Двухсеточный метод на сетке Шишкина для нелинейного уравнения второго порядка с пограничным слоем

Тиховская Светлана Валерьевна
e-mail: s.tihovskaya@yandex.ru

Рассмотрим краевую задачу:

$$Lu = \varepsilon u'' + a(x)u' = f(x,u), \qquad x \in \Omega = (0,1), \qquad u(0) = A, \quad u(1) = B. \qquad (1)$$

Решение задачи (1) имеет погранслойный рост в окрестности $x = 0$.

Зададим сетку $S_{N,\sigma} = \{x_i : x_i = x_{i-1} + h_i,\ x_0 = 0,\ x_N = 1,\ i = 1, 2, \ldots, N\}$, где $h_i = 2\sigma/N$, $1 \le i \le N/2$, $h_i = 2(1-\sigma)/N$, $N/2 < i \le N$, $\sigma = \min\{0.5, 2\varepsilon \ln N/\alpha\}$.

Теперь для задачи (1) выпишем схему направленных разностей:

$$L_\varepsilon^N u_i^N = \varepsilon \lambda_{xx}^N u_i^N + a_i \lambda_x^N u_i^N - f(x_i, u_i^N) = 0, \quad 0 < i < N, \qquad u_0^N = A, \quad u_N^N = B, \ (2)$$

где $\lambda_x^N u_i^N = (u_{i+1}^N - u_i^N)/h_{i+1}$, $\lambda_{xx}^N u_i^N = \Big((u_{i+1}^N - u_i^N)/h_{i+1} - (u_i^N - u_{i-1}^N)/h_i\Big)/(h_i + h_{i+1})/2$.

Для этой схемы обоснована оценка точности $\max\limits_i |u(x_i) - u_i^N| \le C \ln N/N$, где под C понимаем положительную постоянную, независящие от ε и N.

Решение схемы (2) может быть найдено на основе итераций. Количество итераций на исходной сетке можно существенно сократить, если использовать двухсеточный метод.

Пусть $S_{n,\sigma}$ — сетка Шишкина, содержащая значительно меньшее, чем исходная, число узлов. Решаем задачу (1) на сетке $S_{n,\sigma}$ с применением разностной схемы, соответствующей (2). Схему разрешаем на основе линеаризации Ньютона или Пикара. Итерации прекращаем при достижении точности решения порядка $\Delta_n = \ln n/n$. Далее найденное на сетке $S_{n,\sigma}$ решение интерполируем в узлы исходной сетки $S_{N,\sigma}$ с помощью кусочно-линейной интерполяции, которая на сетке Г.И. Шишкина является равномерно точной по ε и имеет порядок $\ln N^2/N^2$.

В двухсеточном методе решение вычисляется на двух сетках, поэтому будем использовать их также для улучшения точности, применив метод Ричардсона.

Пусть $N = kn$, где k — целое число. Обозначим решение (2) на $S_{n,\sigma}$ как $\breve{u}^n$ и $k_n = -n/(N-n)$, $k_N = N/(N-n)$. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\varepsilon \le N^{-1}$. Тогда существует C, что для всех $x_i \in S_{N,\sigma}$*

$$\Big|u(x_i) - (k_n \breve{u}^n(x_i) + k_N u^N(x_i))\Big| \le C \frac{k(k+1)}{(k-1)} \frac{\ln^2 N}{N^2}.$$

Проведены вычислительные эксперименты, которые показывают, что применение двухсеточного метода приводит к выигрышу в количестве арифметических действий и не приводит к понижению точности численного решения. А использование метода Ричардсона при $k = 2$ и значениях близких к нему повышает точность на порядок.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 11-01-00875.