Асимптотически точные алгоритмы для решения задач дискретной оптимизации.

Гимади Э.Х.

ИМ СО РАН, Новосибирск, Россия

XII Международная Школа-семинар "Проблемы оптимизации сложных систем" (декабрь 2016)

О чем доклад?

Настоящий доклад посвящен обзору некоторых результатов, полученных преимущественно в ИМ СО РАН за последние почти пол-века в направлении развития асимптотически точного подхода к решению задач дискретной оптимизации и исследования операций.

Речь идет о таких задачах, как задачи маршрутизации, многоиндексные задачи о назначениях, задачи кластеризации, задачи размещения, экстремальные задачи на графах и сетях и т.п.

Монография Гимади Э.Х., Хачай М.Ю. «Экстремальные задачи на множествах перестановок» / – Екатеринбург: "Издательство Учебно-методический центр УПИ", 2016. – 210 с.

Актуальность

Обычно эти задачи являются труднорешаемыми (NP-трудными), и потому для их решения актуальной остается разработка эффективных алгоритмов с гарантированными оценками качества их работы (временной сложности, точности, надежности срабатывания).

Оценка точности алгоритма: детермин. входы

Оценкой относительной погрешности алгоритма A решения задачи на детермин. входах размера n называют такую величину $\varepsilon_A(n)$, что на любом входе I верно

$$\frac{|W_A(I) - OPT(I)|}{OPT(I)} \leq \varepsilon_A(n),$$

где $OPT(I)$ и $W_A(I)$ — оптимальное и найденное в результате работы алгоритма A значения целевой функции задачи на входе I.
(Величину $\frac{W_A}{OPT}$, отличную от 1 на ε_A, называют **точностью**(performance ratio) алгоритма.)

Для задач на случайных входах качество алгоритма характеризуется также **вероятностью несрабатывания**.

Алгоритм A **имеет оценки** $\varepsilon_A(n)$ **и** $\delta_A(n)$ в классе задач размера n, если на мн-ве входов $\{I\}$ верно вероятн. нер-во:

$$\mathbb{P}\left\{\frac{|W_A(I) - OPT(I)|}{OPT(I)} > \varepsilon_A(n)\right\} \leq \delta_A(n),$$

где $\delta_A(n)$ — верх. оценка **вер-ти несраб.** алгоритма A доля случаев, когда алгоритм A не гарантирует получение решения с анонсированной погрешностью).

Первый пример алгоритма с оценками – больше пол-века тому назад!

Боровков А. А. К вероятностной постановке двух экономических задач // ДАН СССР. 1962. 146(5). 983–986.

TSP & AP

Первый пример алгоритма с оценками – больше пол-века тому назад!

Боровков А. А. К вероятностной постановке двух экономических задач // ДАН СССР. 1962. 146(5). 983–986.

TSP & AP

Утверждение.

В случае равномерного распределения точек в единичном квадрате АБ решает ЗК за время $\mathcal{O}(n \log n)$ почти всегда ($\delta_n \to 0$) с оценкой

$$\varepsilon_n = 0.48.$$

Асимптотически точный алгоритм

Алгоритм A с оценками ε_n и δ_n асимптотически точен, если с ростом n

$$\varepsilon_A(n) \to 0 \text{ и } \delta_A(n) \to 0$$

Впервые асимпт. точный подход представлен в 1969 г.

[Гимади-Перепелица]: Алгоритм ИБГ труд-ти $\mathcal{O}(n^2)$ для ЗК со случ. дискр. ф.р. $p(k) = \mathbb{P}\{c_{ij} = k\}$, $k = \overline{1, K_n}$, асимпт. точен при

$$\sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{p(1) + \ldots + p(k)} = o(n).$$

Гимади-Перепелица [1974]

Условия асимпт. точности ИБГ с непрер. ф.р. эл-в матрицы (c_{ij}) на огран. инт-ле (a_n, b_n), $\quad a_n > 0$.

$$\frac{b_n}{a_n} = o\left(\frac{n}{\max\{n\gamma_n, J_n\}}\right),$$

$$J_n = \int_{\gamma_n}^{1} \frac{dx}{\mathcal{P}_\xi(x)} \to \infty,$$

где $\xi = (c_{ij} - a_n)/(b_n - a_n)$, $\mathcal{P}_\xi(x) = \mathbb{P}\{\xi \le x\}$, $0 \le x \le 1$;

γ_n — корень уравнения $\mathcal{P}_\xi(x) = n^{-1}$.

