

Однозначность идентификации тепловых источников в модели сложного теплообмена

Глеб Гренкин

(Владивостокский государственный университет)

Конференция «Теория и численные методы решения
обратных и некорректных задач»
(Новосибирск, 2024)

Стационарное состояние сложного теплообмена подчиняется уравнениям
В области:

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a(\theta^4 - \varphi) = f$$

$$-\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - \theta^4) = 0$$

На границе:

$$a\frac{\partial\theta}{\partial n} + \beta(\theta - \theta_b) = 0$$

$$\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial n} + \gamma(\varphi - \theta_b^4) = 0$$

$\theta(x)$ — нормированная температура, $\varphi(x)$ — нормированная и усредненная интенсивность излучения

Обратная задача

В области Ω действует несколько источников, мощности которых q_i мы не знаем, но знаем пространственную плотность f_i

$$\begin{aligned} -a\Delta\theta + b\kappa_a(\theta^4 - \varphi) &= \sum_{i=1}^m q_i f_i \\ -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - \theta^4) &= 0 \end{aligned}$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов q_i задается интегральное переопределение:

$$\int_{\Omega} f_j(x)\theta(x) dx = r_j, \quad j = 1..m$$

Похожая обратная задача сформулирована для модели переноса кислорода в тканях мозга, когда требуется восстановить источник кислорода по информации о средней концентрации кислорода в крови (Kovtanyuk A.E. et al., 2021)

- ▶ Прямая задача имеет единственное решение
- ▶ Стационарное состояние устойчиво по Ляпунову
- ▶ Решение обратной задачи существует, есть условия единственности решения

Численный метод решения обратной задачи

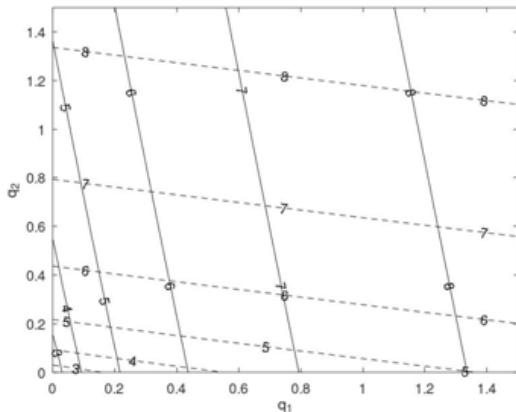
- ▶ Переходим от координат q_i к координатам s_j , выражающим суммарную энергию в каждом источнике
 - ▶ На каждой итерации алгоритма прибавляем к s_j разность $r_j - \int_{\Omega} f_j(x) \theta(x) dx$, то есть управляем суммарной энергией, сосредоточенной в каждом источнике
 - ▶ Остается вопрос о сходимости этого метода
1. Гренкин Г.В. Единственность решения обратной задачи для модели сложного теплообмена // Сиб. электрон. матем. изв. 2024. Т. 21, № 1. С. 98–104.
 2. Гренкин Г.В. Управление нагревом области в рамках модели сложного теплообмена // Информатика и системы управления. 2024. № 1 (79). С. 121–125.
 3. Гренкин Г.В. Численное решение обратной задачи восстановления тепловых источников // Территория новых возможностей. Вестник Владивостокского государственного университета. 2024. Т. 16, № 2. С. 161–170.

Численный пример

Одномерная задача – теплообмен в плоском слое (среда – воздух)

Обозначим $F_j(q) = \int_{\Omega} f_j(x)\theta[q](x) dx$

На рисунке изолинии $F_1(q_1, q_2)$ (сплошная линия) и $F_2(q_1, q_2)$ (пунктир)

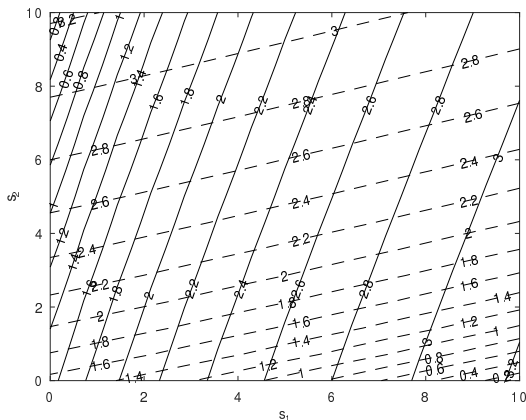


Численный пример в других координатах

Обозначим $F_j(\mathbf{q}) = \int_{\Omega} f_j(x) \theta[\mathbf{q}](x) dx$, $G_j(\mathbf{q}) = \frac{\alpha}{a} \int_{\Omega} f_j(x) \varphi[\mathbf{q}](x) dx$,
 $S_j(\mathbf{q}) = F_j(\mathbf{q}) + b G_j(\mathbf{q})$

