В работе [9] получена модель Железняк–Пелиновского в предположении, что дно является неподвижным. НЛД-уравнения отличаются от классических уравнений мелкой воды наличием производных высокого порядка от искомых функций, что значительно усложняет численную реализацию модели. Один из способов решения таких систем — расщепление на две части, которые решаются на каждом шаге по времени. В [12] представлен алгоритм, основанный на одном из возможных способов расщепления системы из [9].

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 10-05-91052-НЦНИ, 12-01-00721).

Обобщение модели Железняк–Пелиновского на случай подвижного дна проведено в [13]. Настоящая работа посвящена численной реализации этой модели для случая одной пространственной переменной. Проведено расщепление системы НЛД–уравнений на две части аналогично [12], предложена его модификация, реализован конечно-разностный алгоритм решения этих частей. На модельных задачах о генерации волн подводным оползнем в ограниченных водоёмах полученные численные решения сравнивались результатами по НЛ–модели и модели потенциальных течений (МПТ). Исходя из результатов сравнений установлена важность учёта дисперсионных свойств в исследуемом классе задач.

## 1. Расщепление нелинейно-дисперсионных уравнений

Пусть декартова система координат  $Oxz$  расположена таким образом, что ось  $Ox$  совпадает с невозмущённой свободной поверхностью воды, а ось  $Oz$  направлены вертикально вверх. Свободная поверхность задаётся уравнением  $z = \eta(x, t)$ , а подвижное дно — уравнением  $z = -h(x, t)$ , где  $t$  — время. Жидкость считается несжимаемой.

Подробный вывод нелинейно-дисперсионных уравнений Железняк–Пелиновского в случае подвижного дна можно найти в [13], здесь лишь отметим, что при выводе существенным является предположение о потенциальности трёхмерного течения.

В одномерном приближении указанная система уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{cases} H_t + (Hu)_x = 0, \\ u_t + uu_x + g\eta_x = \frac{1}{H} \left( \frac{H^3}{3} R_1 + \frac{H^2}{2} R_2 \right)_x - h_x \left( \frac{H}{2} R_1 + R_2 \right), \end{cases} \quad (1)$$

где  $R_1 = u_{xt} + uu_{xx} - u_x^2$ ,  $R_2 = D^2h$ ,  $D = \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $u$  — осреднённая по глубине горизонтальная компонента скорости,  $H = \eta + h$  — полная глубина,  $g$  — ускорение свободного падения.

Проведём расщепление системы аналогично [12]. Обозначим ускорение частиц жидкости через  $d = Du = u_t + uu_x$ . Тогда  $R_1$  и  $R_2$  можно переписать через  $d$ :

$$R_1 = d_x - 2u_x^2, \quad R_2 = h_x d + u^2 h_{xx} + B, \quad (2)$$

где  $B = h_{tt} + 2uh_{xt}$  — слагаемое, отвечающее за подвижность дна. Введём новые переменные:

$$\varphi = \frac{H^3}{3} R_1 + \frac{H^2}{2} R_2, \quad \psi = \frac{H^2}{2} R_1 + H R_2. \quad (3)$$

Следовательно,

$$R_1 = \frac{12\varphi - 6\psi H}{H^3}, \quad R_2 = \frac{-6\varphi + 4\psi H}{H^2}, \quad (4)$$

а уравнение движения в новых переменных примет вид:

$$d = \frac{\varphi_x - \psi h_x}{H} - g\eta_x. \quad (5)$$

В результате подстановки выражений (4) и (5) в (2) получим систему уравнений для  $\varphi$  и  $\psi$ :

$$\begin{cases} \left( \frac{\varphi_x - \psi h_x}{H} - g\eta_x \right)_x - 2u_x^2 = \frac{12\varphi - 6\psi H}{H^3}, \\ \left( \frac{\varphi_x - \psi h_x}{H} - g\eta_x \right) h_x + u^2 h_{xx} + B = -\frac{6\varphi}{H^2} + \frac{4\psi}{H}. \end{cases}$$