Гимади-Перепелица [1974]

Условия асимпт. точности ИБГ с непрер. ф.р. эл-в матрицы (c_{ij}) на огран. инт-ле (a_n, b_n), $\quad a_n > 0$.

$$\frac{b_n}{a_n} = o\left(\frac{n}{\max\{n\gamma_n, J_n\}}\right),$$

$$J_n = \int_{\gamma_n}^{1} \frac{dx}{\mathcal{P}_\xi(x)} \to \infty,$$

где $\xi = (c_{ij} - a_n)/(b_n - a_n)$, $\mathcal{P}_\xi(x) = \mathbb{P}\{\xi \leq x\}$, $0 \leq x \leq 1$;

γ_n — корень уравнения $\mathcal{P}_\xi(x) = n^{-1}$.

В случае равном. распр. ИБГ асимпт. точен,

если разброс эл-в матрицы ограничен величиной

$$o\big(n/\log n\big)$$

Первые рез-ты по обоснованию асимптотической точности были получены с использованием **нер-ва Чебышева**. Позже более продуктивной оказалась

Теорема Петрова: Пусть $S = \sum_{j=1}^{n} X_j$ — сумма н.сл.в. и сущ-т. положительные константы T и $g_1, \ldots, g_n$ с суммой $G = \sum_{j=1}^{n} g_j$ такие, что

$$\mathbf{E} e^{tX_j} \le e^{\frac{1}{2} g_j t^2} \ (j = \overline{1, n};\ 0 \le t \le T)$$

$\square$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{P}\{S > x\} \le \begin{cases} e^{-x^2/2G} \text{ при } 0 \le x < GT, \\ e^{-Tx/2} \text{ при } x \ge GT. \end{cases}$$

Оценки качества ИБГ с использ Т. Петрова

Теорема

ИБГ за время $O(n^2)$ дает решение ЗК на минимум с оценками

$$\varepsilon_n = O\left(\frac{\beta_n / a_n}{n / \ln n}\right); \qquad \delta_n = O(n^{-1})$$

с условием асимптотической точности $\dfrac{\beta_n}{a_n} = o\left(\dfrac{n}{\ln n}\right)$,

где $\beta_n = b_n$, α_n, σ_n, сответственно, для распределений UNI(a_n, b_n), EXP(a_n, ∞) и NOR(a_n, ∞).

Евклидова ЗК на максимум (ETSP$_{max}$).

- ЗК наз-ся евклидовой, если вершины графа заданы точками в пр-ве $\mathbb{R}^k$, а длины ребер графа равны расстояниям между соответствующими точками.

- ЗК наз-ся евклидовой, если вершины графа заданы точками в пр-ве $\mathbb{R}^k$, а длины ребер графа равны расстояниям между соответствующими точками.

Problem Formulation

В полном n-верш. неор-м графе $G = (V, E)$ с весовой функцией $w : E \to \mathbb{R}^k$ найти такой гамильт. цикл H, что

$$\sum_{e \in H} w(e) \to \max_{\{H\}}.$$

Евклидова ЗК на максимум ($ETSP_{max}$).

- ЗК наз-ся евклидовой, если вершины графа заданы точками в пр-ве $\mathbb{R}^k$, а длины ребер графа равны расстояниям между соответствующими точками.

Problem Formulation

В полном n-верш. неор-м графе $G = (V, E)$ с весовой функцией $w : E \to \mathbb{R}^k$ найти такой гамильт. цикл H, что

$$\sum_{e \in H} w(e) \to \max_{\{H\}}.$$

- Детерминированная $ETSP_{max}$ решается асимптотически точно за время $O(n^3)$ [Сердюков (1987), Гимади (2001)].

Euclidean MAX TSP.

Максимальное взвешенного паросочетание в G

Отправной точкой в решении задачи является построение макс. взвешенного паросочетания $\mathcal{M}^*$ в $\mathbb{R}^k$, которое представляется в виде совокупности $\{\mathrm{I}_1, \ldots, \mathrm{I}_\mu\}$ прямолинейных интервалов (отрезков), $\mu = \lfloor n/2 \rfloor$.
$\mathcal{M}^*$ отыскивается за время $O(n^3)$ (Gabow-1983).

