

**МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗРЫВНЫМ МЕТОДОМ ГАЛЁРКИНА
ВОЗДЕЙСТВИЯ ЛЕДЯНОГО ПОЛЯ
НА ВЕРТИКАЛЬНУЮ ЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ ОПОРУ**

© 2018 г. *В.А. Миряха*^{1,2}, *И.Б. Петров*²

¹Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

²Московский физико-технический институт
vlad.miryaha@gmail.com

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 14-11-00434

Представлен подход к моделированию воздействия ледяного поля на цилиндрическую вертикальную опору, а также детальный обзор сопутствующих сложностей. Приведены сведения о реологии льда используемой механико-математической модели, позволяющей добиться баланса между точностью результатов моделирования и необходимым объемом вычислительных ресурсов. Описан численный метод, а также некоторые особенности моделирования и приемы, позволяющие преодолеть ряд трудностей, связанных с ресурсоемкостью вычислений. Обсуждаются характерные картины разрушений ледяных полей и распределений давления на опоры. Численные результаты, полученные в данной работе, демонстрируют возможность практического приложения механико-математической модели и её программной реализации к задачам безопасности нефтегазовых платформ на шельфе Арктики.

Ключевые слова: математическое моделирование, механика сплошных сред, контактное взаимодействие, прочность, разрушение, морской лед, разрывный метод Галеркина.

**DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD FOR SIMULATION OF ICE FLOW
IMPACT ON VERTICAL CYLINDER OFFSHORE STRUCTURE**

V.A. Miryaha^{1,2}, *I.B. Petrov*²

¹Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow

²Moscow Institute of Physics and Technology (State University)

This paper describes an approach to numerical simulation of ice field impact on cylinder vertical offshore structure, as well as detailed review of related complications. The paper presents information on ice rheology, a continuous mechanics model used, which makes it possible to achieve a balance between accuracy and amount of computational resources needed. The description of the numerical method, and also some features of the simulation and techniques, which allow to overcome a number of difficulties associated with the resource-intensive calculations, are given. Typical destruction patterns of the ice fields and pressure distributions on structures are discussed. Presented numerical results demonstrate applicability of ice model and implemented software to industrial problems of safety of oil and gas platforms on the Arctic shelf.

Key words: numerical simulation, continuous mechanics, contact interaction, strength, destruction, sea ice, discontinuous Galerkin method.

Введение

В последнее время интерес к численному моделированию взаимодействия крупных ледяных образований (КЛО) со стационарными морскими ледостойкими платформами (СМЛП) стремительно возрастает в связи с активным освоением нефтегазовых месторождений Арктического шельфа. Так-же этот интерес мотивирован невозможностью проведения полномасштабных натуральных экспериментов. Среди всего многообразия ледяных образований (ледяные поля, айсберги, торосы) особое значение имеют ледяные поля, образованные из однолетнего льда, как наиболее распространенное явление.

Результаты моделирования взаимодействия ледяного поля с опорой важны для проектирования СМЛП, которое осуществляется на основе ряда нормативных документов [1,2]. В этих документах заложены завышенные оценки, основанные на упрощенных теоретических моделях и экспериментальных данных. Такие завышенные оценки различных параметров (максимальной нагрузки на сооружение, прочностных характеристик конструктивных материалов и т.д.) приводят к значительным издержкам как на этапе производства, так и на этапе установки и последующей эксплуатации СМЛП. С помощью формул из нормативных документов можно оценить максимальную нагрузку на объекты только лишь для ряда простых геометрий этих объектов и типовых сценариев их взаимодействия с ледяным полем.

На пути численного моделирования данного класса задач стоит ряд технических сложностей и фундаментальных вопросов при создании адекватных математических моделей и эффективных алгоритмов для их численной реализации [3]:

- масштабный эффект: обобщение результатов лабораторных экспериментов (измеренные механические, прочностные и др. параметры) на натурные полномасштабные эксперименты [4-6];
- неоднородность параметров льда и толщины ледяного поля [4,7]: параметры неоднородности зависят от природных условий, требуют сбора натуральных данных и статистической обработки; из-за неполноты исходных данных в некоторых случаях используются вероятностные подходы [8];
- сложная кристаллическая, вообще говоря, анизотропная, структура льда: морской лёд трансверсально-изотропный [9, 10];
- морской лёд слоистый, у каждого слоя свои механические и прочностные параметры [11-13], которые зависят от температуры, солёности, пористости [14-16];

- существование различных скоростных режимов взаимодействия [17, 18]: на малых скоростях в зоне контакта наблюдается перекристаллизация льда, образование микротрещин из-за сдвиговых напряжений и таяние пограничного слоя, что в совокупности называют пластическим режимом; режим поведения на высоких скоростях называют хрупким; максимальная же нагрузка при воздействии ледяного поля наблюдается в переходном режиме от пластического к хрупкому; наличие таких режимов определяет наблюдаемые резонансно-вибрационные эффекты [19]; такое поведение, вероятно, описывалось бы вязкоупругопластической моделью, но открытым остается вопрос определения параметров этой модели;

- контактная площадка носит случайный характер из-за неоднородности льда [20]: например, при низких скоростях из-за ползучести площадь контакта больше, следовательно, оказываемое давление меньше [21, 22];

- одновременное наличие принципиально разных с точки зрения численного моделирования режимов разрушения: трещины, характерные для твердого тела, а также смесь из раскрошенного льда и более крупных осколков; это и определяет «пилообразный» вид нагрузки на опору [22];

- при построении механико-математической модели поведения льда в интересующих сценариях предположение малости деформаций, вероятно, уже не будет выполняться;

- необходимость значительного измельчения расчётной сетки в области контакта в случае тонкого ледяного поля и широкого основания опоры ведёт к значительному увеличению требуемых вычислительных ресурсов;

- длительность расчётов обусловлена тем, что практический интерес представляют как пиковые, так и средние нагрузки на опору, а максимальные скорости движения ледяных полей порядка 0.1 м/с, и при использовании явных схем интегрирования по времени необходимо вычислить десятки миллионов шагов, эквивалентных десяткам секунд реального времени контакта ледяного поля с опорой;

- необходим эффективный способ распараллеливания алгоритма контактного взаимодействия большого числа объектов на многопроцессорных вычислительных системах;

- в некоторых сценариях возможна зависимость картины разрушения льда от способа разбиения расчётной области на расчётные ячейки;

- в общем случае необходимо учитывать взаимодействие льда, воды и опоры.

В некоторых работах из-за относительной простоты реализации и высокой производительности используется дискретно-элементный подход

(DEM), в котором твердые недеформируемые шары соединяются пружинами и другими нелинейными элементами [23,24]. В [25] рассматривается процесс наплавания льда на наклонную поверхность. В [26,27] DEM используется для моделирования осколков льда. В [28] исследовалось воздействие ледяного поля на сооружения во время землетрясения. Такой подход в целом дает качественно верные результаты, но количественно менее точен по сравнению с подходами на основе уравнений механики сплошных сред.

В [29] для моделирования раздробленного льда в месте контакта используется метод SPH (отколовшиеся ячейки заменяются одной или несколькими частицами, моделируя тем самым будто бы жидкую среду), наряду со стандартным FEM (Finite Element Method) в рамках пакета LS-DYNA, что, как показывает автор, дает более реалистичные картины разрушения, но требует больших вычислительных ресурсов.

Большинство работ по численному моделированию воздействия ледяных образований на стационарные морские объекты основаны на применении одного из известных коммерческих пакетов (LS-DYNA, ANSYS, ABAQUS) с различными вариациями постановок задач и использованием ряда экспериментально полученных зависимостей [30-35]. Также много работ по контактному взаимодействию объектов со льдом посвящено соударениям судна с дрейфующим ледяным образованием [36-40].

Постановка задачи

В рамках данной работы проводится численное моделирование воздействия полубесконечного ледяного поля на вертикальную цилиндрическую опору.

