

Задача о граничной функции для уравнений мелкой воды*

Е.В. ДЕМЕНТЬЕВА

Е.Д. КАРЕПОВА

Учреждение Российской академии наук

Институт вычислительного моделирования Сибирского отделения РАН

e-mail: e.d.karepova@icm.krasn.ru

Рассмотрено два семейства задач оптимального управления для ассимиляции данных наблюдений в моделях мелкой воды. Построен итерационный численный метод восстановления граничной функции и, следовательно, решения обратной задачи в области. Метод состоит в итерационном уточнении граничной функции путем численного решения последовательно прямой и сопряженной задач методом конечных элементов. Реализовано параллельное ПО с использованием технологий MPI, исследована его эффективность на SMP-узловых кластерах.

1. Введение

Модели мелкой воды хорошо описывают большой круг природных явлений, таких как крупномасштабные поверхностные волны, возникающие в морях и океанах, цунами, приливные течения, поверхностный и русловой сток, гравитационные колебания поверхности океанов [1, 2]. В работах [2, 3] рассмотрено численное моделирование поверхностных волн в больших акваториях с учетом сферичности Земли и ускорения Кориолиса на основе уравнений мелкой воды. В работе [2] для дифференциальной постановки задачи выведены полезные априорные оценки, обеспечивающие устойчивость решения и однозначную разрешимость задачи. В [3] для этой же задачи построен метод конечных элементов, для которого получены необходимые априорные оценки. Там же приведены результаты численных экспериментов на модельных сетках для акваторий Охотского моря и Мирового океана.

В [4] проведено исследование эффективности нескольких параллельных реализаций алгоритма численного решения начально-краевой задачи для уравнений мелкой воды, выполненных с помощью библиотеки MPI для языка Си.

В настоящей работе рассмотрено два семейства задач оптимального управления для ассимиляции данных наблюдений в моделях мелкой воды. Построен итерационный численный метод восстановления граничной функции и, следовательно, решения обратной задачи в области. Метод состоит в итерационном уточнении граничной функции путем численного решения последовательно прямой и сопряженной задач методом конечных элементов. Численные эксперименты, демонстрирующие восстановление граничной функции, проведены для акватории Охотского моря. Данные наблюдений задавались гладкими функциями, возмущенными белым шумом и данными с пропусками.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 11-01-00224-а) и Междисциплинарного интеграционного проекта Сибирского отделения РАН № 26.

2. Дифференциальная постановка задачи

Рассмотрим задачу в следующей постановке. Пусть (r, λ, φ) — сферическая система координат с началом в центре земного шара. Здесь через λ обозначена географическая долгота $0 \leq \lambda \leq 2\pi$, а вместо угла θ используется географическая широта $\varphi = \pi - \theta$, так что $0 \leq \varphi < \pi$. Полагаем всюду $r = R_E$, где R_E — радиус Земли, который считается постоянным.

Сформулируем задачу о распространении длинных волн в акватории следующим образом. Пусть Ω_{R_E} — заданная область на сфере радиуса R_E с границей $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где Γ_1 — часть границы, проходящая вдоль берега, а $\Gamma_2 = \Gamma \setminus \Gamma_1$ — часть границы, проходящая по морю. Обозначим через m_1 и m_2 характеристические функции соответствующих участков границы. Не теряя общности можно считать, что точки $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ (полюса) не входят в Ω_{R_E} . Пусть также $\Omega = \{(\lambda, \varphi) \in [0, 2\pi] \times (0, \pi) : (R_E, \lambda, \varphi) \in \Omega_{R_E}\}$. Относительно неизвестных функций $u = u(t, \lambda, \varphi)$, $v = v(t, \lambda, \varphi)$ и $\xi = \xi(t, \lambda, \varphi)$ запишем в $\Omega_{R_E} \times (0, T)$ уравнения баланса импульсов и уравнение неразрывности [1, 2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= lv + mg \frac{\partial \xi}{\partial \lambda} - R_f u + f_1, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -lu + ng \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} - R_f v + f_2, \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} &= m \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} (Hu) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{n}{m} Hv \right) \right) + f_3, \end{aligned} \quad (1)$$

где u, v — компоненты вектора скорости \mathbf{U} по осям λ и φ соответственно; ξ — отклонение свободной поверхности от невозмущенного уровня; $H(\lambda, \varphi) > 0$ — глубина водоема в точке (λ, φ) ; функция $R_f = r_* |\mathbf{U}|/H$ учитывает силу трения о дно, r_* — коэффициент трения; $l = -2\omega \cos \varphi$ — параметр Кориолиса; $m = 1/(R_E \sin \varphi)$; $n = 1/R_E$; g — ускорение силы тяжести; $f_1 = f_1(t, \lambda, \varphi)$, $f_2 = f_2(t, \lambda, \varphi)$ и $f_3 = f_3(t, \lambda, \varphi)$ — заданные функции внешних воздействий.

