Двухсеточный метод на сетке Шишкина для нелинейного уравнения второго порядка с пограничным слоем *

С. В. Тиховская

1. Введение

Исследуется сингулярно возмущенная краевая задача в случае нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Для такой задачи схема направленных разностей на сетке Г.И. Шишкина является равномерно сходящейся, но в случае нелинейной задачи для нахождения сеточного решения необходимо решить систему нелинейных уравнений. Для сокращения количества арифметических действий при нахождении сеточного решения на основе итераций используется двухсеточный метод, который предполагает предварительное решение краевой задачи на грубой сетке с последующей интерполяцией найденного решения на исходную сетку. Рассматриваются итерационные методы Ньютона и Пикара. Для повышения точности применяется метод Ричардсона.

2. Предварительный анализ

Рассмотрим краевую задачу:

$$Lu = \varepsilon u'' + a(x)u' = f(x,u), \qquad x \in \Omega = (0,1), \qquad u(0) = A, \quad u(1) = B, \tag{2.1}$$

где функции a, f – достаточно гладкие,

$$\varepsilon \in (0,1], \qquad a(x) \geqslant \alpha > 0, \qquad f'_u(x,u) \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \Omega \times R. \tag{2.2}$$

Известно, что решение задачи (2.1) при условиях (2.2) имеет погранслойный рост в окрестности $x = 0$. В соответствии с [2] зададим сетку:

$$S_{N,\sigma} = \{x_i : x_i = x_{i-1} + h_i, \quad x_0 = 0, \quad x_N = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, N\},$$

где

$$h_i = \frac{2\sigma}{N} = h_N,\ 1 \leqslant i \leqslant N/2; \quad h_i = \frac{2(1-\sigma)}{N} = H_N,\ N/2 < i \leqslant N, \quad \sigma = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{2\varepsilon}{\alpha}\ln N\right\}.$$

Теперь для задачи (2.1) выпишем схему направленных разностей:

$$L_\varepsilon^N u_i^N = \varepsilon \lambda_{xx}^N u_i^N + a_i \lambda_x^N u_i^N - f(x_i, u_i^N) = 0, \quad 0 < i < N, \qquad u_0^N = A, \quad u_N^N = B, \tag{2.3}$$

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 11-01-00875.

где

$$\lambda_x^N u_i^N = \frac{u_{i+1}^N - u_i^N}{h_{i+1}}, \qquad \lambda_{xx}^N u_i^N = \frac{(u_{i+1}^N - u_i^N)/h_{i+1} - (u_i^N - u_{i-1}^N)/h_i}{(h_i + h_{i+1})/2}.$$

Для схемы (2.3) обоснована оценка точности:

$$\max_i |u(x_i) - u_i^N| \leqslant C_0 \frac{\ln N}{N}, \tag{2.4}$$

где под C и C_i понимаем положительные постоянные, независящие от ε и N.

3. Описание двухсеточного метода

Решение схемы (2.3) может быть найдено на основе итераций. Остановимся на случае метода Ньютона:

$$\begin{gathered}\varepsilon\lambda_{xx}^N u_i^{(m+1)} + a_i\lambda_x^N u_i^{(m+1)} - f(x_i, u_i^{(m)}) - f'_u(x_i, u_i^{(m)})(u_i^{(m+1)} - u_i^{(m)}) = 0, \\ 0 < i < N, \qquad u_0^{(m+1)} = A, \quad u_N^{(m+1)} = B, \quad m \geqslant 0,\end{gathered} \tag{3.1}$$

где $u_i^{(m)} = u^{(m)}(x_i), \quad i = 0, \ldots, N$.