Начальная скорость ледяного поля $V_0=0.1$ м/с направлена вдоль оси OY (см. рис.1,2). Полубесконечное поле моделируется в предположении, что на расстоянии, большем трех диаметров опоры $D=(4$ м, 20 м), отсутствуют градиенты напряжений и скорости, с заданием граничных условий с постоянной скоростью на тыльной поверхности и симметрии скоростей на боковых поверхностях. На фронтальной, нижней и верхней поверхностях заданы условия свободных границ. Опору считаем недеформируемой и неподвижной. Форма ледяного поля в плане – квадрат со стороной $6D$ (см. рис.2). Интерес представляют как локальные нагрузки на опору (распределение давления вдоль поверхности контакта), так и глобальные (суммарная сила, действующая на опору). Максимальная глобальная нагрузка согласно экспериментальным наблюдениям достигается приблизительно в момент максимальной площади контакта, поэтому для экономии вычислительных ресурсов в начальном положении центр опоры расположен на расстоянии

$L=0.15D$ от фронтальной поверхности поля. Толщину поля полагаем равной $H=2$ м. Рассматриваемый участок опоры не превосходит по высоте двух её диаметров. Данной высоты достаточно для формирования скопления раздробленного льда и учёта нагромождения льда путем подныривания и напозания.



Рис.1. Типовая геометрия опоры и ледяного поля.

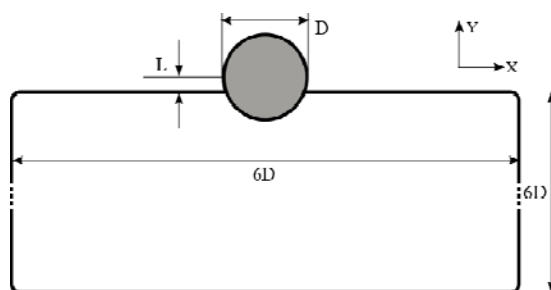


Рис.2. Схематичная постановка численного эксперимента.

В численных экспериментах лед считаем однородным ввиду недостатка экспериментальных данных.

Механико-математическая модель

Лёд имеет сложную кристаллическую структуру [41]. В механико-математической модели поведения льда необходимо учитывать только наиболее значимые эффекты, находя компромисс между степенью детализации и вычислительными ресурсами, необходимыми для моделирования. Для более сложных моделей необходимо знание дополнительных констант, для измерения и исследования которых потребуются специальные натурные эксперименты. Например, в [42], где рассматривается задача соударения айсберга с кораблем, отмечено, что скорость деформации $\dot{\epsilon}$ не включена в модель из-за малой экспериментальной проработанности. Авторам неизвестна единая механико-математической модель, описывающая поведения льда в широком диапазоне входных параметров (температур, скоростей деформации, характерных размеров объектов и др.). В рамках данной работы предполагаем, что поведение льда описывается моделью упругопластической среды с учётом возможных неоднородностей, что соответствует современным тенденциям в моделирования льда [32,35,42-44]. Обычно небольшие

различия в моделях основаны на использовании экспериментальных данных. Например, усложняется вид зависимости порога текучести от давления. Однако принципиального характера такие модификации модели не носят. В работе используется модель Прандля-Рейса с условием текучести Мизеса-Шлейхерта [45]. Систему определяющих уравнений можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \rho \dot{v}_i &= \nabla_j \sigma_{ij}, \\ \sigma_{ij} &= q_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$q_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - \frac{\mu I \sigma_{ij} \sigma_{kl}}{k^2}, \quad (2)$$

$$k = k_0 + \alpha p, \quad I = \begin{cases} 0, & s_{ij} : s_{ij} < 2k^2, \\ 1, & s_{ij} : s_{ij} \geq 2k^2, \end{cases}$$

v_i – компоненты скорости среды в данной точке, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений Коши, ε_{ij} – компоненты тензора деформаций, ρ – плотность, λ и μ – параметры Ламе, k_0 и α – параметры материала, определяющие момент наступления пластического течения или хрупкого разрушения, а девиатор тензора напряжений s_{ij} и давление p определяются следующим образом:

$$s_{ij} = \sigma_{ij} + p \delta_{ij}, \quad p = -\sigma_{ij} / 3.$$

В качестве критериев разрушения выбраны критерий по максимальным главным напряжениям, а также по максимальной пластической деформации. Согласно критерию по максимальным главным напряжениям, если максимальное главное значение тензора напряжений σ превышает некоторую величину σ_{\max} , то во льду возникает трещина. Критерий по максимальной пластической деформации используется при переходе материала в режим пластического течения: при превышении $\varepsilon_p = \sqrt{(2/3) \varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p}$ значения некоторой предельной величины ε_p^{\max} лед разрушается. Здесь $\varepsilon_{ij}^p = \int_0^t \dot{\varepsilon}_{ij} Idt$ – пластическая часть тензора деформации, где

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{dv_i}{dx_j} + \frac{dv_j}{dx_i} \right).$$

Так как после разрушения лед нужно описывать не как упруго-пластичный материал, а, скорее, как раздробленный, то необходимо скорректировать механические параметры модели (1) в области разрушения. В данной работе рассматриваются два варианта такой корректировки. В первом варианте корректируется второй параметр Ламе при условии сохранения коэффициента всестороннего сжатия

$$\mu' = \alpha_\mu \mu.$$

При этом главные напряжения в случае растяжения полагаются равными нулю. Во втором варианте корректируется только предел текучести:

$$k' = \alpha_k k$$

где α_μ и α_k принимались равными 0.1.

В качестве исходных брались параметры льда из [46]: плотность $\rho = 910 \text{ кг/м}^3$, модуль Юнга $E = 5.0 \times 10^9 \text{ Па}$, модуль сдвига $G = 1.87 \times 10^9 \text{ Па}$, предел текучести $k = 2.2 \times 10^6 \text{ Па}$, предел прочности на растяжение $\sigma_{\max} = 1.1 \times 10^6 \text{ Па}$, деформация разрушения $\varepsilon_p^{\max} = 1\%$.

Далее приведем дополнительные сведения о физико-механических свойствах льда. Физико-механические свойства льда зависят от его температуры и солёности. Вследствие чего параметры ледяных полей неоднородны по глубине. Характерные зависимости представлены в [47-49]. В [14] указывается, что коэффициент Пуассона ν можно считать постоянным в широком диапазоне температур ($-3.6 - 15^\circ\text{C}$), солёности ($0.113 - 6.1\%$) и типа льда (одно- и многолетний).

Морской лёд – пористая структура, где поры заполнены либо воздухом, либо соленым рассолом. Прочность морского льда из-за сложной картины распределения солевых ячеек и его частично двухфазного состава в три раза уступает прочности пресноводного льда той же толщины [12]. Для учета пористости сред можно расширять определяющую систему дифференциальных уравнений модели, добавляя уравнение для удельного объема пор [50]. Иногда вместо упругопластической модели для льда применяют модель *crushable foam* [40, 51].

Морской лед бывает двух типов (см. рис.3): зернистый (*granular*) и волокнистый (*columnar*). Зернистый лед – поликристаллическое вещество, т.е. состоящее из большого числа отдельных монокристаллов. Отдельные кристаллы обладают анизотропией. У поликристаллов на макроскопическом

уровне наличие/отсутствие анизотропии определяется внешними факторами образования льда: в спокойной воде, например, в озерах, проявляется ортотропная анизотропия, в то время как морской лед можно считать изотропным. У волокнистого льда наблюдается анизотропия, которая является следствием наличия тонких вертикальных пор в форме трубок. Для перехода в зону пластичности при сжатии вдоль волокон к образцу надо приложить примерно вдвое большее напряжение, чем при воздействии поперек волокон [52]. В [30] отмечено, что модуль Юнга E , измеренный для двух перпендикулярных направлений, для волокнистого льда отличается на 23%. А модуль Юнга для зернистого льда на 7% меньше, чем для волокнистого при сжатии поперек волокон. В [35] лед рассматривается изотропным, и для пластичности используется критерий Хилла (*Hill's yield criterion*), включающий в себя довольно много параметров, что затрудняет его использование. В [53] предлагается метод учёта микротрещин с помощью континуальной, анизотропной модели разрушения.