Граничные условия рассмотрим в следующем виде:

$$HU_n + \beta m_2 \sqrt{gH} \xi = m_2 \sqrt{gH} d \quad \text{на } \Gamma \times (0, T), \quad (2)$$

где $U_n = \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}$, $\mathbf{n} = (n_1, \frac{n}{m} n_2)$ — вектор внешней нормали к границе; $\beta \in [0, 1]$ — заданный параметр, $d = d(t, \lambda, \varphi)$ — некоторая функция, определенная на границе Γ_2 .

Зададим также начальные условия

$$u(0, \lambda, \varphi) = u_0(\lambda, \varphi), \quad v(0, \lambda, \varphi) = v_0(\lambda, \varphi), \quad \xi(0, \lambda, \varphi) = \xi_0(\lambda, \varphi). \quad (3)$$

Для дискретизации по времени разобьем временной отрезок $[0, T]$ на K интервалов: $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_K = T$ с шагом $\tau = T/K$. Аппроксимируем производные по времени левыми разностями. Уравнения (1) на каждом временном интервале (t_k, t_{k+1}) , рассчитывая донное трение с предыдущего временного слоя, можно записать в операторном виде следующим образом:

$$L\Phi = \mathbf{F} \quad \text{в } \Omega, \quad (4)$$

где $\Phi = (u, v, \xi) \in (L_2(\Omega))^2 \times W_2^1(\Omega)$ — искомая вектор-функция, L — эллиптический дифференциальный оператор, \mathbf{F} — вектор правой части.

Поскольку в общем случае функция d неизвестна, то для замыкания задачи (1)–(2) рассмотрим уравнение замыкания, заданное на некоторой части границы Γ_0 с характеристической функцией m_0 :

$$m_0\xi = \xi_{obs}, \quad (5)$$

где $\xi_{obs} \in L_2(\Gamma_0)$ — заданная (например, по данным наблюдений) функция. Таким образом, дифференциальная задача на каждом шаге по времени может быть сформулирована, как некорректно поставленная задача на усвоение данных наблюдений.

Пусть ξ_{obs} задана на Γ_0 , функция d неизвестна на Γ_2 и равна нулю на Γ_1 . Найдите u , v , ξ , d , удовлетворяющие системе (1), граничному условию (2) и условию замыкания (5).

Для решения задачи была применена технология, описанная в [5]. Рассмотрено два семейства задач оптимального управления, отличающихся видом штрафной функции в функционале стоимости, для отыскания минимума в некоторой норме погрешности между искомым возвышением свободной поверхности и наблюдаемым.

Задача 1. Пусть ξ_{obs} задана на Γ_0 . Для каждого $\alpha \geq 0$ найдите $\Phi_\alpha = (u_\alpha, v_\alpha, \xi_\alpha)$, d_α , удовлетворяющие системе

$$L\Phi_\alpha = \mathbf{F} \quad \text{в } \Omega,$$

начальным данным (3), граничному условию

$$HU_{\alpha,n} + \beta m_2 \sqrt{gH} \xi_\alpha = m_0 \sqrt{gH} d_\alpha \quad \text{на } \Gamma$$

и минимизирующий функционал стоимости одного из следующих видов:

$$J_\alpha^{(I)}(d_\alpha, \xi_\alpha(d_\alpha)) = \frac{1}{2}g \left(\alpha \int_\Gamma m_2 \sqrt{gH} d_\alpha^2 ds + \int_\Gamma m_0 \sqrt{gH} (\xi_\alpha - \xi_{obs})^2 ds \right) \quad (6)$$

$$J_\alpha^{(II)}(d_\alpha, \xi_\alpha(d_\alpha)) = \frac{1}{2}g \left(\alpha \int_\Gamma m_2 \sqrt{gH} \left(\frac{\partial d_\alpha}{\partial s} \right)^2 ds + \int_\Gamma m_0 \sqrt{gH} (\xi_\alpha - \xi_{obs})^2 ds \right). \quad (7)$$

Для решения этой задачи построен итерационный численный метод восстановления граничной функции и, следовательно, решения обратной задачи в области. Метод состоит в итерационном уточнении граничной функции путем численного решения последовательно прямой и сопряженной задач.