Пусть $\theta = \max\limits_{x\in\overline{\Omega},\ |\xi|\leqslant L+\delta} |f''_{uu}(x,\xi)|, \quad \|u^N\|_N = \max\limits_i |u_i^N| \leqslant L, \quad \delta = \|u^N - u^{(0)}\|_N$. Тогда несложно оценить скорость сходимости метода Ньютона:

$$\|u^{(m)} - u^N\|_N \leqslant \alpha\theta^{-1}(\alpha^{-1}\theta\delta)^{2^m}, \qquad m \geqslant 0. \tag{3.2}$$

Метод Ньютона (3.1) квадратично сходится, если $\alpha^{-1}\theta\delta < 1$. С учетом оценки погрешности (2.4) для схемы (2.3) заключаем, что итерации необходимо продолжать до достижения неравенства:

$$\|u^{(m_N)} - u^N\|_N \leqslant \Delta_N, \qquad \Delta_N = \frac{\ln N}{N}. \tag{3.3}$$

Учитывая оценку (3.2), заключаем, что для выполнения условия (3.3) потребуется число итераций

$$m_N \geqslant \log_2 \frac{\ln(\alpha^{-1}\theta\Delta_N)}{\ln(\alpha^{-1}\theta\delta)}. \tag{3.4}$$

На каждой итерации линейная задача (3.1) может быть разрешена методом прогонки, число арифметических действий при этом пропорционально числу неизвестных. Пусть dN — необходимое количество арифметических действий. Тогда для осуществления итераций с выполнением условия (3.4) потребуется количество арифметических действий:

$$N_N \approx dN \log_2 \frac{\ln(\alpha^{-1}\theta\Delta_N)}{\ln(\alpha^{-1}\theta\delta)}.$$

Количество итераций на исходной сетке можно существенно сократить, если использовать двухсеточный метод, аналогично подходу в [4]. Пусть $S_{n,\sigma}$ — сетка Шишкина, содержащая значительно меньшее, чем исходная, число узлов, n — число ее шагов. Решаем на сетке $S_{n,\sigma}$ задачу (2.1) с применением разностной схемы, соответствующей (2.3).

Схему разрешаем на основе метода Ньютона по аналогии с (3.1). Итерации прекращаем, если выполняется неравенство:

$$\|u^{(m_n)} - u^n\|_n \leqslant \Delta_n, \qquad \Delta_n = \frac{\ln n}{n}.$$

Далее найденное на сетке $S_{n,\sigma}$ сеточное решение $u^{(m_n)}$ интерполируем в узлы исходной сетки $S_{N,\sigma}$ с помощью кусочно-линейной интерполяции:

$$Int(x,u) = u_{i-1} + \frac{u_i - u_{i-1}}{X_i - X_{i-1}}(x - X_{i-1}), \qquad X_{i-1} \leqslant x \leqslant X_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

В соответствии с [1] на сетке Г.И. Шишкина формула линейной интерполяции является равномерно точной, а именно для некоторой постоянной C_1 при всех x выполнено $|Int(x,u) - u(x)| \leqslant C_1(\ln N)^2/N^2$. Теперь зададим начальное приближение для итераций (3.1) как проекцию функции $Int(x,u)$ на сетку $S_{n,\sigma}$. Таким образом, с помощью итераций на грубой сетке и интерполяции построено начальное приближение для итерационного метода (3.1) с точностью Δ_n, что приводит к сокращению количества итераций.

Оценим количество арифметических действий, которые необходимо совершить, для нахождения решения схемы (2.3) с применением двухсеточного метода:

$$N_{nN} \approx dn\log_2 \frac{\ln(\alpha^{-1}\theta\Delta_n)}{\ln(\alpha^{-1}\theta\delta)} + dN\log_2 \frac{\ln(\alpha^{-1}\theta\Delta_N)}{\ln(\alpha^{-1}\theta\Delta_n)} + I_n,$$

где I_n — количество арифметических действий, необходимое для интерполяции сеточного решения с крупной сетки на исходную более мелкую. Следовательно,

$$N_N - N_{nN} \approx d(N-n)\log_2 \frac{\ln(\alpha^{-1}\theta\Delta_n)}{\ln(\alpha^{-1}\theta\delta)} - I_n.$$

Аналогичным образом двухсеточный метод для нахождения решения схемы (2.3) может быть применен в случае итераций Пикара:

$$\begin{gathered}\varepsilon\lambda_{xx}^N u_i^{(m+1)} + a_i\lambda_x^N u_i^{(m+1)} - \beta u_i^{(m+1)} = f(x_i, u_i^{(m)}) - \beta u_i^{(m)}, \qquad 0 < i < N,\\ u_0^{(m+1)} = A, \qquad u_N^{(m+1)} = B.\end{gathered}$$

4. Обоснование метода Ричардсона

В двухсеточном методе решение вычисляется на двух сетках, поэтому можно использовать их для повышения точности численного решения, применив метод Ричардсона.