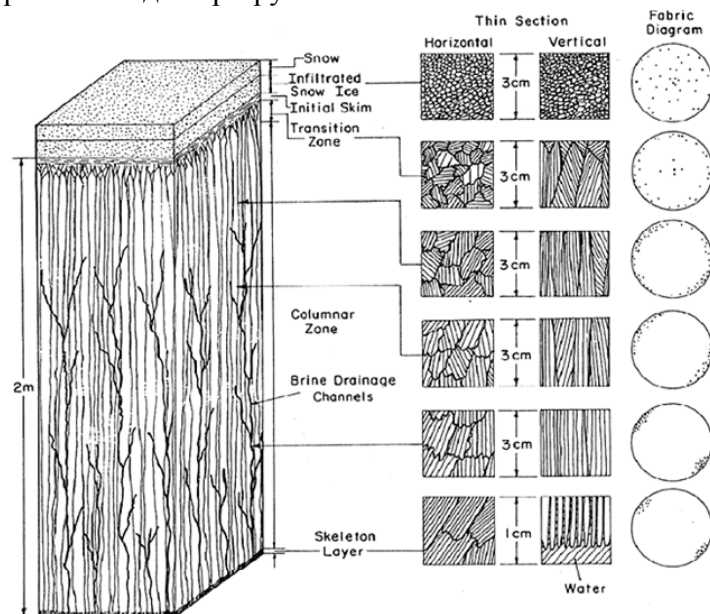


Рис.3. Типичная структура однолетнего льда.

Численный метод

Провести численную аппроксимацию системы уравнений (1) достаточно сложно ввиду нелинейности реологических соотношений (2). Воспользуемся приемом расщепления упругопластических уравнений [54], производя пробную проверку и подходящую корректировку напряжений на каждом шаге интегрирования по времени после их расчета по линейно-упругой модели:

$$\begin{cases} \rho \dot{v}_i = \nabla_j \sigma_{ij}, \\ \dot{\sigma}_{ij} = g_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}, \end{cases} \quad (3)$$

где $g_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$.

Поверхность $s_{ij} : s_{ij} = 2k^2$ определяет в пространстве напряжений пределы текучести. Используемый способ корректировки напряжений перемещает точку, соответствующую напряженному состоянию в случае $s_{ij} : s_{ij} > 2k^2$, назад к поверхности вдоль нормали к ней:

$$\sigma_{ij} = \sqrt{\frac{2k^2}{s_{pl}^0 : s_{pl}^0}} (\sigma_{ij}^0 + p^0 \delta_{ij}) - p^0 \delta_{ij},$$

где индекс ноль относится к величинам до корректировки.

Систему уравнений упругости (3) в матричном виде в трехмерном случае для изотропного пространства в переменных напряжений и скорости можно записать в виде [54]

$$\frac{\partial u_p}{\partial t} + \frac{\partial (A_{pq} u_q)}{\partial x} + \frac{\partial (B_{pq} u_q)}{\partial y} + \frac{\partial (C_{pq} u_q)}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

где u_p, u_q – компоненты вектора $\bar{u} = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}, v_x, v_y, v_z)^T$. В (4) и далее подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. Собственные векторы матриц A_{pq} , B_{pq} , C_{pq} таковы: $\bar{s} = \{-c_p, -c_s, -c_s, 0, 0, 0, c_s, c_s, c_p\}$, где c_p, c_s – продольная и поперечная скорости звука в среде. Пусть R_{pq} – матрица из собственных векторов матрицы A_{pq} . Явный вид матриц A_{pq} , B_{pq} , C_{pq} , R_{pq} представлен в [55]. Для построения численной схемы рассмотрим систему уравнений (4).

Область интегрирования разбита на тетраэдры $T^{(m)}$. Предполагаем, что матрицы A_{pq} , B_{pq} , C_{pq} постоянны внутри $T^{(m)}$. Внутри каждой ячейки решение системы (4) численно аппроксимируется как u_h с помощью линейной комбинации из $\frac{1}{6}(N+1)(N+2)(N+3)$ не зависящих от времени полиномиальных функций $\Phi_l(x, y, z)$ степени не выше N , образующих базис, с носителем $T^{(m)}$ и зависящих от времени через коэффициенты $\hat{u}_{pl}^{(m)}(t)$: $(u_h^{(m)})_p(x, y, z, t) = \hat{u}_{pl}^{(m)}(t) \Phi_l(x, y, z)$. На границах элементов допускаются разрывы в численном решении.

После подстановки u_h вместо u в (4) вместо нуля в правой части получаем невязку. Потребуем, чтобы невязка была ортогональна всем базисным функциям $\Phi_k(x, y, z)$:

$$\int_{T^{(m)}} \Phi_k \left(\frac{\partial(u_h)_p}{\partial t} + \left(\frac{\partial(A_{pq}(u_h)_q)}{\partial x} + \frac{\partial(B_{pq}(u_h)_q)}{\partial y} + \frac{\partial(C_{pq}(u_h)_q)}{\partial z} \right) \right) dV = 0. \quad (5)$$

Интегрирование (5) по частям дает

$$\begin{aligned} & \int_{T^{(m)}} \Phi_k \frac{\partial(u_h)_p}{\partial t} dV + \sum_{j=1}^4 \int_{(\partial T^{(m)})_j} \Phi_k F_p^{h,j} dS - \\ & - \int_{T^{(m)}} \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial x} A_{pq}(u_h)_q + \frac{\partial \Phi_k}{\partial y} B_{pq}(u_h)_q + \frac{\partial \Phi_k}{\partial z} C_{pq}(u_h)_q \right) dV = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Второе слагаемое уравнения (5) не удастся проинтегрировать непосредственно ввиду разрывности решения u_h и матриц A_{pq}, B_{pq}, C_{pq} на границе ячейки в общем случае. Эта проблема решается с помощью введения функции численного потока через ребро треугольника $F_p^{h,j}$. Известно большое число возможных вариантов задания численного потока [56]. В нашем случае наиболее естественно выбрать т.н. *upwind flux*, который отражает волновой процесс решаемой системы уравнений. Нахождение *upwind flux* сводится к решению задачи распада произвольного разрыва Римана. В случае рассматриваемого нами изотропного пространства многомерную задачу Римана можно приближённо свести к одномерной (т.н. *x-split Riemann problem* [57]). В случае линейных систем гиперболических уравнений одномерная задача Римана имеет аналитическое решение, и для случая уравнений упругости и акустики решена в [58].

В (6) за $(\partial T^{(m)})_j$ обозначены грани тетраэдра $T^{(m)}$, $j=1,2,3,4$, а за $F_p^{h,j}$ обозначен поток через грань j ячейки $T^{(m)}$ в глобальной системе координат, задающийся следующими формулами:

$$R_{pq} = \left\{ \left\{ r_i^{(m)} \right\}_{i:s_i^{(m)} < 0}, \left\{ r_i^{(m_j)} \right\}_{i:s_i^{(m_j)} > 0} \right\}, \quad (7)$$

$$u_p^{in} = (T_{pq}^{m_j})^{-1} \hat{u}_{ql}^{(m)} \Phi_l^{(m)}, \quad u_p^{out} = (T_{pq}^{m_j})^{-1} \hat{u}_{ql}^{(m_j)} \Phi_l^{(m_j)}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
 u_p^\downarrow &= \frac{1}{2}(u_p^{in} + u_p^{out}) + \frac{1}{2}R_{pq} \text{diag}\{\text{sign}(s_1), \dots, \text{sign}(s_5)\} R_{pq}^{-1}(u_q^{in} - u_q^{out}) = \\
 &= \frac{1}{2}(u_p^{in} + u_p^{out}) + \frac{1}{2}R_{pq} \text{diag}\{-1, -1, 0, 1, 1\} R_{pq}^{-1}(u_q^{in} - u_q^{out}),
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$F_p^{h,j} = T_{pq}^{m_j} A_{ql}^{(m)} u_l^\downarrow. \tag{10}$$

Индекс m_j соответствует ячейке, соседствующей с $T^{(m)}$ через общую сторону с номером j ; $T_{pq}^{m_j}$ – матрица перехода в систему координат грани (СКГ) m_j , у которой ось абсцисс сонаправлена с внешней нормалью грани; R_{pq} – матрица, составленная из собственных векторов матрицы $A_{pq}^{(m)}$, соответствующих отрицательным собственным значениям $s_i^{(m)}$, и $A_{pq}^{(m)}$, соответствующих положительным собственным значениям $s_i^{(m)}$; u_p^{in}, u_p^{out} – пределы численного решения вдоль внутренней и внешней стороны грани j ячейки $T^{(m)}$ соответственно в СКГ m_j [58]; u_p^\downarrow – решение одномерной задачи Римана в СКГ m_j [59]; $A_{ql}^{(m)} u_l^\downarrow$ – численный поток в СКГ m_j .

