

Определение коэффициента теплопередачи в слоистых средах для параболических уравнений

Белоногов В.А.

Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск
vladimir.belonogow@yandex.ru

Мы исследуем обратные задачи об определении коэффициентов теплопередачи, входящих в условие сопряжения. Рассматривается параболическое уравнение вида

$$Mu = u_t - Lu = f(t, x), \quad (t, x) \in Q = (0, T) \times G, \quad (1)$$

где $Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(t, x)u_{x_i} + a_0(t, x)u$, $G \in \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей Γ . Считаем, что область G разделена на два открытых множества G^+ и G^- . Мы рассматриваем один частный, но важный случай, когда условие $G^- \subset G$ не выполнено. В этом случае в качестве пространственной области берем цилиндрическую область $G = \Omega \times (0, l)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $\partial\Omega \in C^2$), причем $G^+ = \cup_i G^{2i}$, $G^- = \cup_i G^{2i-1}$, $G^i = \Omega \times (l_{i-1}, l_i)$, $l_0 = 0 < l_1 < \dots < l_m = l$.

Введём обозначения: $\Gamma^0 = \partial\Omega \times (0, l)$, $S^0 = (0, T) \times \Gamma^0$.

Уравнение (1) дополняется начальными и краевыми условиями:

$$Ru|_{S^0} = \varphi, \quad (2)$$

где $Ru = u$ или $Ru = \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}u_{x_j}v_i + \sigma u$;

$$u(0, x) = u_0(x) \quad (x \in G), \quad R_0 u(t, x', 0) = \varphi_0, \quad R_1 u(t, x', l) = \varphi_1, \quad (3)$$

где $R_0 u = u$ или $R_0 u = -u_{x_n} + \sigma_0 u$, соответственно, $R_1 u = u$ или $R_1 u = u_{x_n} + \sigma_1 u$, а также условиями сопряжения:

$$B_i^+ u = \frac{\partial u_i^+}{\partial N} - \beta_i(u_i^+ - u_i^-) = g_i^+, \quad \frac{\partial u_i^+}{\partial N} = \frac{\partial u_i^-}{\partial N}, \quad i = 1, \dots, m-1, \quad (4)$$

где $\frac{\partial u_i^\pm}{\partial N}(t, x') = \lim_{x_n \rightarrow l_i \pm 0} a_{nn} u_{x_n}(t, x', x_n)$, $u_i^\pm = \lim_{x_n \rightarrow l_i \pm 0} u(t, x', x_n)$.

Пусть $x_{ij} = (x'_{ij}, l_j) \in \Gamma_0 = \partial G^+ \cap \partial G^-$ ($j = 1, 2, \dots, m-1$, $i = 1, 2, \dots, N_j$) – некоторый набор точек. К условиям сопряжения мы добавляем условия перепределения вида

$$u(t, x'_{ij}, x_n)|_{x_n=l_j+0} = \varphi_{ij}(t), \quad i = 1, 2, \dots, M_j, \\ u(t, x'_{ij}, x_n)|_{x_n=l_j-0} = \varphi_{ij}(t), \quad i = M_j + 1, \dots, N_j. \quad (5)$$

Задача состоит в нахождении решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям (2)-(5) и неизвестных функций β_i вида $\beta_i = \sum_{j=1}^{N_i} \alpha_{ij}(t)\Phi_{ij}(t, x')$ ($i = 1, 2, \dots, m-$

1, $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$), где функции Φ_{ij} заданы, а функции α_{ij} считаются неизвестными.

В настоящее время имеется большое количество работ, посвященных решению обратных задач тепломассопереноса в различных постановках, возникающих в приложениях. Но результаты связаны в основном с численным решением обратных задач. Насколько нам известно, теоретических результатов о разрешимости (или единственности решений) задач вида (1)-(5) в литературе не имеется. Однако теоретическое исследование и построение на этой основе новых теоретических результатов и надежных численных методов имеет большое значение. Как раз в данной работе мы изучаем вопросы корректности задачи (1)-(5), в частности, теоремы существования и единственности решений.