Линейная связь между $\{q_i\}$ и $\{s_j\}$: $s_j = \sum_{i=1}^m q_i (f_j, A_1^{-1} f_i) + (f_j, A_1^{-1} h_1)$

На рисунке изолинии $F_1(s_1, s_2)$ (сплошная линия) и $F_2(s_1, s_2)$ (пунктир)



Найдем производные тепла и излучения по источникам:

$$\frac{\partial F_j(\mathbf{q})}{\partial q_i} = (f_j, P[\theta(\mathbf{q})]f_i), \quad \frac{\partial G_j(\mathbf{q})}{\partial q_i} = (f_j, Q[\theta(\mathbf{q})]f_i)$$

Здесь $u = P[\theta]g$ и $z = Q[\theta]g$ задают решение линеаризованной задачи

$$\begin{aligned} -a\Delta u + b\kappa_a(4|\theta|^3 u - z) &= g, & -\alpha\Delta z + \kappa_a(z - 4|\theta|^3 u) &= 0, \\ a\frac{\partial u}{\partial n} + \beta u &= 0, & \alpha\frac{\partial z}{\partial n} + \gamma z &= 0 \end{aligned}$$

Лемма. Для любой функции g : $(g, Q[\theta]g) \geq 0$.

Из уравнений следует, что

$$(g, Q[\theta]g) = (g, A_1^{-1}A_2z) = (A_1u + bA_2z, A_1^{-1}A_2z) = (A_2z, u) + b(A_2z, A_1^{-1}A_2z).$$

Здесь второе слагаемое неотрицательно. Далее докажем неотрицательность первого слагаемого, которая сводится к неравенству

$$\kappa_a(4|\theta|^3u, (A_2 + \kappa_a I)^{-1}u) \leq (4|\theta|^3u, u).$$

Определим скалярное произведение $[u, v] = (4|\theta|^3u, v)$ и оператор $T: V \rightarrow V$ по формуле $((Tu, v)) = [u, v]$, где $((u, v)) = (A_2u, v)$.

Поскольку оператор T самосопряженный и компактный, применим теорему Гильберта – Шмидта и разложим функции по базису из собственных функций оператора T , откуда получим утверждение леммы:

$$\kappa_a[(A_2 + \kappa_a I)^{-1}u, u] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\kappa_a}{\lambda_k + \kappa_a} c_k^2 w_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 w_k = [u, u].$$

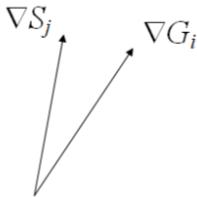
Условие директивности

Условие директивности:

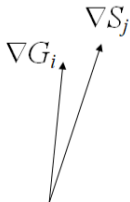
$$(f_i, Q[\theta]f_i) > (f_i, Q[\theta]f_j) \frac{(f_i, A_1^{-1}f_j)}{(f_j, A_1^{-1}f_j)}$$

Если оно выполнено, то при увеличении мощности i -го источника так, что суммарная энергия в j -м источнике $S_j(q)$ не уменьшается, то энергия излучения в i -м источнике $G_i(q)$ увеличивается

есть директивность



нет директивности



Из леммы вытекает, что если источники i, j не директивны, то источники j, i директивны

Зачем нужна директивность?

- ▶ При соблюдении свойства директивности знак разности $r_j - F_j(\mathbf{q})$ сохраняется в процессе выполнения алгоритма, что обеспечивает ограниченность последовательности приближений
- ▶ Если директивности нет, то шаг покоординатного алгоритма придется повторять дважды для j -го источника

Когда директивность нарушена?

- ▶ Вычислительные эксперименты для плоскопараллельного слоя не выявили таких ситуаций
- ▶ Можно рассмотреть предельный случай, когда теплопроводностью пренебрегаем, и теплообмен только за счет излучения. Тогда можно предположить, что директивность будет нарушаться при разном размере излучающих источников и при определенном расстоянии друг от друга
- ▶ Двумерные вычисления технически сложнее, поэтому не проводились

Можно предположить, что нарушение директивности в аналогичной модели с кислородом в мозге связана с возникновением гипоксии (если допустить, что в реальности мозг управляет суммарным количеством кислорода)