Объединив (7)–(10), получим конечную формулу для $F_p^{h,j}$:

$$F_p^{h,j} = F_{pl}^{h,in,j} \Phi_l^{(m)} + F_{pl}^{h,out,j} \Phi_l^{(m)}, \tag{11}$$

где

$$F_{pl}^{h,in,j} = T_{pq}^{m_j} \left(A_{qs}^{(m)} + \frac{1}{2} R_{qt} (\Lambda_{tr}^{(m)} - |\Lambda_{tr}^{(m)}|) R_{rs}^{-1} \right) (T_{sk}^{m_j})^{-1} \hat{u}_{kl}^{(m)},$$

$$F_{pl}^{h,out,j} = \frac{1}{2} T_{pq}^{m_j} R_{qt} (\Lambda_{tr}^{(m)} - |\Lambda_{tr}^{(m)}|) R_{rs}^{-1} (T_{sk}^{m_j})^{-1} \hat{u}_{kl}^{(m)},$$

$$\Lambda_{pq}^{(m)} = \text{diag}\{-c_p^{(m)}, -c_s^{(m)}, -c_s^{(m)}, 0, 0, 0, c_s^{(m)}, c_s^{(m)}, c_p^{(m)}\},$$

$$|\Lambda_{pq}^{(m)}| = \text{diag}\{c_p^{(m)}, c_s^{(m)}, c_s^{(m)}, 0, 0, 0, c_s^{(m)}, c_s^{(m)}, c_p^{(m)}\}.$$

После дискретизации по пространственным переменным уравнение (4) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{u}_{pl}^{(m)} \int_{T^{(m)}} \Phi_k \Phi_l dV + \sum_{j=1}^4 F_{pl}^{h,in,j} \int_{(\partial T^{(m)})_j} \Phi_k^{(m)} \Phi_l^{(m)} dS +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^4 F_{pl}^{h,out,j} \int_{(\partial T^{(m)})_j} \Phi_k^{(m)} \Phi_l^{(m_j)} dS - \\
& - A_{pq} \hat{u}_{ql}^{(m)} \int_{T^{(m)}} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} \Phi_l dV - B_{pq} \hat{u}_{ql}^{(m)} \int_{T^{(m)}} \frac{\partial \Phi_k}{\partial y} \Phi_l dV = 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

Далее уравнение (12) интегрируем по времени, например, методом Рунге-Кутты высокого порядка точности. Пользуясь методикой [60], интегралы по базисным функциям можно рассчитать заранее. Описанная схема позволяет решать исходную систему уравнений с произвольным порядком аппроксимации по пространству, фактически ограниченным лишь машинной точностью. Порядок аппроксимации по времени определяется используемым интегратором и также ограничен лишь машинной точностью.

Учёт контактных условий слипания [58], скольжения и сухого трения [61] осуществляется при решении одномерной задачи Римана. Граничные условия реализуются с помощью т.н. приёма *ghost cells* [56] и решения обратной задачи Римана.

Отдельно выделим случай контактных разрывов, когда контактируют различные тела, либо части одного объекта. В работе используется подвижная лагранжева сетка. В описанном выше разрывном методе Галёркина решение относится не к узлу, а к ячейке, поэтому зона контакта определяется в виде набора контактирующих пар ячейка-ячейка (лежащих на поверхности). Выше описан способ обработки контакта только конформных ячеек, где касание происходит "узел в узел" (согласованные сетки). Для несогласованных сеток стандартным приёмом является переинтерполяция решения на конформные *фиктивные (ghost)* узлы или ячейки. Любое «воздействие» на решение в ячейке $T^{(m)}$ осуществляется благодаря учёту интеграла от численного потока по границе ячейки $\int_{\partial T^{(m)}} \Phi_k F_p^h dS$. Данный интеграл можно рассчитать численно с использованием, например, квадратурных формул интегрирования. Это необходимо, в частности, когда ячейка одного тела частично касается ячейки второго тела (по периметру контактной площадки), т.е. когда часть граничной ячейки должна обрабатываться как свободная граница, а часть – как контактирующая поверхность. При численном интегрировании для каждой квадратурной точки необходимо вычислить решение задачи Римана u_p^\downarrow , причем u_p^{in} берем из самой ячейки $T^{(m)}$, а u_p^{out} получаем с помощью интерполяции в той ячейке, куда попала опорная точка квадратурного метода интегрирования. Если опорная точка принадлежит только одной ячейке $T^{(m)}$, либо контактирующие объекты не воздействуют

друг на друга ($\sigma_{xx}^{\downarrow} \geq 0$), то она обрабатывается как свободная граница. Порядок численного интегрирования (число опорных точек) должен быть выбран в соответствии с порядком N полиномов Φ_k . Фактически нет необходимости в явном построении фиктивной ячейки (разложения в ней решения по базисным полиномам), а требуется лишь найти решение в опорных точках, лежащих вдоль границы ячейки $T^{(m)}$ в случае, если они принадлежат хотя бы ещё одной ячейке помимо m -й. В ходе моделирования будет происходить нефизичное проникновение контактирующих объектов, но, как показали тестовые расчеты, их влияние незначительно.

Численный метод реализован в виде программного комплекса для моделирования как 2D, так и 3D задач. Комплекс распараллелен для использования на вычислительных системах с общей и распределенной памятью [62-64].

Особенности моделирования

Как отмечалось во введении, сложности представляют высокие требования к вычислительным ресурсам, возникающие по следующим причинам:

- использование явной схемы интегрирования по времени накладывает условие Куранта на максимальный шаг по времени;
- относительно низкая скорость движения ледяного поля ≤ 0.1 м/с и необходимость смещения поля на расстояние $\approx 2L \sim 1.2 - 6$ м требуют моделирования десятков секунд времени движения, что равносильно десяткам миллионов шагов интегрирования;
- деформация ячеек при контактном взаимодействии приводит к изменению их размеров, а следовательно, влияет на величину максимального шага по времени в силу условия Куранта.

Все описанные ниже приемы будут направлены на нивелирование данных сложностей.

Известным приемом является *эрозия* (удаление из расчёта) сильно деформированных ячеек. Так как шаг интегрирования определяется минимальным отношением высоты ячейки к скорости звука среди всех ячеек, то значительная деформация хотя бы одной ячейки расчётной сетки приведёт к существенному замедлению расчёта. Если ячейка сдавлена из-за внешнего давления, то она просто удаляется из расчёта, образуя дополнительные (возможно внутренние) свободные границы, причем её масса неким образом распределяется по соседним ячейкам. Если же ячейка деформирована в результате того, что уже была ранее разрушена по сдвиговому критерию, и не сопротивляется растяжению, то она удаляется из расчета без перераспределения массы, также образуя дополнительные свободные поверхности.

В случае когда нет необходимости вычисления напряжений в опоре, а интересует только локальная нагрузка на поверхности и суммарная нагрузка, то опору можно представить в виде твердого недеформируемого «закрепленного» ($\mathbf{v} = 0$) тела. Такой случай реализовать достаточно просто в рамках модели деформируемых тел, предполагая значение скорости звука бесконечно большим. Действительно, задав $c_p = c_s = \infty$ для собственных векторов, соответствующих положительным собственным значениям смежной ячейки m_j , и положив в ней скорость $\mathbf{v}_{\text{out}} = 0$, получаем $\mathbf{v}^\downarrow = 0$, что равносильно условию закрепленной границы. Во всех ячейках, описывающих геометрию опоры, скорости и деформации не вычисляются, что несколько экономит вычислительные ресурсы.