Пусть $N = kn$, где k — целое число. Обозначим решение (2.3) на $S_{n,\sigma}$ как $\check{u}^n$, а также $k_n = -n/(N-n)$, $k_N = N/(N-n)$.

Будем использовать декомпозицию для точного решения $u(x) = v(x) + w(x)$, где

$$\begin{gathered}Lv = f, \quad v(0) = A - w(0), \quad v(1) = B - w(1),\\ Lw = 0, \quad w(0) = w(1)e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}}, \quad |w(1)| \leqslant C,\end{gathered}$$

и декомпозицию $u^N = v^N + w^N$ для численного решения u^N на сетке $S_{N,\sigma}$, где

$$\begin{gathered}L^N v^N = f, \quad v_0^N = v(0), \quad v_N^N = v(1),\\ L^N w^N = 0, \quad w_0^N = w(0), \quad w_N^N = w(1).\end{gathered}$$

Аналогично для $\check{u}^n$ будет $\check{u}^n = \check{v}^n + \check{w}^n$. Тогда $u^N - u = (v^N - v) + (w^N - w)$ и $\check{u}^n - u = (\check{v}^n - v) + (\check{w}^n - w)$.

Будем проводить рассуждения аналогично [3] для $k_n\check{u}^n - k_N u^N$. Приведём основные моменты доказательств лемм, на которых отражается смена комбинации.

Пусть $\zeta(x) = a(x)v''(x)/2$ для любого $x \in [0,\, 1]$. Определим функцию $E(x)$ как решение задачи $\quad LE(x) = \zeta(x), \quad x \in [0,\, 1], \quad E(0) = E(1) = 0$.

Лемма 4. 1 . *Пусть* $\varepsilon \leqslant N^{-1}$. *Тогда для любого* $x_i \in [\sigma,\, 1]$ *существует* C, *что*

$$\left| v(x_i) - (k_n\check{v}^n(x_i) + k_N v^N(x_i)) \right| \leqslant kCN^{-2}.$$

Доказательство. Из [3] следует, что

$$\begin{aligned}
&\check{v}^n(x_i) - v(x_i) = H_n E(x_i) + O(n^{-2}) = kH_N E(x_i) + k^2 O(N^{-2}),\\
&v^N(x_i) - v(x_i) = H_N E(x_i) + O(N^{-2}).
\end{aligned}$$

Тогда выполнено

$$v(x_i) - (k_n\check{v}^n(x_i) + k_N v^N(x_i)) = -k_n(\check{v}^n - v)(x_i) - k_N(v^N - v)(x_i) = kO(N^{-2}),$$

что доказывает лемму. ▲

Лемма 4. 2 . *Пусть* $\varepsilon \leqslant N^{-1}$. *Тогда для любого* $x_i \in [0,\, \sigma]$ *существует* C, *что*

$$\left| v(x_i) - (k_n\check{v}^n(x_i) + k_N v^N(x_i)) \right| \leqslant kCN^{-2}.$$

Доказательство. Из [3] следует, что

$$\begin{aligned}
&L^N(v - \check{v}^n)(x_i) = \zeta(x_i)h_n + O(H_n^2) = k\zeta(x_i)h_N + k^2 O(H_N^2),\\
&L^N(v - v^N)(x_i) = \zeta(x_i)h_N + O(H_N^2).
\end{aligned}$$

Тогда выполнено

$$L^N(v - (k_n\check{v}^n + k_N v^N))(x_i) = k_n L^N(v - \check{v}^n)(x_i) + k_N L^N(v - v^N)(x_i) = -kO(H_N^2).$$

Из определения декомпозиций следует, что $v(1) - (k_n\check{v}^n + k_N v^N)(1) = 0$, а из леммы 4. 1 $|v(\sigma) - (k_n\check{v}^n + k_N v^N)(\sigma)| \leqslant kCN^{-2}$.