Из второго уравнения получаем, что

$$\psi = \frac{\varphi_x h_x}{r} + RH + \frac{6\varphi}{Hr}, \quad (6)$$

где  $r = 4 + h_x^2$ ,  $R = \frac{u^2 h_{xx} + B - g\eta_x h_x}{r}$ . Подставляя это выражение в первое уравнение системы, получаем уравнение относительно одной неизвестной функции  $\varphi$

$$\left( \frac{4}{Hr} \varphi_x \right)_x - \left( 6 \left( \frac{h_x}{H^2 r} \right)_x + 12 \frac{r-3}{H^3 r} \right) \varphi = (h_x R + g\eta_x)_x - \frac{6}{H} R + 2u_x^2. \quad (7)$$

Вычислив из этого уравнения  $\varphi$ , по формуле (6) определяем функцию  $\psi$  и далее решаем систему гиперболического типа

$$\begin{cases} H_t + (Hu)_x = 0, \\ u_t + uu_x + g\eta_x = \frac{\varphi_x - \psi h_x}{H}, \end{cases} \quad (8)$$

Рассмотрим модификацию представленного расщепления. Обозначим за  $L$ ,  $h_0$ ,  $a_0$  — характерные горизонтальный масштаб, глубина акватории и амплитуда волны соответственно,  $\alpha = a_0/h_0$ ,  $\mu = h_0/L$ ,  $c_0 = \sqrt{gh_0}$ , и проведём обезразмеривание по формулам

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{z} = \frac{z}{h_0}, \quad \bar{h} = \frac{h}{h_0}, \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{a_0}, \quad \bar{t} = \frac{tc_0}{L}, \quad \bar{u} = \frac{u}{\alpha c_0}, \quad (9)$$

Тогда решаемые уравнения (6), (7), (8) в безразмерных координатах примут вид

$$\begin{cases} H_t + \alpha(Hu)_x = 0, \\ u_t + \alpha uu_x + \eta_x = \mu^2 \frac{\varphi_x - \psi h_x}{H}, \end{cases} \quad (10)$$

$$\mu^2 \left( \frac{4}{Hr} \varphi_x \right)_x - \left( \mu^2 6 \left( \frac{h_x}{H^2 r} \right)_x + 12 \frac{r-3}{H^3 r} \right) \varphi = (\mu^2 h_x R + \eta_x)_x - \frac{6}{H} R + \alpha 2u_x^2. \quad (11)$$

$$\psi = \mu^2 \frac{\varphi_x h_x}{r} + RH + \frac{6\varphi}{Hr}, \quad (12)$$

при этом  $r = 4 + \mu^2 h_x^2$ ,  $R = \frac{\alpha u^2 h_{xx} + B - \eta_x h_x}{r}$ ,  $B = h_{tt}/\alpha + 2uh_{xt}$ , черта над безразмерными величинами опущена для удобства записи. Учитывая, что в модели предполагается, что  $\mu^2 \ll 1$ , в уравнении для  $\varphi$  (11) можно пренебречь членами порядка  $O(\mu^4)$ , а в формуле (12) порядка  $O(\mu^2)$ , так как  $\psi$  входит в (10) с множителем  $\mu^2$ . Переходя к размерным величинам получим

$$\left( \frac{\varphi_x}{H} \right)_x - \left( \frac{3}{2} \left( \frac{h_x}{H^2} \right)_x + 12 \frac{r-3}{H^3 r} \right) \varphi = (h_x \hat{R} + g\eta_x)_x - \frac{6}{H} R + 2u_x^2. \quad (13)$$

$$\psi = \hat{R}H + \frac{6\varphi}{Hr}, \quad \hat{R} = \frac{u^2 h_{xx} + B - g\eta_x h_x}{4}. \quad (14)$$

Систему (7), (6) будем называть полным расщеплением, а (13), (14) — модифицированным.