Данный класс задач можно отнести к квазистатическим, когда волновыми эффектами можно пренебречь. Квазистатические задачи можно решать и с помощью динамических решателей. В выбранной механико-математической модели отсутствуют явные зависимости всех остальных параметров от скорости, поэтому при искусственном увеличении скорости движения ледяного поля до некоторого значения, нагрузка на опору меняться не будет. Аналогично можно искусственно увеличивать плотность материала, тем самым уменьшая скорость звука в среде и увеличивая шаг интегрирования по времени. Увеличивать скорость движения ледяного поля и плотность можно до тех пор, пока вклад инерции остается незначительным. Оценку можно проводить, например, по графикам кинетической и потенциальной энергии от времени и ряду других критериев [65]. В момент начального контакта ледяного поля с опорой пиковая нагрузка $\sim \rho_{\text{льда}} c_{\text{льда}}^{\text{звук}} v_0 = \sigma_0$. Чтобы избежать разрушений «волновой» природы в момент первого контакта с опорой должно выполняться условие $\sigma_0 < \sigma_{\text{max}}$. Также следует плавно увеличивать скорость движения от 0 до v_0 .

Для эффективного нахождения контактирующих ячеек использовалось AABB-дерево (axis-aligned bounding box) [65]. Для ускорения работы в дереве не добавлялись ячейки, которые заведомо не могут участвовать в столкновениях: боковые и тыльная поверхности льда и т.п.

Результаты расчетов

На основе приведенных выше модели и алгоритма был создан программный комплекс и проведена серия расчетов, результаты которых представлены далее.

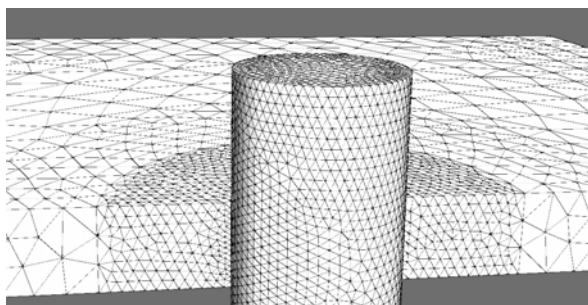


Рис.4. Неравномерная расчётная сетка (диаметр опоры $D=4\text{м}$). Область контакта.

На рис.4 представлена расчётная сетка из $\sim 4 \times 10^4$ тетраэдров. На рис.5 представлена картина разрушения и конечное положение льдины в данном расчёте. При данном соотношении порога пластичности и прочности на растяжение в картине разрушения присутствуют как области пластического, так и области хрупкого разрушения (см. рис.6). Присутствует горизонтальная хрупкая трещина в картине разрушения – *cleavage crack*. На рис.7 в правой части представлена картина напряжения во льду: компонента тензора σ_{yy} при начальной скорости ледяного поля, направленной вдоль оси OY. Более темный тон отвечает большей нагрузке. В области опоры наблюдаются области пластического и хрупкого разрушения. Левая часть рис.7 демонстрирует поверхность поля с явно выраженным скоплением битого льда в области опоры.

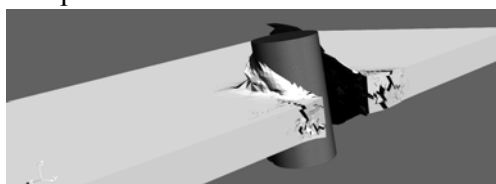


Рис.5. Картина разрушения ледяного поля при столкновении с опорой.

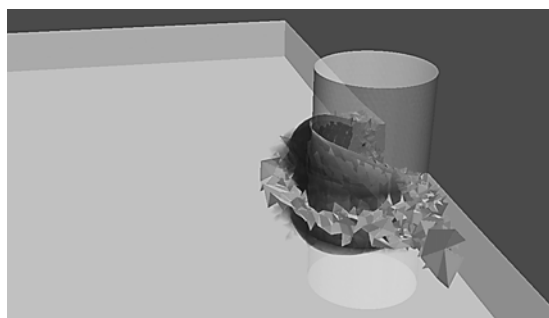


Рис.6. Области разрушения ледового поля: полупрозрачный – область пластического разрушения; отдельные грани ячеек – области хрупкого разрушения.



Рис.7. Картина напряжений во льду (компонента σ_{yy} при начальной скорости льда, направленной вдоль оси y).

На рис.8 показано распределение давлений на опору. Для упрощения интерпретации в расчёте предполагалось, что трение между льдом и опорой отсутствует (заметим, что разработанный программный комплекс позволяет задавать коэффициент трения μ между контактирующими поверхностями). Давление действует по внутренней нормали к поверхности опоры \mathbf{n} . На рис.8 показана только горизонтальная составляющая этой поверхностной силы f_y : $f_y = (p\mathbf{n}) \cdot \mathbf{j}$, где p – давление, \mathbf{j} – единичный вектор вдоль горизонтальной оси. Для расчёта глобальной нагрузки F_y нужно проинтегрировать f_y по поверхности опоры: $F_y = \int_S f_y dS$. В нижней части рис.8 показана зависимость глобальной нагрузки от времени. Максимальное значение нагрузки достигает 5.3×10^7 Н. Уменьшение нагрузки до 3.6×10^7 Н соответствует образованию горизонтальной трещины (см. рис.6).

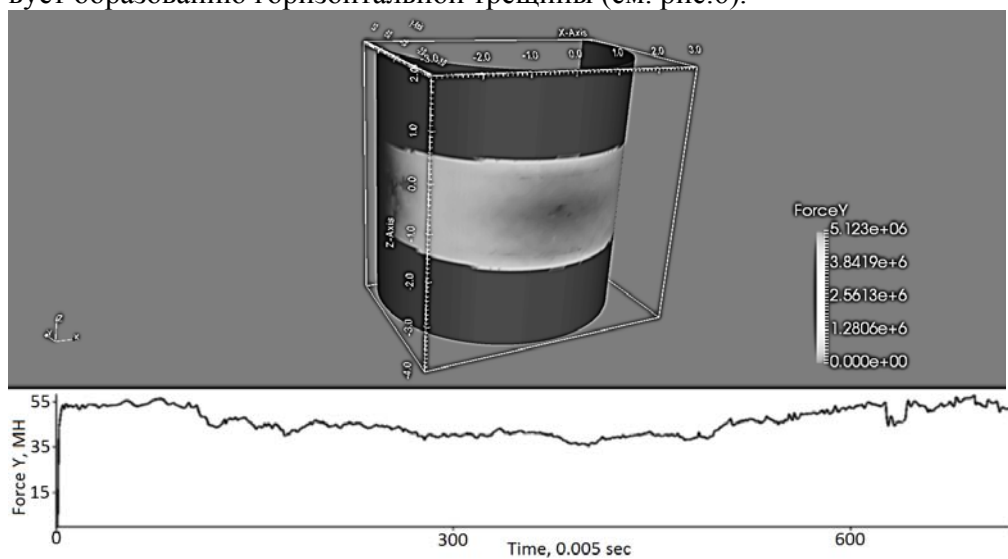


Рис.8. Распределение давления по поверхности опоры.

Для случая $D=20$ м расчетная сетка состояла из 9×10^4 ячеек. В результате моделирования получили следующую картину разрушений (см. рис.9).

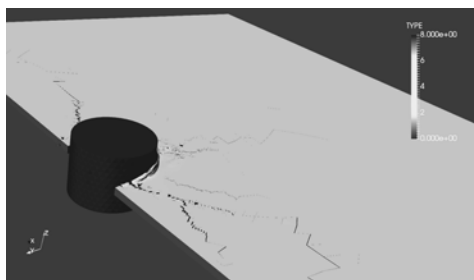


Рис. 9. Картина разрушения ледяного поля при столкновении с опорой.

На рис.10 представлена картина напряжений (компонента σ_{yy} тензора напряжений в плоскости, проходящей на расстоянии 1 м от верхней и нижней поверхности поля) для конечного состояния расчёта, когда опора прорезала лёд на 5.6 м. Видно, что образовавшиеся радиальные трещины в значительной мере повлияли на распределение напряжений.