Применяя принцип максимума к $\pm(v(x_i) - (k_n\check{v}^n(x_i) + k_N v^N(x_i))$ для $x_i \in [0,\, \sigma]$, взяв в качестве барьерной функции $kCN^{-2}(1 + x_i)$, получим требуемое. ▲

Лемма 4. 3 . *Для любого* $x_i \in [\sigma,\, 1]$ *существует* C *такая, что*

$$\left| w(x_i) - (k_n\check{w}^n(x_i) + k_N w^N(x_i)) \right| \leqslant \frac{k(k+1)}{k-1}\frac{C}{N^2}.$$

Доказательство. Из [3] следует, что

$$|(w - \check{w}^n)(x_i)| \leqslant \frac{C}{n^2} = k^2\frac{C}{N^2}, \qquad |(w - w^N)(x_i)| \leqslant \frac{C}{N^2}.$$

Тогда выполнено

$$|w(x_i) - (k_n\check{w}^n + k_N w^N)(x_i)| = |k_n(w - \check{w}^n)(x_i) + k_N(w - w^N)(x_i)| \leqslant \frac{k(k+1)}{k-1}\frac{C}{N^2},$$

что доказывает лемму. ▲

Определим функцию $F(x)$ как решение следующей задачи:

$$LF(x) = \frac{2}{\alpha}\varepsilon a(x)w''(x), \quad x \in [0,\, \sigma], \qquad F(0) = 0, \quad F(\sigma) = w^N(\sigma) - w(\sigma).$$

Лемма 4. 4 . *Для любого* $x_i \in [0, \sigma]$ *существует* C *такая, что*

$$\left|w(x_i) - (k_n \check{w}^n(x_i) + k_N w^N(x_i))\right| \leqslant kCN^{-2}\ln^2 N.$$

Доказательство. Из [3] следует, что

$$w_i^N - w(x_i) = N^{-1}\ln N F(x_i) + O\left(N^{-2}\ln^2 N\right).$$

Из определения σ вытекает, что $\ln N = \alpha\sigma/(2\varepsilon)$. Тогда

$$w_i^N - w(x_i) = \frac{\alpha\sigma}{2\varepsilon}\frac{1}{N}F(x_i) + O\left(\left(\frac{\alpha\sigma}{2\varepsilon}\right)^2 \frac{1}{N^2}\right),$$

$$\check{w}_i^n - w(x_i) = \frac{\alpha\sigma}{2\varepsilon}\frac{1}{n}F(x_i) + O\left(\left(\frac{\alpha\sigma}{2\varepsilon}\right)^2 \frac{1}{n^2}\right) = k\frac{1}{N}\frac{\alpha\sigma}{2\varepsilon}F(x_i) + k^2 O\left(\frac{1}{N^2}\left(\frac{\alpha\sigma}{2\varepsilon}\right)^2\right).$$

Следовательно, выполнено

$$w(x_i) - (k_n\check{w}^n(x_i) + k_N w^N(x_i)) = k_n(\check{w}^n - v)(x_i) + k_N(w^N - v)(x_i) = -kO(N^{-2}\ln^2 N),$$

что доказывает лемму. ▲

Теорема 4. 1 . *Пусть* $\varepsilon \leqslant N^{-1}$. *Тогда существует* C , *что для любого* $x_i \in S_{n,\sigma}$

$$\left|u(x_i) - (k_n\check{u}^n(x_i) + k_N u^N(x_i))\right| \leqslant C\frac{k(k+1)}{(k-1)}\frac{\ln^2 N}{N^2}.$$

Доказательство. Для любого i верно

$$u(x_i) - (k_n\check{u}^n + k_N u^N)(x_i) = v(x_i) - (k_n\check{v}^n + k_N v^N)(x_i) + w(x_i) - (k_n\check{w}^n + k_N w^N)(x_i).$$

Тогда утверждение теоремы следует из лемм 4. 1 — 4. 4. ▲

Из теор. 4. 1 следует, что если k достаточно велико, то экстраполяция Ричардсона не даст существенный выигрыш. Поэтому значение $k = 2$ видится оптимальным.