Euclidean MAX TSP.

Паросочетание макс. веса

Пусть $\mathcal{M}^* = \{\mathsf{I}_1, \ldots, \mathsf{I}_\mu\}$ — сем-во отрезков паросоч. макс. веса в графе G, $\mu = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
t-разбиением наз. разделение $\mathcal{M}^*$ на $t < \mu$ **легких** и $(\mu - t)$ **тяжелых** отрезков.
Для подмн-ва $\widetilde{\mathcal{M}^*} \subset \mathcal{M}^*$ тяжелых отрезков верно

$$W(\widetilde{\mathcal{M}^*}) \geq W(\mathcal{M}^*)\left(1 - \frac{t}{\mu}\right).$$

Euclidean MAX TSP.

Лемма Сердюкова-1984

Пусть в евкл. пр-ве $\mathbb{R}^k$ задано произв. мн-во из t прямолин. отрезков.

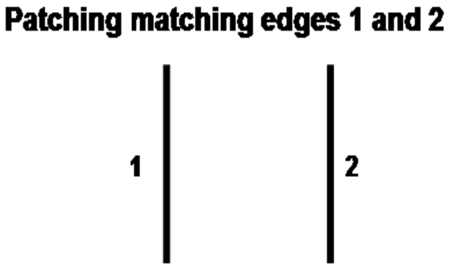
Тогда для наим. угла $\alpha = \alpha(k,t)$ между двумя отрезками из этого мн-ва верно

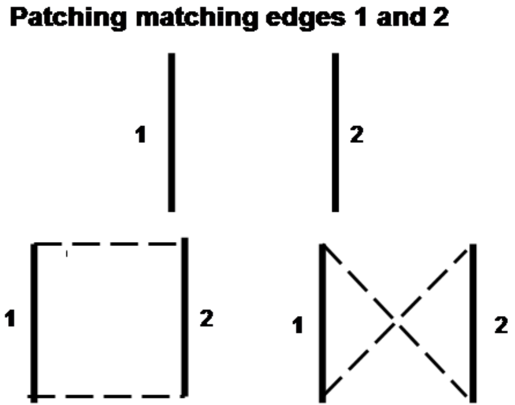
$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} \leq \frac{\gamma_k}{t^{2/(k-1)}},$$

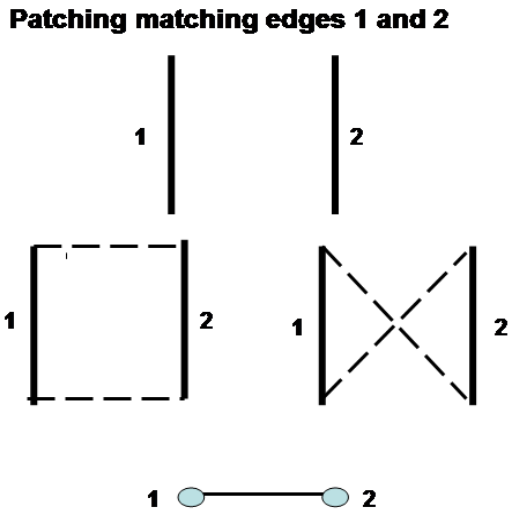
где конст. γ_k не зависит от t.

$\Rightarrow$ при фикс. разм-ти пр-ва $\lim\limits_{t\to\infty} \alpha(k,t) = 0.$

Euclidean MAX TSP.




Patching matching edges 1 and 2
1
2
1
2
1
2


Patching matching edges 1 and 2
1
2
1
2
1
2
1
2

Лемма о склеивании двух отрезков в $\mathbb{R}^k$

Пусть даны отрезки $\mathbf{l} = (x, y)$ и $\mathbf{l}' = (x', y')$ из $\mathcal{M}^*$ с углом $\alpha \leq \pi/2$ между ними. Тогда

$$w(\mathbf{l}) + w(\mathbf{l}') \geq$$

$$\geq \max \begin{cases} w(x, x') + w(y, y') \\ w(x, y') + w(y, x') \end{cases} \geq$$

$$\geq \Big(w(\mathbf{l}) + w(\mathbf{l}') \Big) \cos \frac{\alpha}{2}$$

Euclidean MAX TSP.