Численное решение прямой и обратной задач основано на методе конечных элементов на согласованной триангуляции $\mathcal{T} = \{\omega_i\}_{i=1}^{N_{el}}$ области Ω , исследованной в [3].

3. Численные эксперименты по восстановлению данных

Рассмотрим в качестве расчетной области акваторию Охотского моря и прилегающий к Курильским островам участок Тихого океана. Область ограничена «квадратом»: $\Omega = [42^\circ, 62^\circ]$ с.ш. \times $[135^\circ, 162^\circ]$ в.д., ее жидкая граница проходит вдоль $\lambda = 161, 1^\circ$ в.д. и вдоль $\varphi = 41, 5^\circ$ с.ш. Здесь и далее, для удобства по осям λ и φ вместо радианных мер приводятся градусы восточной долготы и северной широты, соответственно. Тестовые расчеты для акватории Охотского моря проводились на сетках, подготовленных на основе открытой батиметрической базы данных ETOPO2 [6].

Поскольку в общем случае для нестационарной задачи начальные данные не известны, а рассматриваемая процедура не предполагает восстановления начальных данных, то в Ω была поставлена следующая задача.

Сначала при заданной на всей границе по морю функции d

$$d(\lambda, \varphi) = A \exp \left(- \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{2D} \right)^2 - \left(\frac{\varphi - \varphi_0}{2D} \right)^2 \right) \quad (8)$$

решалась прямая задача на установление. Установившееся решение принималось в качестве начальных данных, за данные «наблюдений» на границе Γ_0 принимались значения свободной поверхности ξ из установившегося решения, а значения функции d «забывались». Целью численного эксперимента являлось восстановление функции d по всей жидкой границе. Для этого, начиная с $d \equiv 0$, всюду на границе по морю восстанавливалась d по предлагаемому итерационному алгоритму.

Используемая процедура установления дает в качестве данных наблюдений функцию хорошей гладкости. Однако реальные данные наблюдений такой гладкостью, как правило, не обладают. В связи с этим в некоторых экспериментах на полученные после установления значения ξ на границе Γ_0 был наложен «белый шум». Затем зашумленные значения ξ брались в качестве наблюдаемых данных (рис. 1, а). Более того, в части экспериментов рассматривались данные наблюдений с пропусками, т.е. заданные только на части границы по морю (рис. 1, б).

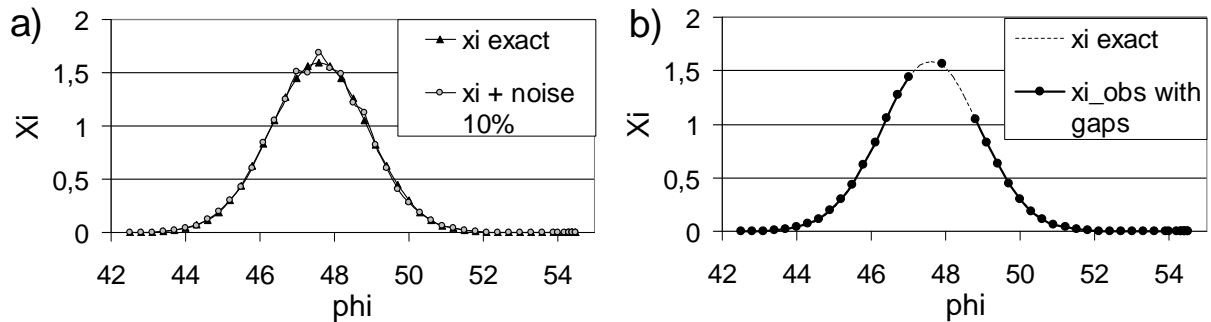


Рис. 1. Данные, принимаемые за наблюдаемые на одной из жидких границ Ω : а) — гладкие и зашумленные 10%-ым белым шумом, б) — заданные на части границы

Таким образом, Задача 1 решалась с использованием функционалов стоимости (6) и (7) в двух различных постановках.

1. Восстановление с «зашумленными» данными наблюдений. «Белый шум» удовлетворяет следующему условию: величина шума, добавляемая к каждому значению ξ , не должна превышать заданного процента от величины самого ξ . На рис. 2 и 3 для функционалов (6) и (7) соответственно показан процесс восстановления функций d и ξ для 10%-но зашумленных данных наблюдений.

