Численное решение уравнения Навье-Стокса в калибровочных переменных

Хребтов Михаил Юрьевич
e-mail: weexov@yandex.ru

В работе рассматривается построение расчетного модуля для решения уравнения Навье-Стокса, в калибровочных переменных с помощью метода многоуровневых сеток (multigrid). Исследуются пути распараллеливания численной схемы по протоколу MPI.

Введем переменную [1]

$$a = u - \nabla \phi \tag{1}$$

где ϕ-произвольная дважды гладкая скалярная функция, u-вектор скорости.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u\nabla)\, u = -\nabla p + \frac{1}{Re}\Delta u \tag{2}$$

Выразим уравнение Навье-Стокса (2) в новых переменных

$$\frac{\partial a}{\partial t} + (u\nabla)\, u = -\nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + p - \frac{1}{Re}\Delta\phi \right) + \frac{1}{Re}\Delta a \tag{3}$$

Так как ϕ-произвольная функция, то мы можем определить ее так, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + p - \frac{1}{Re}\Delta\phi \equiv 0$$

Тогда уравнение (3) перепишется в виде [2]

$$\frac{\partial a}{\partial t} + (u\nabla)\, u = \frac{1}{Re}\Delta a \tag{4}$$

запишем полную систему уравнений для новых переменных

$$\begin{cases} \frac{\partial a}{\partial t} + (u\nabla)\, u = \frac{1}{Re}\Delta a \\ \triangle\phi = -\nabla a \\ a = u - \nabla\phi \end{cases} \tag{5}$$

граничные условия на стенке можно выбрать из двух

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0,\ a\cdot n = 0,\ a\cdot\tau = -\frac{\partial\phi}{\partial\tau} \\ \phi = 0,\ a\cdot n = -\frac{\partial \phi}{\partial n},\ a\cdot\tau = 0 \end{array} \right. \tag{6}$$

Второй вариант предпочтительнее, так как дает условие Дирихле для уравнения Лапласа, что приводит к лучшей сходимости для большинства расчетных методов.

В решении уравнения Навье-Стокса численную трудность представляет связанность переменных давления и скорости. В данном методе эта проблема устраняется. Первое уравнение системы (5) можно решать независимо от второго. Кроме того, положительной чертой данного метода является более простая запись граничных условий. В данной работе система (5) разрешалась на декартовой MAC-сетке, использовался второй вид условий из (6). Граница проходила через узлы перпендикулярной стенке компоненты вектора a.

Использовалась численная схема второго порядка по пространству и времени. По пространству использовалась дискретизация центральными разностями. По времени использовалась схема Кранка-Николсона.

$$\begin{cases} \frac{a^{n+1}-a^n}{\Delta t} + \left(u^{n+\frac{1}{2}}\nabla\right)u^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2Re}\Delta\left(a^{n+1}+a^n\right) \\ a^{n+1}\cdot n = -2\frac{\partial\phi^n}{\partial n} + \frac{\partial\phi^{n-1}}{\partial n},\ a^{n+1}\cdot\tau = 0 \end{cases}$$

Конвективный член параметризовался по Адамсу-Башфорту.

$$\left(u^{n+\frac{1}{2}}\nabla\right)u^{n+\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\left(u^n\nabla\right)u^n - \frac{1}{2}\left(u^{n-1}\nabla\right)u^{n-1}$$

Для решения уравнений для ϕ и a использовался метод многоуровневых сеток (multigrid [3]). Известно [4], что итерация по Гауссу-Зейделю хорошо подходит для многоуровневых сеток, так как при этом быстро подавляется высокочастотная часть ошибки. Однако метод Гаусса-Зейделя, в силу своей последовательной природы, плохо подходит для параллельных вычислений. В работе были исследованы различные варианты организации итераций. Среди хорошо распараллеливающихся методов наилучшим оказался метод SPAI [5]. Метод имеет частотные характеристики практически идентичные с методом Гаусса-Зейделя, но обладает тем преимуществом, что для получения значения на текущей итерации используются только величины с предыдущего временного слоя, что, очевидно, делает его привлекательным для параллельных вычислений. Сравнение вычислительных затрат показало, что итерация по методу SPAI, примерно в 1.5 раза медленнее итерации по Гауссу-Зейделю на одном процессоре. Число итераций до достижения сходимости не отличалось в обоих случаях. В работе было выполнено распараллеливание расчетного алгоритма по протоколу MPI путем простого разбиения расчетной области вдоль одной из осей. Были проведены расчеты тестовой задачи течения в кубической каверне для различного числа процессоров. Расчеты показали эффективность распараллеливания близкую к линейной.

Список литературы

[1] T.Buttke, A.Chorin, Turbulence calculation using magnetization variables, Appl.Numer.Math. 12, 47-54(1993)

[2] W.E, J.G.Liu, Finite difference schemes for incompressible flows in the velocity-impulse density formulation, J. Comput. Phys., 130, 67 (1997)

[3] W.Hackbusch, Multi-grid methods and applications, Springer-Verlsg,Berlin, (1985).

[4] A. Brandt, Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems, Math. Comp., 31,333–390 (1977).

[5] M.J.Grote, T.Huckle, Parallel preconditioning with sparse approximate inverses, SIAM J.Sci.Comput., 18,838-853 (1997)