

# Компьютерное моделирование прочностных характеристик волокнистых композиционных материалов на базе модели многоуровневых иерархических структур\*

Димитриенко Ю.И., Соколов А.П., Сборщиков С.В.

16 августа 2011 г.

Работа является естественным продолжением серии работ, осуществляемых на кафедре «Вычислительной математики и математической физики» МГТУ им.Н.Э.Баумана под руководством профессора Ю.И.Димитриенко.

Композиционные материалы находят все более широкое применение в различных отраслях промышленности. Наиболее ответственные узлы авиационной и ракетно-космической техники выполняют с использованием композитов. В связи с повышающимися требованиями к тактико-техническим характеристикам (увеличению ресурса эксплуатации, снижения общей массы и пр.) изделий и качеству их исполнения в целом, встает задача проектирования новых материалов с заранее заданными свойствами.

Композиционные материалы могут решить поставленные задачи, однако, возникают серьезные **проблемы**: на их создание требуются существенные затраты как временные так и материальные на экспериментальные исследования.

В связи с этим очевидным решением в сложившейся ситуации представляется использование современных вычислительных ресурсов для сокращения общего объема натурных исследований за счет проведения аналогичных численных экспериментов.

**Целью работы** было проведение численных экспериментов по нагружению структурных элементов композиционных материалов (ячеек периодичности) с целью определения упруго-прочностных характеристик композитов.

В качестве примера были выбраны тканевые волокнистые композиционные материалы двух типов плетения: полотняного (Рис.1) и сатинового (Рис.2). Оба материала моделировались как обладающие двухуровневой микроструктурой каждый, где верхний уровень был представлен ячейкой периодичности определяющей характер

---

\*Исследование выполнено при поддержке грантов Президента РФ МК-4223.2010.8, МК-2498.2011.8

переплетения комплексных нитей, а нижний уровень для обоих материалов был определен одинаково ячейкой периодичности 1D армированного композита(см. Рис.3).

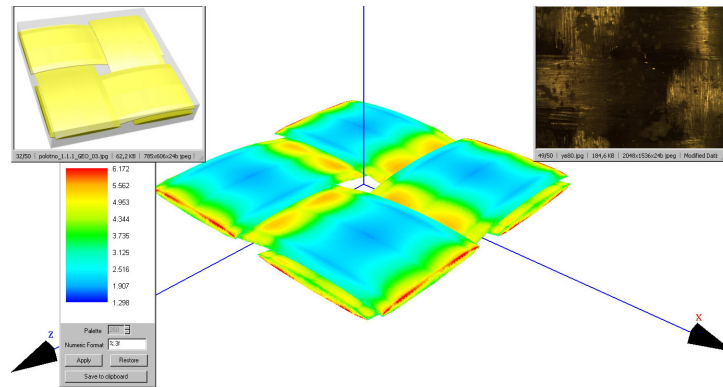
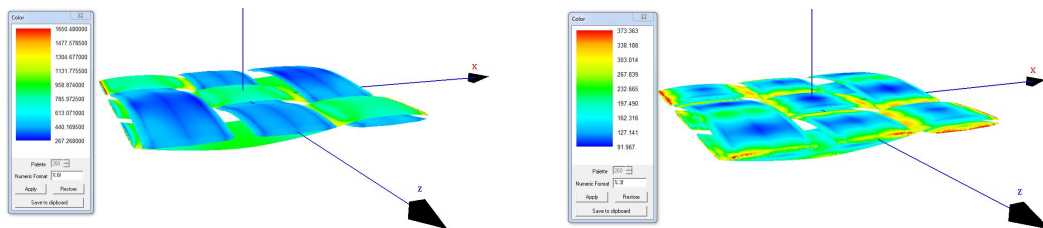


Рис. 1: Модель ячейки периодичности тканевого композиционного материала полотняного типа плетения, слева направо: геометрическая структура армирования ячейки периодичности(ЯП), конечно-элементная аппроксимация, некоторое характерное решение МКЭ, микрофотография полученная с помощью цифровой оптической микроскопии.



а) Решение задачи  $L_{11}$  МКЭ на ячейке периодичности тканевого композиционного материала сатинового типа плетения. Поле компоненты тензора напряжений  $\sigma_{xx}$ . Представлены микронапряжения в волокнах.

б) Решение задачи  $L_{13}$  МКЭ на ячейке периодичности тканевого композиционного материала сатинового типа плетения. Поле компоненты тензора напряжений  $\sigma_{xz}$ . Представлены микронапряжения в волокнах.

Рис. 2: Примеры решенных МКЭ задач о напряженно-деформированном состоянии.

Для достижения цели были поставлены следующие **задачи**:

1. Разработать математическую модель упруго-прочностных характеристик композиционных материалов, с использованием метода многоуровневой асимптотической гомогенизации (МАГ) [3].
2. Разработать численный алгоритм и автоматизированное программное обеспечение поиска упруго-прочностных характеристик композиционных материалов, обладающих периодической многоуровневой иерархической структурой.

В качестве **методов реализации** были выбраны:

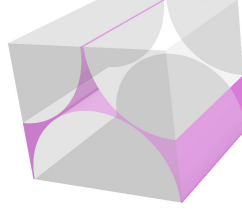


Рис. 3: Модель ячейки периодичности 1D-армированного композиционного материала.

