ВЫЧИСЛЕНИЕ РЕНОРМАЛИЗАЦИОННОЙ КОНСТАНТЫ СВЯЗИ ТРЕХМЕРНОЙ МОДЕЛИ ИЗИНГА

авторы: А.М. Костащук, А.Н. Вакилов

кафедра теоретической физики ОмГУ

Омск – 2020

Критические индексы

Теплоемкость: $C \sim |T - T_c|^{-\alpha}$;
Восприимчивость: $\chi \sim |T - T_c|^{-\gamma}$;
Корреляционная длина: $\xi \sim |T - T_c|^{-\nu}$;
Время релаксации: $\tau \sim |T - T_c|^{-z\nu}$;

$$z = 2 + \gamma_\lambda(g_R^\infty);$$
$$\nu = 2 + \gamma_r(g_R^\infty);$$
$$\eta = \gamma_\varphi(g_R^\infty);$$

Функции $\gamma_\lambda, \gamma_r, \gamma_\varphi$ вычисляются в виде ряда по g.

Модель Изинга

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle}^{N} S_i S_j, \qquad (1)$$

где J- константа обменого взаимодействия. $J > 0$ - феромагнетики, $J < 0$ - антиферомагнетики. S_i - спин который может принимать значения ± 1.

Вычисляемые величены

Намагниченность:

$$M = \sum_{i}^{N} S_i \tag{2}$$

Восприимчивость :

$$\chi = \frac{\left\langle M^2 \right\rangle - \left\langle M \right\rangle^2}{kT} \tag{3}$$

Вычисляемые величены

Корреляционная длина:

$$\xi = \frac{1}{2sin\left(\frac{\pi}{L}\right)}\sqrt{\frac{\chi}{F} - 1}, \tag{4}$$

где $F = \frac{\langle\phi\rangle}{L^3}$,

$$\phi = \frac{1}{3}\left(\left|\sum_i S_i exp\frac{2\pi x_{1,i}}{L}\right)\right|^2 +$$
$$+\left|\sum_i S_i exp\frac{2\pi x_{2,i}}{L}\right)^2 + \left|\sum_i S_i exp\frac{2\pi x_{3,i}}{L}\right)^2 \tag{5}$$

Ренормализационная константа связи

$$g_R = 3\left(\frac{L}{\xi}\right)^3 \left(1 - \frac{\langle M^4 \rangle}{3\left\langle M^2 \right\rangle^2}\right) \qquad (6)$$

Ренормализационная константа связи[1]

$$g_R^{\infty} \equiv \lim_{\beta \to \beta_c^-} \lim_{L \to \infty} g_R(L, \beta) \neq \lim_{L \to \infty} \lim_{\beta \to \beta_c} g_R(L, \beta) \equiv \widetilde{g}_R, \qquad (7)$$

где $\beta = 1/T$ – обратная температура.

---

[1] Kim J.K., de Souza A.J., Landau D.P. Numerical Computation of Finite Size Scaling Functions: An Alternative Approach to Finite Size Scaling // Phys.Rev. E. 1996. V. 54. P. 2291-2301.
Ballesteros H.G., Fernández L.A., Martín-Mayor V., Muñoz Sudupe A. Finite Size Scaling and "perfect " actions: the three dimensional Ising model // Physics Letters B, V441, Issue 1-4, P. 330-338.

Метод перевзвешивания

$$\langle O \rangle_\beta = \frac{\sum_E O(E) h_\beta}{\sum_E h_\beta(E)} = \frac{\sum_E O(E) h_{\beta c}(E) e^{-(\beta-\beta_c)E}}{\sum_E h_{\beta c} e^{-(\beta-\beta_c)E}}, \qquad (8)$$

где E - энергия системы, $h_\beta(E)$ - число состояний с энергией.

Кластерный алгоритм Вольфа[2]

Алгоритм Монте-Карло в варианте Вольфа

1. Выбирается случайный спин в решетке, назовем его центральным. Затем он переварачивается, т.е заменяет значение на противоположное.
2. Далие если его соседний спин сонаправлен с неперевернутым центральным, то с вероятностью $1 - \exp(-2/T)$ этот спин переворачивается, а координаты запоминаются в стеке.
3. После проверки всех соседних узлов. последний спин в стеке выбирается центральным и повторяется п. 2.
4. Процедура заканчивается опустошением стека. Этот процесс называется переворотом кластера и соответствует одному шагу Монте-Карло.

---

[2]6. Wolf U. Collective Monte Carlo updating for spin systems // Phys. Rev.Lett. 1989. V. 62. P. 361–364.

Пораметры моделировани

Были рассмотрены размеры решетки $L = 32, 48, 64, 96, 128$; при критической температуре. Усреднение термодинамических величин проводилось по $2 * 10^6$ различным состояниям, соответствующим одному шагу Монте-Карло.
Условие достижения термодинамического предела: $L/\xi = 6$

Полученые результаты

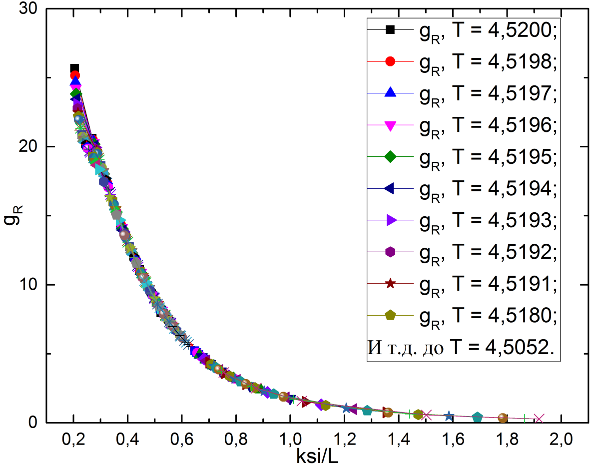

Рис. 1. График зависимости константы связи g_R от ksi/L

Полученые результаты

Таблица 1. Таблица зависимости константы связи g_R от температуры

T	g_R
4.5242	27.39(2)
4.5241	27.32(3)
4.5240	27.25(3)
4.5239	27.18(2)
4.5238	27.12(4)
4.5237	27.07(2)
4.5317	28.23(4)
4.5316	28.06(4)

Заключение

Скейлинговой зависимости для g_R

$$g_R(\tau) = g_R^{\infty}(1 + \alpha\tau^{\theta}) \qquad (9)$$

Из полученных данных было получено значение $g_R^{\infty} = 23{,}85(3)$, которое хорошо соотноситься с теоретико-полевым значением $g_R^{\infty} = 23{,}73(2)$[4] и результатами Монте-Карло $g_R^{\infty} = 23{,}3$-$26{,}4$[5]

[4] Ballesteros H.G., Fernández L.A., Martín-Mayor V., Muñoz Sudupe A. Finite Size Scaling and “perfect ” actions: the three dimensional Ising model // Physics Letters B, V441, Issue 1-4, P. 330-338.

[5] Kim J.K., de Souza A.J., Landau D.P. Numerical Computation of Finite Size Scaling Functions: An Alternative Approach to Finite Size Scaling // Phys.Rev. E. 1996. V. 54. P. 2291-2301.

Спасибо за внимание!