Реберные цепи (сцепки)

Назовем реберной сцепкой семейство смежных ("почти параллельных") тяжелых отрезков.

Схема алгоритма

Шаг 0. Строим $\mathcal{M}^*$ и его t-разбиение.
Шаг 1. Соединяем две несмежные сцепки с миним. углом между их крайними ребрами в одну реберную сцепку.
Повтор. шаг 1 пока число сцепок не станет $= t$.
Шаг 2. Встраиваем t легких ребер между соседними сцепками.
Шаг 3. Удаляя ребра $\mathcal{M}^*$ (кроме м.б. двух крайних), получаем H .

Euclidean MAX TSP.

Пример: $n = 26, \mu = 13; t = 3.$

Предварительный шаг:

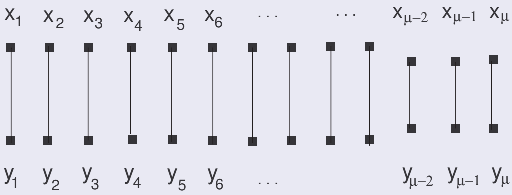
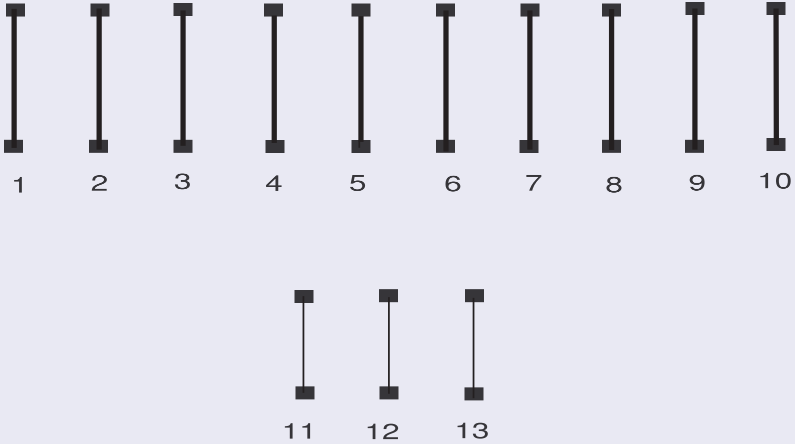


Рис. : Паросоч. $\mathcal{M}$ макс. веса и его разбиение на тяжелые и легкие ребра

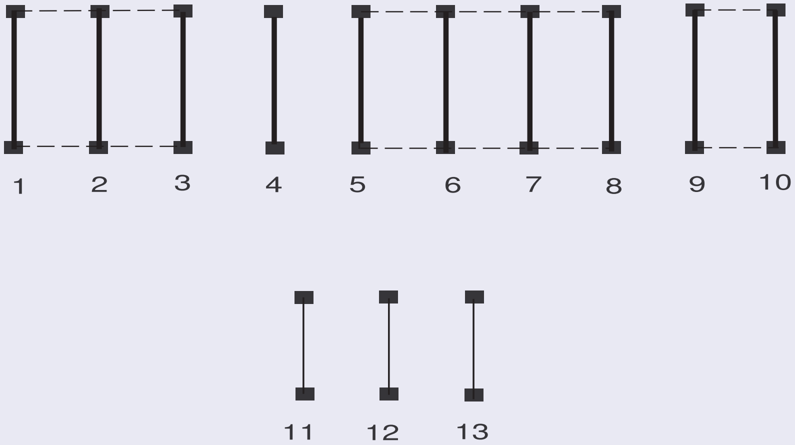
Euclidean MAX TSP.