Решение задачи с функционалом стоимости (6). Восстановление произошло за 19 итераций. На рис. 2 видно, что в процессе восстановления ξ стремится к зашумленным значениям, т.е. к заданным наблюдаемым данным. В этом случае Функция d оказалась очень чувствительной к внесенным погрешностям в данные наблюдений вплоть до потери гладкости, при этом отклонение от точного решения граничной функции d в

некоторых точках достигает 23%. Отметим, что при этом ошибка в равномерной норме восстановленного уровня свободной поверхности ξ имеет порядок 10^{-5} .

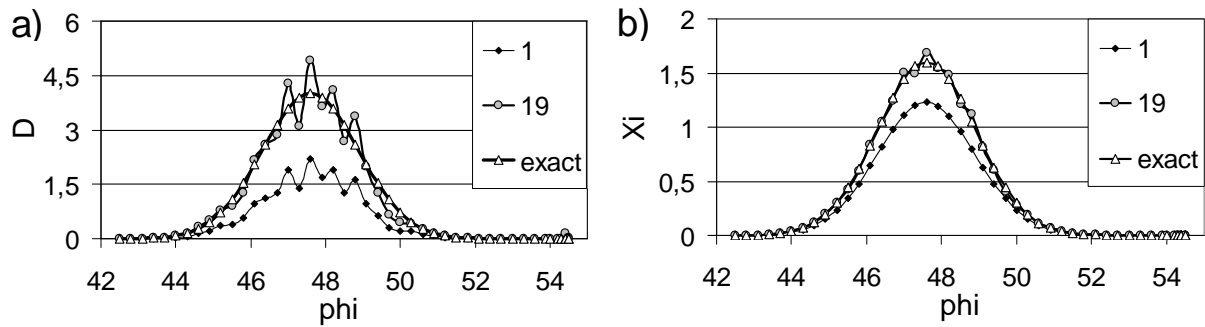


Рис. 2. Итерационное восстановление функций d (a) и ξ (b) на одной из жидких границ Ω для зашумленных данных наблюдений. Функционал стоимости в Задаче 1 имеет вид (6)

Решение задачи с функционалом стоимости (7). Восстановление произошло за 40 итераций. Не смотря на то, что объем вычислений в данном случае больше, чем в предыдущем, использование функционала стоимости (7) имеет преимущества в гладкости восстанавливаемой функции. Из рис. 3 видно, что восстановленная функция d сохраняет гладкость точной (8), несмотря на внесенные погрешности в данные наблюдений и близка к точному решению. В отличие от результатов, полученных для функционала (6), восстановленный на границе уровень ξ практически совпадает незашумленными данными наблюдений, т.е. при восстановлении происходит сглаживание погрешностей, внесенных «шумом».

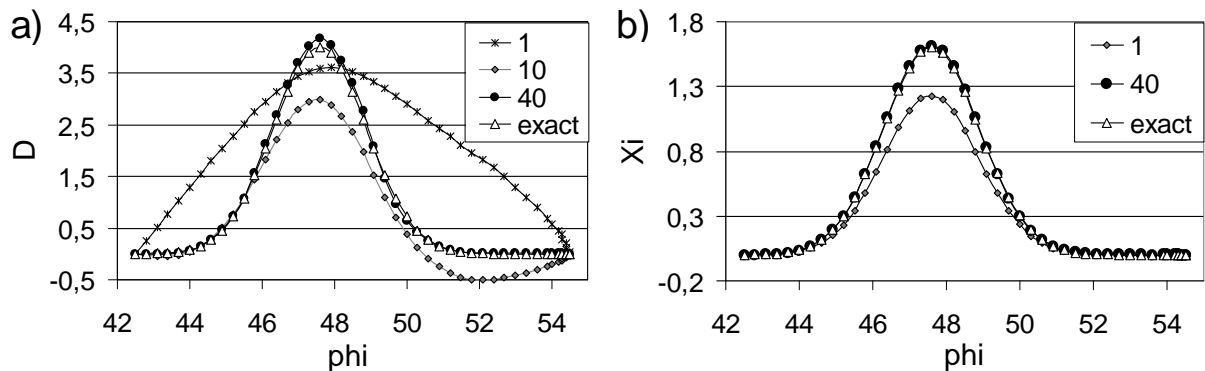


Рис. 3. Итерационное восстановление функций d (a) и ξ (b) на одной из жидких границ Ω для зашумленных данных наблюдений. Функционал стоимости в Задаче 1 имеет вид (7)

2. Восстановление с гладкими данными наблюдений, заданными на части границы по морю. В численном эксперименте решалась задача на восстановление функции d в случае, когда всюду на жидкой границе были заданы гладкие данные наблюдений за исключением множества точек, образующих два непересекающихся отрезка, вдоль границы по морю, соответствующей $\lambda = 161, 5^\circ$.