1. язык программирования C/C++;
2. использование специализированной программной платформы **GCD** в качестве основы для разработки МКЭ решателей, разработанной на кафедре «Вычислительной математики и математической физики» МГТУ им.Н.Э.Баумана, включающей базовые вычислительные и вспомогательные библиотеки методов: асимптотического осреднения, конечных элементов; библиотеку векторных операций и средств пре- и пост- процессинговых операций ввода/вывода данных;
3. использование специализированных алгоритмов хранения разреженных матриц жесткости и методов работы с ними.

В работе был предложен **новый подход** к микроструктурному исследованию упруго-прочностных характеристик тканевых волокнистых композиционных материалов.

Используя ранее полученные результаты численной апробации метода асимптотического осреднения (МАО)[2, 3, 4], теория которого была предложена в работах[1, 7], был разработан новый метод многоуровневой асимптотической гомогенизации (МАГ)[5], позволивший обобщить метод асимптотического осреднения на случай ячеек периодичности, обладающих сложной многоуровневой микроструктурой армирования. Новый метод привел к необходимости решения специального класса «локальных задач» нулевого уровня (1) на ячейках периодичности моделей микроструктуры композита.

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(0)} = 0, \xi \in V, \\ \boldsymbol{\sigma}^{(0)} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}, \\ 2\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} = 2\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \nabla \otimes \mathbf{u}^{(1)} + \nabla \otimes \mathbf{u}^{(1)T}, \\ [\boldsymbol{\sigma}^{(0)}] \cdot \mathbf{h} = 0, \quad [\mathbf{u}^{(1)}] = 0, \quad \xi \in \Sigma_{\alpha\beta}, \\ \langle \mathbf{u}^{(1)} \rangle = 0, \quad [[\mathbf{u}^{(1)}]] = 0, \end{array} \right. \quad (1)$$

где  $V$  - область ЯП;  $\boldsymbol{\sigma}$  – тензор напряжений;  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – тензор малых деформаций;  $\mathbf{u}$  – вектор перемещений;  $\mathbf{h}$  – вектор внешней нормали к поверхности  $\Sigma_{\alpha\beta}$  области  $V$ ;  $\alpha, \beta$  – номера компонент с различными свойствами в модели ячейки периодичности. Первое уравнение (1) – уравнение равновесия, второе – физические(определяющие)

соотношения и третье – соотношения Коши, далее следуют: граничные условия, условия идеального контакта и специальные условия периодичности, появляющиеся за счет периодической структуры КМ в целом и условия нормировки по ЯП.

Решая локальные задачи (1) и используя операции осреднения по ЯП для каждого структурного уровня, были получены эффективные упругие характеристики исследуемых материалов, а также были определены поля компонент тензора концентраций микронапряжений.

Для определения упруго-прочностных характеристик (см. Рис.4) был использован тензорно-полиномиальный критерий прочности Цая-Ву [6, 9].

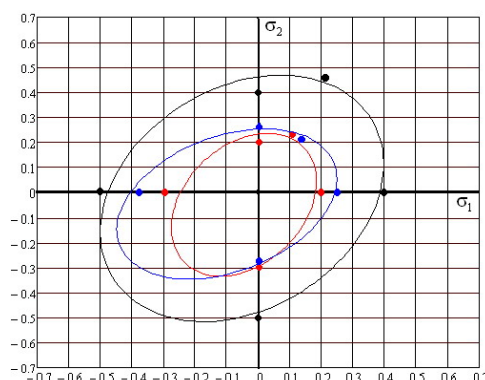


Рис. 4: Сечения аппроксимированных поверхностей прочности компонент КМ и самого КМ, полученные с использованием новой оригинальной методики и разработанного программного обеспечения.

В работе были разработаны: оригинальные математические модели тканевых КМ; разработан дополнительный модуль к системе проведения инженерных расчетов **GCD**, который позволил решить поставленные задачи; разработаны и апробированы высокопроизводительные алгоритмы решения СЛАУ большой размерности: метод сопряженных градиентов, метод CSIR («Skyline format»)[10].

## Список литературы

- [1] Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
- [2] Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Разработка численного метода расчета эффективных упругих характеристик композиционных материалов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. – 2008. – №2. – С. 56–67.
- [3] Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Система автоматизированного прогнозирования свойств композиционных материалов // Информационные технологии. – 2008. – №8. – С. 31–38.

- [4] Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Об упругих свойствах композиционных материалов // Математическое моделирование. - 2009. - Т.21. - №4. - С. 96-110.
- [5] Y. I. Dimitrienko and A. P. Sokolov Elastic properties of composite materials// Mathematical Models and Computer Simulations, 2010, Volume 2, Number 1, Pages 116-130.
- [6] Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М.: Мир, 1982. - 335 с.
- [7] Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. - М.: МГУ, 1984. - 336 с.
- [8] Бардзокас Д.И., Зобнин А.И. Математическое моделирование физических процессов в композиционных материалах периодической структуры. – М.: Эдиториал УРСС, 2003, - 376 с.
- [9] Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопротивление полимерных и композитных материалов. – Рига: Зинатне, 1980. – 572 с.
- [10] Баландин М.Ю. Методы решения СЛАУ большой размерности. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2000. – 70 с.
- [11] Немировский Ю.В. Резников Б.С. Прочность элементов конструкций из композитных материалов. – Новосибирск: Наука, 1986. – 166 с.