Ребра паросоч. $\mathcal{M}$: тяжелые: 1–10; легкие 11–13.:



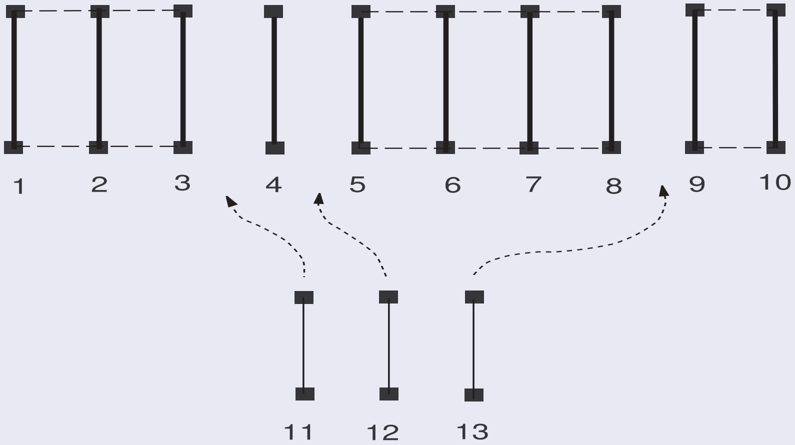
Euclidean MAX TSP.

Шаг 1. Сцепки из тяжелых ребер.



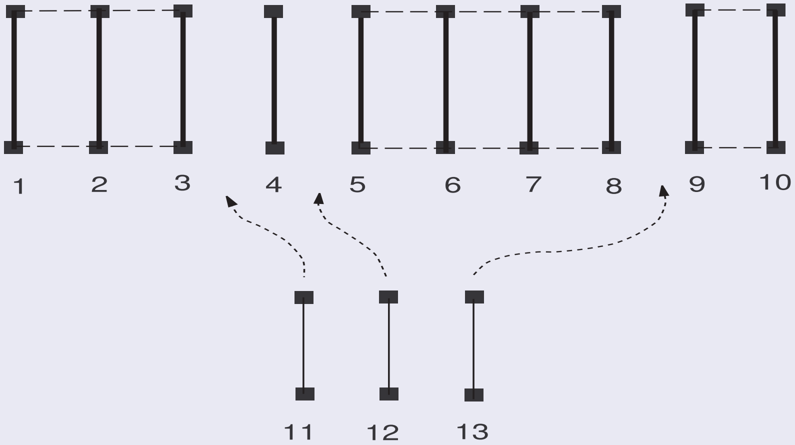
Euclidean MAX TSP.

Шаг 2. Вставка легких ребер



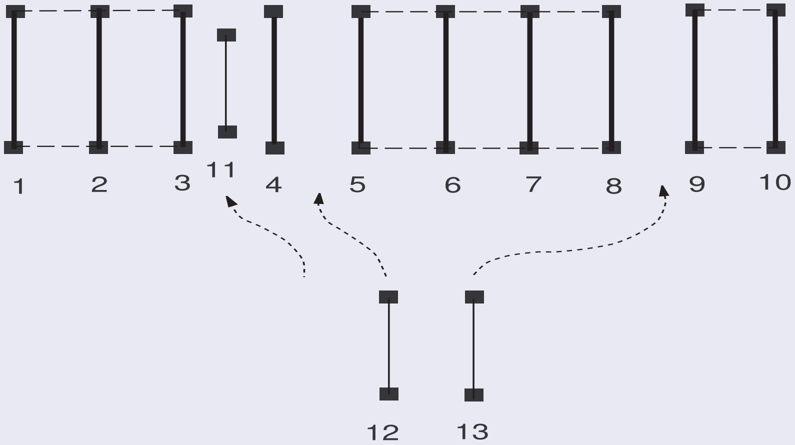
Euclidean MAX TSP.

Шаг 2. Вставка легких ребер

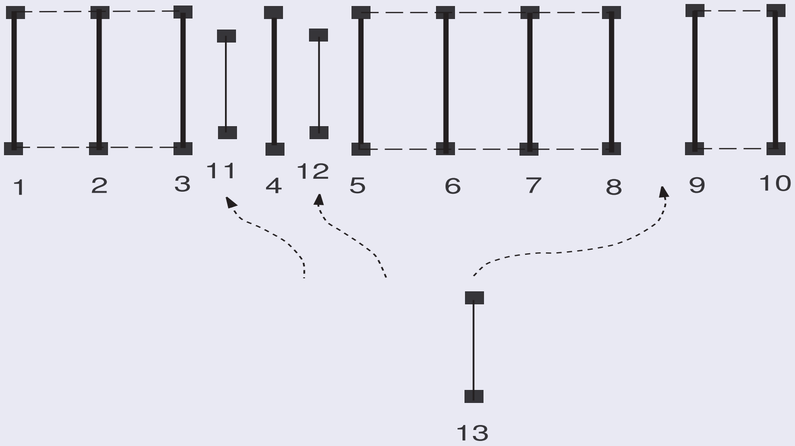


Euclidean MAX TSP.