На рис.11 представлена последовательность кадров, демонстрирующая процесс зарождения и распространения радиальных трещин. Примечательно, что сначала образуются и распространяются наклонные трещины, а уже спустя некоторое время – вертикальная трещина.



Рис. 10. Области разрушения и картина напряжений льда.

На рис.12, аналогично предыдущему сценарию, представлена картина распределения горизонтальной составляющей поверхностной силы f_y , действующей на опору. Проинтегрировав f_y по поверхности опоры, находим глобальную нагрузку F_y . График глобальной нагрузки от времени представлен в нижней части рис.12. Максимальная глобальная нагрузка равна $2.3 \cdot 10^8$ Н. По одному расчёту сложно судить о влиянии наличия радиальных трещин на глобальную нагрузку. Если сопоставить последовательность картин зарождения и распространения трещин (см. рис.11), то оказывается, что максимум нагрузки соответствуют картине Б2, а минимум – следующему моменту времени (картина А3), то есть моменту зарождения вертикальной радиальной трещины.

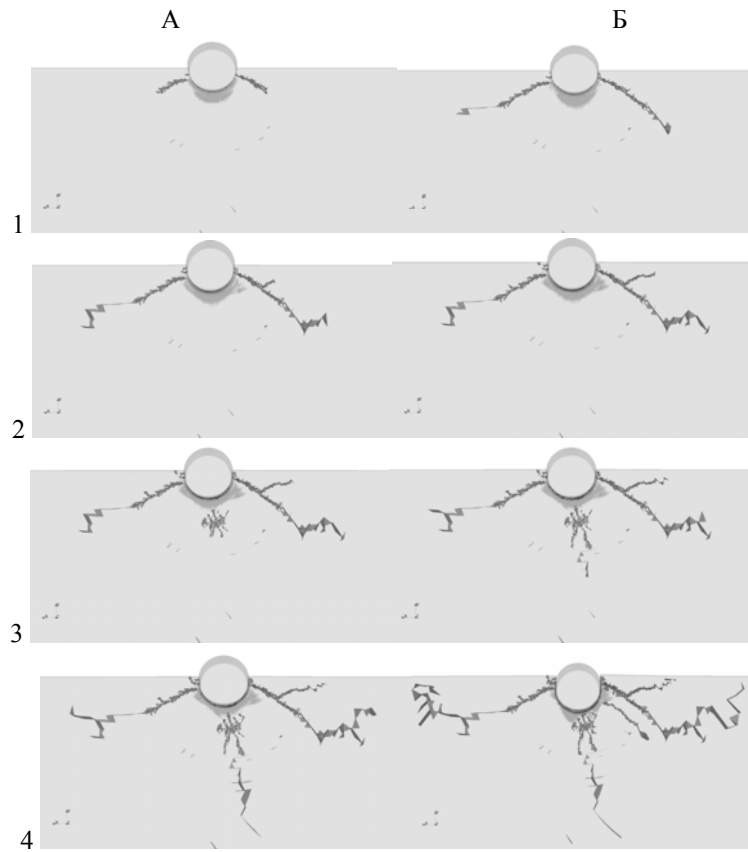


Рис.11. Последовательность зарождения и возникновения радиальных трещин в ледяном поле.

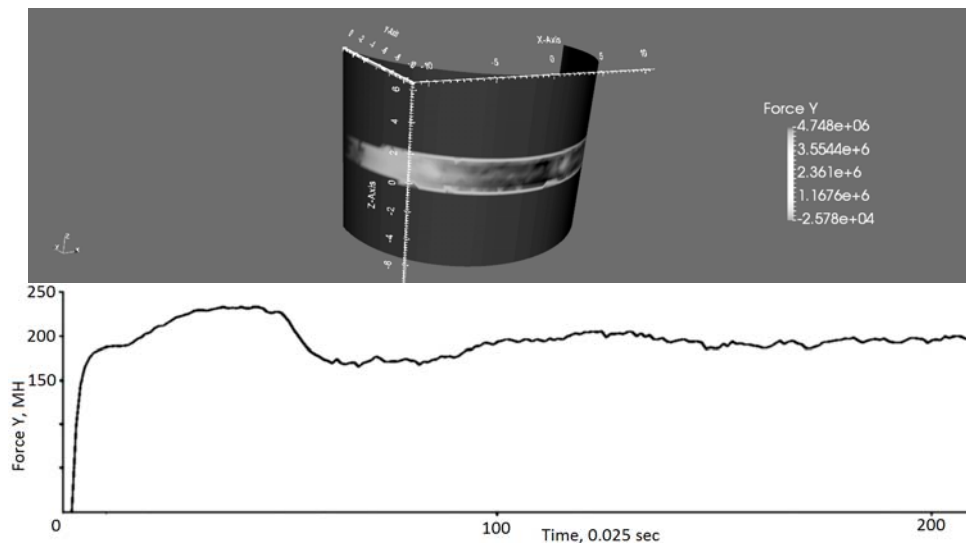


Рис.12. Распределения горизонтальной нагрузки по поверхности опоры.



Рис. 13. Картина разрушения ледяного поля при столкновении с опорой.

Также производилось численное моделирование воздействия ледяного поля на основание маяка [35]. В отличие от первых двух постановок основание имеет форму 20-угольника. В данной постановке каждый угол является концентратором напряжения, и хрупкое разрушение инициализируется в этих областях. Из-за этого вблизи платформы мы наблюдаем не область пластического разрушения, а область отдельных хрупких осколков (см. рис.13). От большинства углов распространяются радиальные трещины.

Заключение

В работе приведена постановка задачи, описаны численные методы, алгоритмы и результаты численного моделирования воздействия ледяных образований на СМЛП при отношении диаметра опоры к толщине льда $D/H \leq 10$. На практике также интерес представляет постановка с отношением $D/H \sim 10^2$, которая требует расчётной сетки с большим числом ячеек и, следовательно, больших вычислительных затрат, и поэтому в работе не рассматривается. Механико-математическая модель, используемая в работе, является компромиссом, позволяющим получить адекватные результаты за разумное вычислительное время. В ней отсутствует, например, явная зависимость от скорости и анизотропия, ввиду недостатка экспериментальных данных.

Сравнение с данными натурных экспериментов из разных источников также вызывает ряд трудностей ввиду того, что механическое поведение льда зависит от многих параметров, в том числе температуры, солёности и др., данные которых не всегда приводятся в экспериментах. Также из-за неоднородности параметров льда необходим анализ большого числа натурных экспериментов с последующей статистической обработкой, либо использование искусственных образцов с меньшей дисперсией параметров.

Проводить сравнения с полуэмпирическими зависимостями нагрузки на вертикальные опоры сложно: в качестве входных параметров эти зависимости используют макроскопические инженерные величины, например,

прочность льда на одноосное сжатие, которое находится из экспериментов с образцами определенного конечного размера. Такие макроскопические величины нельзя напрямую использовать в подходах на основе моделей МСС, так как фактически они являются результатом суммарного влияния различных физических процессов и механизмов разрушения. В [67] проводится численное моделирование лабораторных прочностных экспериментов со льдом для получения параметров используемой механико-математической модели.

Численные результаты, полученные в данной работе, демонстрируют возможность практического приложения механико-математической модели и её программной реализации к задачам безопасности нефтегазовых платформ на шельфе Арктики. Использование математического моделирования на основе МСС для оценки глобальной и локальных нагрузок более ресурсозатратно по сравнению с инженерными формулами, однако, несомненное преимущество этого подхода состоит в том, что нагрузки вычисляются для интересующей нас геометрии объекта с адекватной точностью.

В качестве дальнейшего развития работы предполагается реализовать контактное взаимодействие подвижных твердых недеформируемых тел с деформируемыми объектами, а также перестройку или «выпрямление» расчётной сетки в области её значительных деформаций. Такой подход менее ресурсоемкий, чем комбинирование сеточных и бессеточных методов вроде SPH, и также позволяет промоделировать непрерывный контакт льда и опоры.