Численный алгоритм для расщеплённой системы подробно описан в [14], здесь только отметим, что уравнение для  $\varphi$  решается интегро-интерполяционным методом и трёхточечной прогонкой, а гиперболическая система (8), отличающаяся от классической модели мелкой воды только правой частью, — явной двушаговой схемой типа предиктор-корректор со вторым порядком аппроксимации.

## 2. Расчёт генерации волн подводным оползнем

Одним из важных факторов при моделировании генерации волн подводным оползнем является закон его движения. Закон движения, применяемый в настоящей работе, подробно описан в [15], поэтому здесь мы не будем останавливаться на его деталях. Отметим лишь, что оползень движется по криволинейному склону под действием сил тяжести, плавучести, трения и сопротивления воды.

Выделим в уравнении, описывающем дно, подвижную и неподвижную части:

$$z = -h(x, t) = h_{bt}(x) + h_{st}(x, t),$$

В качестве модельной выберем акваторию с формой дна в виде дуги параболы:

$$z = h_{bt}(x) = (h_{left} - h_{\xi}) \left( \frac{x}{\xi} - 1 \right)^2 + h_{\xi}, \quad (15)$$

где  $h_{left}$  - глубина в точке  $x = 0$ ,  $h_{\xi}$  - максимальная глубина,  $x = \xi$  - точка вершины параболы. Акватория ограничена вертикальными стенками в точках  $x = 0$  и  $x = 2\xi$ . Выберем следующие значения этих параметров:  $h_{left} = -10$  м,  $h_{\xi} = -100$  м,  $\xi = 500$  м. Оползень в начальный момент времени задаётся формулой

$$z = h_{st}^0(x) = \begin{cases} \frac{T}{2} \left[ \cos \left( \frac{2\pi(x - x_c^0)}{b} \right) \right], & |x - x_c^0| \leq b/2; \\ 0, & |x - x_c^0| > b/2. \end{cases} \quad (16)$$

где  $T$  - его толщина,  $b$  - длина, а  $x_c^0$  - начальное положение центра оползня. Отметим, что важными параметрами в законе движения являются также:  $C_w$  - коэффициент присоединённой массы,  $C_d$  - коэффициент сопротивления воды,  $C_{fr} = \tan \theta^*$  - коэффициент трения скольжения, где  $\theta^*$  - угол трения,  $\gamma > 1$  - отношение плотности оползня к плотности воды. Исследование влияния этих параметров на образование поверхностных волн в рамках модели мелкой воды можно найти в [15], а здесь выберем следующие значения:  $C_w = 1$ ,  $C_d = 1$ ,  $\theta^* = 5^\circ$ ,  $\gamma = 2$ ,  $T = 10$  м.

Для определения модельной задачи остаётся выбрать два параметра: длину  $b$  и начальное заглубление  $z_c^0$  оползня. Рассмотрим случай  $b = 100$  м и  $z_c^0 = -30$  м. При таких параметрах оползень сдвигается с откоса вниз и в момент времени  $t \approx 70$  с останавливается почти в центре области. На рис. 1 представлены профиль образовавшейся волны в момент времени  $t = 20$  с и мареограммы, установленные на границах области за время  $t = 100$  с. На графиках полученные результаты по полной НЛД-модели и