5. Результаты численных экспериментов

Рассмотрим краевую задачу:

$$\varepsilon u'' + u' - ue^u - g(x) = 0, \qquad u(0) = A, \quad u(1) = B,$$

где A , B , $g(x)$ соответствуют точному решению $u(x) = e^{-\frac{x}{\varepsilon}} + \dfrac{1}{x+1}$.

Начальное приближение для итерационных методов задаем на основе линейной интерполяции с использованием заданных краевых условий. Итерационный метод завершаем, если выполнено условие:

$$\max_i |L_i^h u^{(m_h)}| \leqslant \alpha\Delta_N,$$

тогда в соответствии с оценкой устойчивости для схемы (2.3) будет верна оценка (3.3).

Результаты вычислений для метода Ньютона при $\varepsilon = 10^{-2}$ и $\alpha = 1$ приведены в табл. 1. В таблице (слева) при различных значениях N и n указано количество итераций двухсеточного метода на мелкой сетке, при этом в скобках приведено количество итераций на грубой сетке. В нижней строке указано число итераций односеточного метода в зависимости от N. В таблице (справа) при различных значениях N и n приведена норма погрешности двухсеточного метода после использования метода Ричардсона. В нижней строке для сравнения приведена норма погрешности односеточного метода в зависимости от N. Отметим, что результаты вычислений показали, что норма погрешности двухсеточного метода без использования метода Ричардсона и норма погрешности односеточного метода приблизительно равны, поэтому норму погрешности двухсеточного метода без использования метода Ричардсона не приводим.

Таблица 1

Количество итераций (слева) и норма погрешности (справа) односеточного и двухсеточного методов Ньютона, $\varepsilon = 10^{-2}$

n	N				
	128	512	2048	8192	40000
64	1(3)	2(3)	2(3)	2(3)	2(3)
128		1(3)	2(3)	2(3)	2(3)
256		1(4)	1(4)	2(4)	2(4)
512			1(4)	1(4)	2(4)
1024			1(4)	1(4)	2(4)
2048				1(4)	1(4)
4096				1(4)	1(4)
20000					1(4)
	3	4	4	4	4

n	N				
	128	512	2048	8192	40000
64	6.66e–3	1.08e–3	3.88e–4	1.39e–4	3.90e–5
128		1.05e–3	2.68e–4	7.79e–5	2.06e–5
256		9.75e–4	1.85e–4	5.53e–5	1.42e–5
512			1.28e–4	3.39e–5	8.92e–6
1024			1.04e–4	2.02e–5	5.04e–6
2048				1.24e–5	2.72e–6
4096				9.51e–6	1.48e–6
20000					5.60e–7
	2.55e–2	8.09e–3	2.49e–3	7.38e–4	1.78e–4

Итак, применение двухсеточного метода приводит к выигрышу в количестве арифметических действий и не приводит к понижению точности численного решения. А использование метода Ричардсона при $k = 2$ и значениях близких к нему повышает точность на порядок.

Литература

[1] Задорин А.И. *Метод интерполяции на сгущающейся сетке для функции с погранслойной составляющей // Журнал вычисл. матем. и матем. физики.* – 2008. – Т. 48, № 9. – С. 1673–1684.

[2] Шишкин Г.И. *Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений.* Екатеринбург: УрО РАН. – 1992. – 232 с.

[3] Natividad M.C., Stynes M. *Richardson extrapolation for a convection-diffusion problem using a Shishkin mesh // Applied Numerical Mathematics.* – 2003. – V. 45, № 2. – P. 315–329.

[4] Vulkov L.G., Zadorin A.I. *Two-Grid Algorithms for an ordinary second order equation with exponential boundary layer in the solution // International Journal of Numerical Analysis and Modeling.* – 2010. – V. 7, № 3. – P. 580–592.