Авторы выражают благодарность за сотрудничество Павлову Владимиру Анатольевичу, Вербицкой Ольге Александровне, Беккеру Александру Тевьевичу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нагрузки и воздействия на гидротехнические сооружения (волновые, ледовые и от судов). СНИП 2.06.04-82, 2012.
Nagruzki i vozdeistviia na gidrotekhnicheskie sooruzheniia (volnovie, ledovie i ot sudov). SNIP 2.06.04-82. 2012.
2. Правила Российского морского регистра судоходства ПБУ/МСП, 2014;
Pravila Rossiiskogo Morskogo registra sudokhodstva PBU/MSP, 2014.
3. *P. Bergan, G. Cammaert, G. Skeie, V. Tharigopula*. On the potential of computational methods and numerical simulation in ice mechanics // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2010, v.10, ID 012102.
4. *J.P. Dempsey*. Research trends in ice mechanics // Int. J. Solids Struct., 2000, v.37, p.131-153.
5. *Z.P. Bažant*. Fracture Analysis and Size Effects in Failure of Sea Ice, The Mechanics of Solids: History and Evolution; A Festschrift in Honor of Arnold Kerr, M.H. Santare and Michael J. Chajes, Eds., University of Delaware Press, Newark, Delaware, 2008, p.151-170.

6. *M.A. Nessim, M.S. Cheung, I.J. Jordaan.* Ice action on fixed offshore structures: a state-of-the-art review // *Can. J. Civ. Eng.*, 1987, v.14, p.381-407.
7. *W. Lu, S. Løset, R. Lubbad.* Simulating ice-sloping structure interactions with the cohesive element method // *Proc. of the ASME 31st International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering*, 2012, p.1-10.
8. *A.T. Беккер.* Вероятностные характеристики ледовых нагрузок на сооружения континентального шельфа. – Владивосток: Дальнаука, 2005.
A.T. Bekker. Veroyatnostnyye kharakteristiki ledovykh nagruzok na sooruzheniia kontinentalnogo shelfa. – Vladivostok: Dalnauka, 2005.
9. *C. Petrich, H. Eicken.* Growth, structure and properties of sea ice. *Sea Ice—An Introduction to Its Physics, Biology, Chemistry and Geology* // eds Thomas DN, Dieckmann GS (Blackwell Scientific, London), 2010, p 22-77.
10. *E. Schulson, P. Duval.* Creep and Fracture of Ice // Cambridge University Press, 2009.
11. *В.Н. Смирнов, В.У. Миронов.* Исследования прочности, морфометрии и динамики льда в инженерных задачах при освоении шельфа в замерзающих морях // *Проблемы Арктики и Антарктики*, 2010, т.85, №2, с.5-15;
V.N. Smirnov, V.U. Mironov. Issledovaniia prochnosti, morphometrii i dinamiki lida v inzhenernykh zadachakh pri osvoenii shelfa v zamerzayushchikh moriah // *Problemy Arkтики i Antarktiki*, 2010, v.85, №2, p.5-15.
12. *L. Strub-Klein.* Field Measurements and Analysis of the Morphological, Physical and Mechanical Properties of Level Ice and Sea Ice Ridges // Thesis for the degree of Philosophiae Doctor Trondheim, April 2012 Norwegian University of Science and Technology.
13. *Р.В. Гольдштейн, Н.М. Осипенко.* Некоторые вопросы механики прочности морского льда // *Физическая мезомеханика*, 2014, т.17, №6, с.59-69;
R.V. Goldstein, N.M. Osipenko. Some aspects of strength in sea ice mechanics // *Physical Mesomechanics*, 2015, v.18, №2, p.139-148.
14. *A. Kovacs.* Sea Ice: Part II. Estimating the Full-Scale Tensile, Flexural, and Compressive Strength of First-Year Ice // *CRREL Report 96-11*, Sept., 1996.
15. *M. Gabrielsen et al.* Comparison of physical and mechanical properties of coastal ice and level ice // *Proc. of 19th IAHR International Symposium on Ice, Canada*, 2008, p.1-10.
16. *G. Timco, W. Weeks.* A review of the engineering properties of sea ice // *Cold Regions Science and Technology*, 2010, 60, p.107-129.
17. *A. Palmer, K. Croasdale.* Arctic Offshore Engineering // World Scientific Publishing Company. Singapore, 2012.
18. *T. Sain, R. Narasimhan.* Constitutive modeling of ice in the high strain rate regime // *Int. J. of Solids and Structures*, 2011, №48, p.817-827.
19. *M. Määttänen.* Numerical Simulation of Ice-Induced Vibrations in Offshore Structures // Keynote Lecture, in *Proc. 14th Nordic Seminar on Computational Mechanics*, Lund University, p.13-28, Lund, Sweden, 2001.
20. *R. Staroszczyk.* Loads on an Off-Shore Structure due to an Ice floe Impact // *Archives of Hydro-Engineering and Environmental Mechanics*, 2007, v.54, №2, p.77-94.
21. *K. Muggerridge, I. Jordaan.* Microstructural change in ice: III. Observations from an iceberg impact zone // *Journal of Glaciology*, 1999, v.45, №151, p.449-455.
22. *I. Jordaan.* Mechanics of ice-structure interaction // *Engineering Fracture Mechanics*, 2001, v.68, p.1923-1960.

23. *M. Lau*. A Three-Dimensional Discrete Element Simulation of Ice Sheet Impacting a 60° conical Structure // Proceedings of the 16th International POAC conference. Ottawa, Ontario, Canada, 2001.
24. *Hai Li, Yu Liu, Xiang Jun Bi et al.* Numerical Simulation of Sea Ice Compressional Strength with Discrete Element Model // Advanced Materials Research, 2011, v.268-270. p.913-918.
25. *J. Paavilainen, J. Tuhkuri, A. Polojarvi*. Discrete Element Simulation of Ice Pile-Up Against an Inclined Structure // 18th IAHR International Symposium on Ice, 2006, p.177-184.
26. *M. Lau, K.P. Lawrence, L. Rothenburg*. Discrete element analysis of ice loads on ships and structures // Ships and Offshore Structures, 2011, v.6, №3, p.211-221.
27. *T. Berglund*. Ice fracture model for real-time ship simulator // Ph.D. thesis: Umeå University, Faculty of Science and Technology, Department of Physics, 2012, 82.
28. *Y. Yamauchi, K. Kamesaki, M. Hyodo* Numerical Simulation on Ice-Structure Interaction during Earthquakes // Proceedings of the 20th international offshore and polar engineering conference, Beijing, 2010.
29. *E. Kim*. Experimental and numerical studies related to the coupled behavior of ice mass and steel structures during accidental collisions. Ph.D. thesis: Norwegian University of Science and Technology, 2014.
30. *B. Sand*. Nonlinear finite element simulations of ice forces on offshore structure. Doctoral thesis: Luleå University of Technology, 2008.
31. *I.J. Jordaan, J. Wells, J. Xiao et al.* Ice crushing and cyclic loading in compression // Proceedings of the 19th IAHR International Symposium on Ice. Vancouver, British Columbia, Canada: 2008, p.1011-1023.
32. *D. Hilding, J. Forsberg, A. Gurtner*. Simulation of Loads from Drifting Ice Sheets on Offshore Structures // Proceedings of the 12th International LS-DYNA Users Conference, 2012, p.1-8.
33. *K. Hyunwook*. Simulation of compressive 'Cone-Shaped' ice specimen experiments using LS-DYNA // Proceedings of the 12th International LS-DYNA Users Conference, 2014, p.1-9.
34. *D. Hamid, B. Sand*. Numerical Simulation of the Ice-Structure Interaction in LS-DYNA // 8th European LS-DYNA Users Conference, Strasbourg, 2011, ID 8504.
35. *B. Sand, L. Fransson*. Numerical simulation of level ice loads on Norstromsgrund light-house // Intern. Conf. on Cold Climate Technology, 26-28 May. Narvik, Norway: 2014.
36. *Derradji-aouat, G.J. Earle*. Ship-Structure Collisions: Development of a Numerical Model for Direct Impact Simulations, 2003, v.5, p.520-527.
37. *R.E. Gagnon, J. Wang*. Numerical simulations of a tanker collision with a bergy bit incorporating hydrodynamics, a validated ice model and damage to the vessel // Cold Regions Science and Technology, 2012, v.81, p.26-35.
38. *J. Shunying, L. Shewen*. Interaction between sea ice/iceberg and ship structures: A review // Advances in Polar Science, 2013, v.23, №4, p.187-195.
39. *S. Kan, W. Tangborn*. Calculation of the Size of the Iceberg Struck by the Oil tanker Overseas Ohio. 14th IAHR Symposium on Ice, 1997.
40. *Gao Yan, Hu Zhiqiang, Wang Jin*. Sensitivity Analysis for Iceberg Geometry Shape in Ship-Iceberg Collision in View of Different Material Models // Mathematical Problems in Engineering. 2014, v.2014, ID 414362, 11 p..
41. *И.А. Степанюк, В.Н. Смирнов*. Методы измерений характеристик динамики морско-