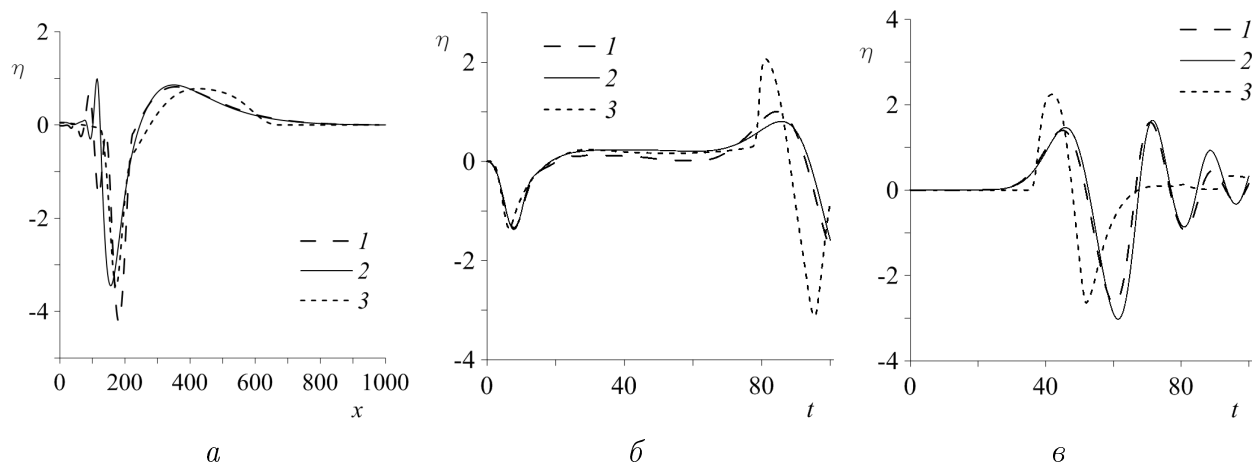


Рис. 1. Профиль свободной поверхности при  $t = 20$  с (*a*) и мареогаммы на левой (*б*) и правой (*в*) границах области: 1 - результаты НЛД-модели; 2 - МПТ; 3 - НЛ-модели.  $b = 100$  м

НЛ-модели сравниваются с результатами модели потенциальных течений (МПТ) [12], которую можно считать эталонной в этом классе задач [4]. На рис. 1, (*a*) видно, что НЛД-модель почти совпадает с МПТ правее оползня, который находится под впадиной, и левее него воспроизводит образование второстепенных волн. НЛ-модель неплохо согласуется с МПТ правее оползня, но не описывает образование волн за ним. По мареогамме около левой границы можно сделать вывод, что первую волну понижения почти одинаково описывают все модели, но следующее за ней повышение значительно отличается НЛ-модель от остальных, которые показывают хорошую согласованность между собой. На мареогамме вблизи правой границы так же хорошо согласуются НЛД-модель и МПТ на всём временном промежутке, а НЛ-модель сильно упрощает картину, при этом значительно завышая амплитуду первой волны.

Рассмотрим изменения результатов моделей при уменьшении длины оползня до  $b = 50$  м (рис. 2). Как видно, профиль в момент времени  $t = 20$  с у НЛД-модели сильно отличается от остальных: впадина над оползнем значительно больше, за оползнем появились аномально большие волны. Тем не менее на мареогаммах можно наблюдать