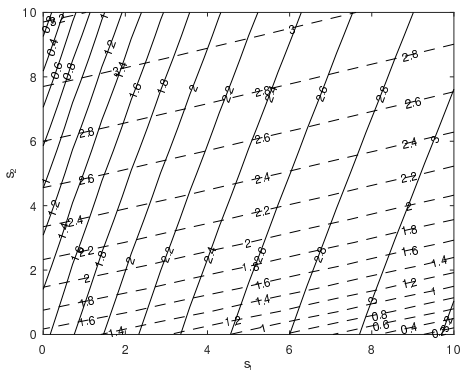
Аналог температуры — кислород в крови, аналог излучения — кислород в ткани

Условие монотонности

Потребуем выполнения условия монотонности: векторы ∇F_i и ∇S_j должны быть положительно ориентированы при $i \neq j$

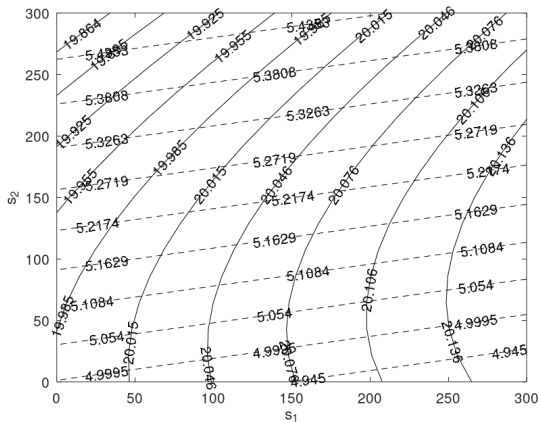
Исследуем вопрос монотонности в случае двух источников и пропорциональных эллиптических операторов: $\beta/a = \gamma/\alpha$

Условие монотонности приводит к тому, что изолинии $F_j = \text{const}$ выражаются возрастающими функциями в координатах s_i



Нарушение условия монотонности

Можно подобрать численный пример с нарушением условия монотонности. Однако можно предположить, что область убывания соответствует нефизичному случаю $\theta < 0$



Вывод о единственности решения

При выполнении условия монотонности, если найдется два физических ($\theta \geq 0$) решения обратной задачи, то у одного из них обе координаты s_1, s_2 больше, чем у другого

То есть выполняется почти единственность, и алгоритм должен сойтись к минимальному (наиболее экономичному по расходу энергии) решению

- ▶ Требуется минимизировать $\frac{\partial F_1(q)}{\partial q_1} - c \frac{\partial F_1(q)}{\partial q_2}$ по q , где $c = (f_1, A_1^{-1} f_2) \in [0, 1]$, $(f_j, A_1^{-1} f_j) = 1$
- ▶ Продифференцируем это выражение по q_i и приравняем к 0:

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial q_1^2} - c \frac{\partial^2 F_1}{\partial q_1 \partial q_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F_1}{\partial q_1 \partial q_2} - c \frac{\partial^2 F_1}{\partial q_2^2} = 0$$

Домножим второе равенство на c и вычтем из первого:

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial q_1^2} - 2c \frac{\partial^2 F_1}{\partial q_1 \partial q_2} + c^2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial q_2^2} = 0$$

- ▶ Справедливо равенство ($u_i = P[\theta] f_i$):

$$\frac{\partial F_j}{\partial q_i \partial q_k} = -12b\kappa_a(f_j, P[\theta] A_2 (A_2 + \kappa_a I)^{-1} (|\theta| \theta u_i u_k)),$$

где $P[\theta]$ — оператор, который по правой части f дает решение u линеаризованной системы

$$A_1 u + b\kappa_a(4|\theta|^3 u - z) = f, \quad A_2 z + \kappa_a(z - 4|\theta|^3 u) = 0$$



$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial q_1^2} - 2c \frac{\partial^2 F_1}{\partial q_1 \partial q_2} + c^2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial q_2^2} = 0$$



$$\frac{\partial F_j}{\partial q_i \partial q_k} = -12b\kappa_a(f_j, P[\theta]A_2(A_2 + \kappa_a I)^{-1}(|\theta|\theta u_i u_k)),$$



Отсюда

$$(f_j, P[\theta]A_2(A_2 + \kappa_a I)^{-1}(|\theta|\theta(u_1 - cu_2)^2) = 0$$



В случае $\theta \geq 0$ функция под знаком оператора неотрицательна, а в случае пропорциональных операторов этот оператор R действует очень просто: $Rh = g$, где $Ag + \kappa_a g + 4b\kappa_a|\theta|^3 g = h$, тогда при $h > 0$ имеем $g > 0$



Получаем условие экстремума: $u_1 = cu_2$ в $\text{supp } f_1$, что соответствует коллинеарности векторов ∇F_1 и ∇S_2

Благодарю за внимание!

Gleb.Grenkin@vvsu.ru
github.com/lapkin25