- го льда. – Санкт-Петербург: Гидрометеиздат, 2001.
I.A. Stepanyuk, V.N. Smirnov. Metody izmerenii kharakteristic dinamiki morskogo lida. – Sankt-Peterburg: Gidrometeoizdat, 2001.
42. *Z. Liu, J. Amdahl, S. Løset.* Plasticity based material modelling of ice and its application to ship-iceberg impacts // *Cold Reg. Sci. Technol.*, 2011, v.65, p.326-334.
 43. *D. Hilding, J. Forsberg, A. Gürtner.* Simulation of ice action loads on offshore structures // 8th European LS-DYNA Users Conference, Strasbourg, 2011.
 44. *Yan Gao, Zhiqiang Hu, J.W. Ringsberg, Jin Wang.* An elastic-plastic ice material model for ship-iceberg collision simulations // *Ocean Engineering*, 2015, v.102, p.27-39.
 45. *В.Д. Иванов, В.И. Кондауров, И.Б. Петров, А.С. Холодов.* Расчет динамического деформирования и разрушения упругопластических тел сеточно-характеристическими методами // *Матем. моделирование*, 1990, т.2, №11, с.10-29;
V.D. Ivanov, V.I. Kondaurov, I.B. Petrov, A.S. Kholodov. Raschet dinamicheskogo deformirovaniia i razrusheniia uprugoplasticheskikh tel setochno-kharakteristicheskimi metodami // *Matem. Modelirovanie.*, 1990, t.2, №11, s.10-29.
 46. *В.А. Лобанов.* Моделирование льда в задачах с конечно-элементной постановкой // *Дифференциальные уравнения и процессы управления*, 2008, №4, с.19-29;
V.A. Lobanov. Modelirovanie lida v zadachakh s konechno-elementnoi postanovkoi // *Differencialnye uravneniia i protsessi upravleniia*, 2008, №4, s.19-29.
 47. *А.Н. Прокудин, В.И. Одинок.* Численное исследование процесса разрушения ледяного покрова с учётом сжимаемости и неоднородности // *Вычислительная механика сплошных сред*, 2013, т.6, №1, с.110-118;
A.N. Prokudin, V.N. Odinokov. Chislennoe issledovanie protsessa razrusheniia ledianogo pokrova s uchetom szhimaemosti i neodnorodnosti // *Vychislitelnaia mekhanika sploshnykh sred*, 2013, v.6, №1, p.110-118.
 48. *W.F. Weeks.* On sea ice. – University of Alaska Press, 2010.
 49. *G.E. Frankenstein, R. Garner.* Equation for determining the brine volume of sea ice from -0.5 to -22.9°C // *J. Glaciol*, 1967, v.6, №48, p.943-944.
 50. *Ю.Н. Орлова.* Комплексное теоретико-экспериментальное исследование поведения льда при ударных и взрывных нагрузках. – Томск: Томский госуниверситет, 2014, канд. дисс.
Yu.N. Orlova. Kompleksnoe teoretiko-eksperimentalnoe issledovanie povedeniia lida pri udarnykh i vzryvnykh nagruzkakh. – Tomsk: Tomskii Gosuniversitet, 2014, kand. diss.
 51. Abaqus Crushable foam plasticity models. <http://www.egr.msu.edu/software/abaqus/Documentation/docs/v6.7/books/usb/default.htm?startat=pt05ch18s03abm32.html>, 2015.
 52. *M. Torstein.* Iceberg shape characterization for damage assessment of accidental impacts with ships and offshore structures, 2013.
 53. *R. Duddu, H. Waisman.* A nonlocal continuum damage mechanics approach to simulation of creep fracture in ice sheets // *Computational Mechanics*, 2013, v.51, №6, p.961-974.
 54. *M. Dumbser, M. Kaser.* An Arbitrary High Order Discontinuous Galerkin Method for Elastic Waves on Unstructured Meshes II: The Three-Dimensional Isotropic Case // *Geophysical Journal International*, 2007, v.171, №3, p.1324.
 55. *R.L. LeVeque.* Finite volume methods for hyperbolic problems. – Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
 56. *E.F. Toro.* Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics, 2nd ed., – Springer, 1999.

57. *L.C. Wilcox, G. Stadler, C. Burstedde, O. Ghattas.* A high-order discontinuous Galerkin method for wave propagation through coupled elastic-acoustic media // *Journal of Computational Physics*, 2010, №229, p.9373-9396.
58. *А.Г. Куликовский, Н.В. Погорелов, А.Ю. Семенов.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
A.G. Kulikovskii, N.V. Pogorelov, A.Y. Semenov. Mathematical Aspects of Numerical Solution of Hyperbolic Systems. – Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2001.
59. *M. Kaser, M. Dumbser.* An Arbitrary High Order Discontinuous Galerkin Method for Elastic Waves on Unstructured Meshes II: The Three-Dimensional Isotropic Case // *Geophysical Journal International*, 2007, v.171, №3, p.1324.
60. *C. Pelties et al.* Three-dimensional dynamic rupture simulation with a high-order discontinuous Galerkin method on unstructured tetrahedral meshes // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 2012, v.117, №2, p.1-15.
61. *В.А. Миряха, А.В. Санников, И.Б. Петров.* Численное моделирование динамических процессов в твердых деформируемых телах разрывным методом Галеркина // *Математическое моделирование*, 2015, т. 27, №3, с.96-108.
V.A. Miryaha, A.V. Sannikov, I.B. Petrov. Discontinuous Galerkin method for numerical simulation of dynamic processes in solids // *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2015, v.7, №5, p.446-455.
62. *В.А. Бирюков, В.А. Миряха, И.Б. Петров.* Анализ зависимости глобальной нагрузки от механических параметров льда при взаимодействии ледяного поля с конструкцией путем численного моделирования // *ДАН*, 2017, т.474, №6, с.697-694;
V.A. Biryukov, V.A. Miryakh, I.B. Petrov. Analysis of the Dependence of the global load dependence on ice properties for the interaction between an ice field and a structure by a numerical simulation // *Doklady Mathematics*, 2017, v.474, №6, p.327-330.
63. *В.А. Бирюков, В.А. Миряха, И.Б. Петров, Н.И. Хохлов.* Моделирование распространения упругих волн в геологической среде: сравнение результатов трех численных методов // *Ж. выч. мат. и мат. физики*, 2016, т.56, №6, с.1104-1114.
V.A. Biryukov, V.A. Miryakh, I.B. Petrov, N.I. Khoklov. Simulation of elastic wave propagation in geological media: Intercomparison of three numerical methods // *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2016, v.56, №6, p.1086-1095.
64. Quasi-Static Analyses, Lecture 5, e-library ABAQUS <http://imechanica.org/files/15-quasi-static.pdf>.
65. *G. Van der Bergen.* Efficient collision detection of complex deformable models using AABB trees // *Journal of Graphics Tools*, 1997, v.4, №2, pp. 1-13.
66. *А.В. Санников, В.А. Миряха, И.Б. Петров.* Численное моделирование экспериментов по исследованию прочности льда // *Труды третьей международной научной конференции “Полярная механика”*, 27-30 сентября 2016г., г.Владивосток, с.141-150.
A.V. Sannikov, V.A. Miryaha, I.B. Petrov. Numerical simulation of ice strength experiments // *Proceedings of the Third International Scientific Conference “Polar Mechanics”*, 27-30 September 2016, Vladivostok, Russia, 2016, p.141-150.

Поступила в редакцию 18.09.17