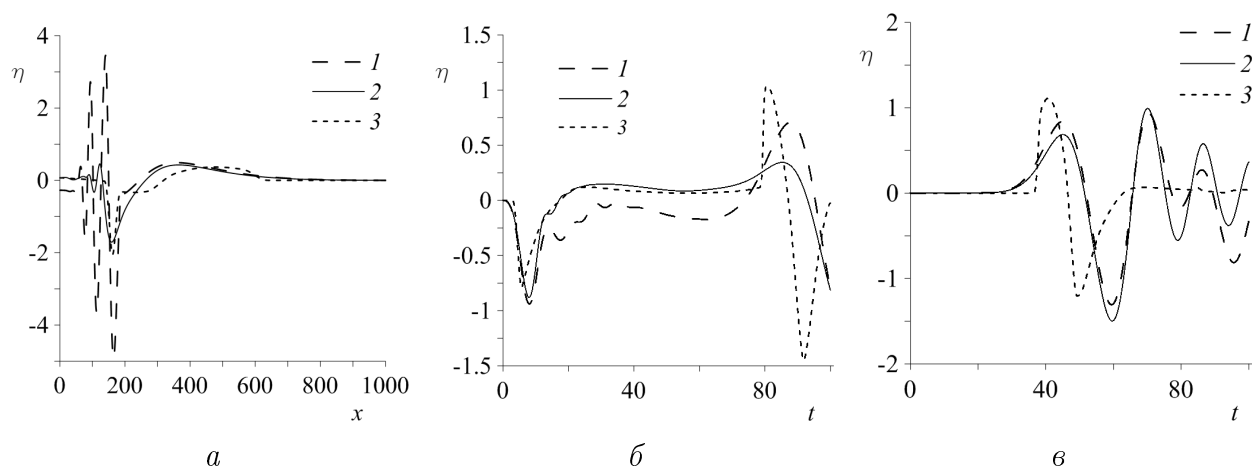


Рис. 2. Профиль свободной поверхности при  $t = 20$  с (*a*) и мареогаммы на левой (*б*) и правой (*в*) границах области: 1 - результаты НЛД-модели; 2 - МПТ; 3 - НЛ-модели.  $b = 50$  м

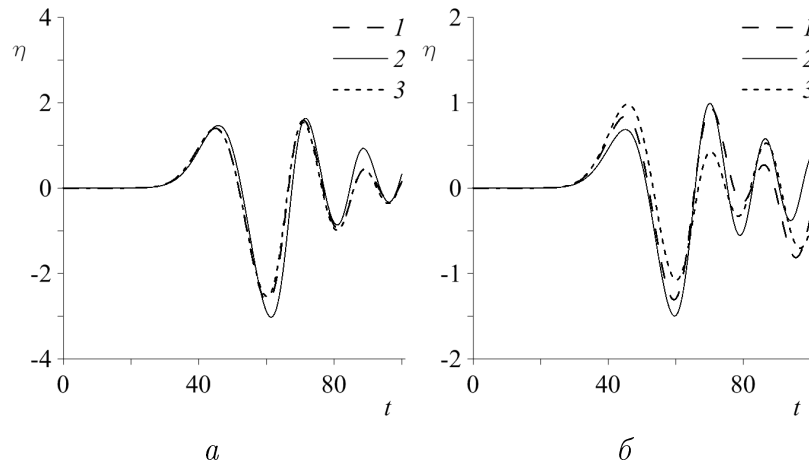


Рис. 3. Мареограммы на правой границе при  $b = 100$  м (а) и  $b = 50$  м (б): 1 — результаты НЛД-модели; 2 — МПТ; 3 — модифицированной НЛД-модели

удовлетворительное соответствие с МПТ, хотя, несомненно, худшее, чем при  $b = 100$  м. Аналогичные результаты получаются при увеличении начального заглубления  $z_c$  до 60-ти метров [14]. В связи с этим можно сделать вывод, что для адекватного описания профиля волны, образованной движением подводного оползня, при помощи настоящей НЛД-модели необходимо чтобы оползень был достаточно длинный относительно его заглубления. Подобное ограничение для НЛД-модели Лью-Лайнетта получено в [11].

На рис. 3 модифицированная модель сравнивается с полной и МПТ для разной длины оползня. Из этих сравнений следует, что при для длинном оползне модификация не играет существенной роли, а при коротком увеличивает расхождение с МПТ.

## Заключение

В настоящей работе реализована нелинейно-дисперсионная модель для расчёта распространения и генерации волн цунами подводным оползнем, основанная на системе уравнений Железняк-Пелиновского. Предложены два способа расщепления системы. Уравнение для  $\varphi$  решалось при помощи интегро-интерполяционного метода и решения системы трёхточечной прогонкой. Гиперболическая часть решалась явной двушаговой схемой типа предиктор-корректор, широко применяемой для решения системы уравнений мелкой воды.

Проведена серия расчётов генерации волн подводным оползнем в модельной ограниченной акватории. Полученные результаты по НЛД- и НЛ- моделям сравнивались с расчётами по модели потенциальных течений. Показано, что при оползнях достаточной длины НЛД-модель хорошо согласуется с МПТ, в отличие от НЛ-модели детально описывая картину течения, при этом модифицированная модель практически совпадает с полной. Однако, в случае короткого оползня относительно его заглубления настоящая НЛД-модель расходится с МПТ, особенно при описании профиля волны при сходе оползня. Для таких оползней модификация расщепления даёт ещё более сильное расхождение.