При решении задачи с использованием функционала стоимости (6) функция d восстановилась лишь в точках, где наблюдения были заданы. В точках, в которых данные

наблюдений о возвышении свободной поверхности отсутствовали, значения функции d на протяжении всего процесса восстановления оставались практически неизменными, равными первоначально заданному $d=0$.

Результаты численного эксперимента с использованием функционала стоимости (7) показаны на рис. 4. Там же изображен график данных наблюдений с пробелами. Из рисунка видно, что предлагаемый метод восстанавливает уровень свободной поверхности ξ и функцию d по всей жидкой границе, включая точки, в которых данные наблюдений не были заданы. Восстановление проходит за 142 итерации и демонстрирует хорошее согласование восстановленных значений с точным решением.

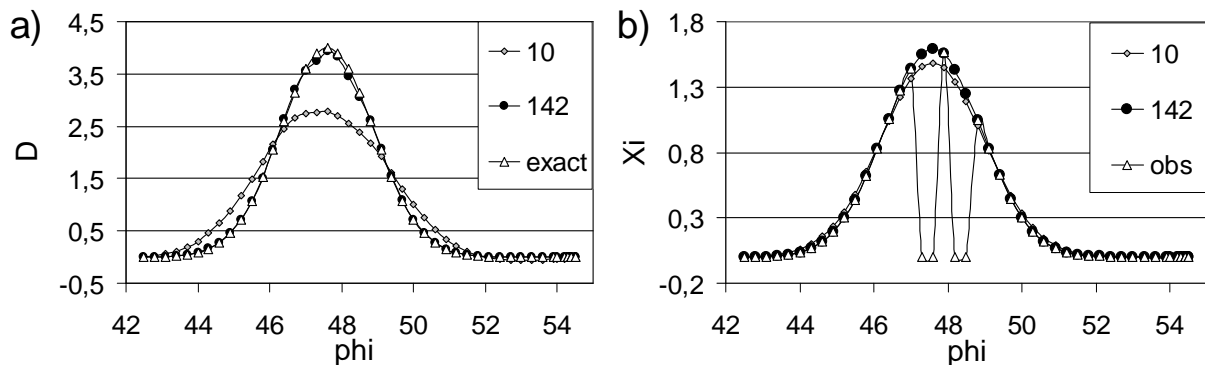


Рис. 4. Итерационное восстановление функций d (a) и ξ (b) на одной из жидких границ Ω для данных наблюдений с пробелами. Функционал стоимости в Задаче 1 имеет вид (7)

Численные эксперименты показали явное преимущество метода решения задачи на восстановление с использованием функционала стоимости (7). Метод не только восстановил данные по всей жидкой границе с части границы, но и оказался устойчивым к погрешностям, которые неизбежно вносят измерения.

Список литературы

- [1] МАРЧУК Г.И., КАГАН Б.А. Динамика океанских приливов. – Л.: Гидрометиздат, 1983.
- [2] AGOSHNIKOV V.I. Inverse problems of the mathematical theory of tides: boundary-function problem // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2005. – vol. 20, № 1. – P. 1–18.
- [3] КАМЕНШНИКОВ, L.P. Simulation of surface waves in basins by the finite element method / Kamenshchikov L.P., Karepova E.D., Shaidurov V.V. // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling – 2006. – Vol. 21(4). – Pp. 305–320.
- [4] КАРЕПОВА Е.Д., ШАЙДУРОВ В.В. Параллельная реализация МКЭ для начально-краевой задачи мелкой воды // Вычислительные технологии. – 2009. – Т.14, № 6. – С. 45–57.
- [5] АГОШКОВ В.И. Методы оптимального управления и сопряженных уравнений в задачах математической физики. – М.: ИВМ РАН, 2003. – 256 с.
- [6] КИРЕЕВ И.В., ПЯТАЕВ С.Ф. Пиксельная технология дискретизации акватории Мирового океана // Вычислительные технологии. – 2009. – Т.14, № 5. – С. 30–39.