## Список литературы

- [1] WATTS P., GRILLI S.T. Underwater landslide shape, motion, deformation, and tsunami generation // Proc. of the 13th Intern. Offshore and Polar Eng. Conf., Honolulu, Hawaii, 2003. Vol. 3. P. 364–371.
- [2] TAPPIN D. R., WATTS P., GRILLI S. T. The Papua New Guinea tsunami of 17 July 1998: anatomy of a catastrophic event// Nat. Hazards Earth Syst. Sci. 2008. V. 8, P. 243–266.
- [3] ШОКИН Ю.И., ЧУБАРОВ Л.Б. О подходах к численному моделированию оползневого механизма генерации волн цунами // Вычисл. технологии. 2006. Т. 11, Специальный выпуск, Часть 2. С. 100–111.
- [4] ЕЛЕЦКИЙ С.В., МАЙОРОВ Ю.Б., МАКСИМОВ В.В., НУДНЕР И.С., ФЕДОТОВА З.И., ХАЖОЯН М.Г., ХАКИМЗЯНОВ Г.С., ЧУБАРОВ Л.Б. Моделирование генерации поверхностных волн перемещением фрагмента дна по береговому склону // Вычисл. технологии. 2004. Т. 9, Специальный выпуск, Часть 2. С. 194–206.
- [5] ДОРФМАН А.А., ЯГОВДИК Г.И. Уравнения приближенной нелинейно-дисперсионной теории длинных гравитационных волн, возбуждаемых перемещениями дна и распространяющихся в бассейне переменной глубины // Числен. методы мех. сплошной среды: Сб. научн. тр. / АН СССР, Сиб. отд-ние, ВЦ, ИТПМ. 1977. Т. 8, № 1. С. 36–48.
- [6] SHOKIN YU.I., FEDOTOVA Z.I., KHAKIMZYANOV G.S., CHUBAROV L.B., BEISEL S.A. Modelling surfaces waves generated by a moving landslide with allowance for vertical flow structure// Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2007. Vol. 22, N 1. P. 63–85.
- [7] GREEN A.E., NAGHDI P.M. A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth // J. Fluid Mech. 1976. Vol. 78, part 2. P. 237-246.
- [8] ЖЕЛЕЗНЯК М.И., ПЕЛИНОВСКИЙ Е.Н. Физико-математические модели наката цунами на берег // Накат цунами на берег: Сб. научн. тр. / Горький, ИПФ АН СССР, 1985. С. 8-33.
- [9] ВОЛЬЦИНГЕР Н.Е., КЛЕВАННЫЙ К.А., ПЕЛИНОВСКИЙ Е.Н. Длинноволновая динамика прибрежной зоны. Ленинград: Гидрометеиздат, 1989. 272 с.
- [10] АЛЕШКОВ Ю.З. Течения и волны в океане. СПб: Изд-во С.-Петербургского университета, 1996. 226 с.
- [11] LYNETT P.J., LIU P.L.-F. A numerical study of submarine-landslide-generated waves and run-up // Proc. Royal Society of London. A. 2002. Vol. 458. P. 2885–2910.
- [12] ХАКИМЗЯНОВ Г.С., ШОКИН Ю.И., БАРАХНИН В.Б., ШОКИНА Н.Ю. Численное моделирование течений жидкости с поверхностными волнами. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001.
- [13] ФЕДОТОВА З.И., ХАКИМЗЯНОВ Г.С. Нелинейно-дисперсионные уравнения мелкой воды на нестационарном дне // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13, № 4. С. 114–126.
- [14] ГУСЕВ О.И. Об алгоритме расчета поверхностных волн в рамках нелинейно-дисперсионной модели на подвижном дне // Вычислительные технологии. 2012. (в печати)
- [15] ХАКИМЗЯНОВ Г.С., ШОКИНА Н.Ю. Численное моделирование поверхностных волн, возникающих при движении подводного оползня по неровному дну // Вычисл. технологии. 2010. Т. 15, № 1. С. 105–119.