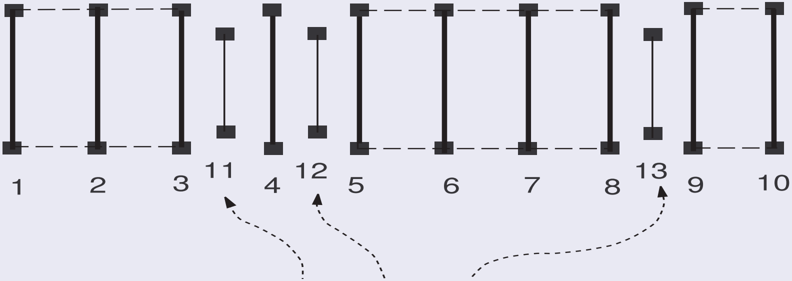
Шаг 2. Вставка легких ребер



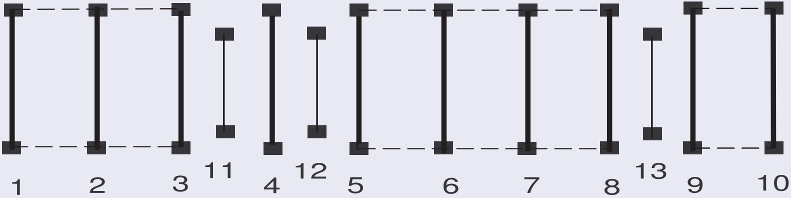
Шаг 2. Вставка легких ребер



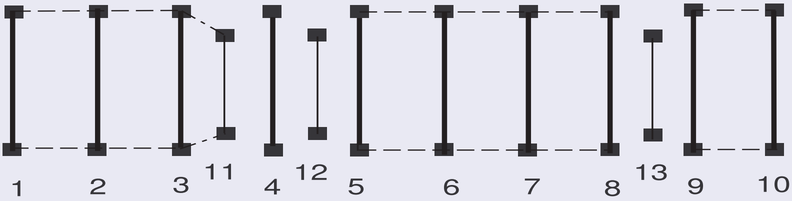
Шаг 2. Вставка легких ребер



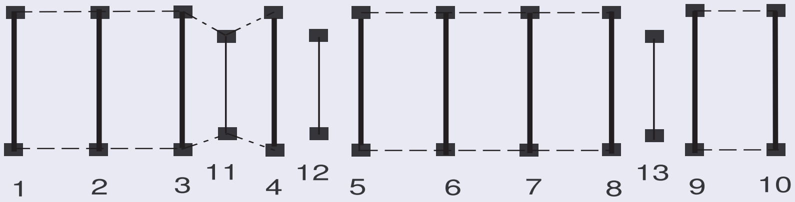
Шаг 2. Вставка легких ребер



Шаг 2. Встраивание легких ребер

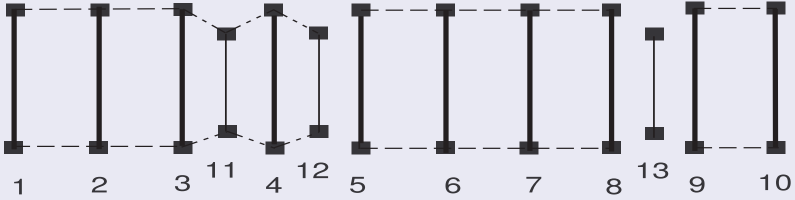


Шаг 2. Встраивание легких ребер:

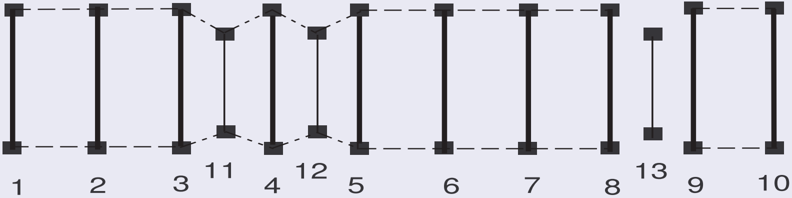


Euclidean MAX TSP.

Шаг 2. Встраивание легких ребер:

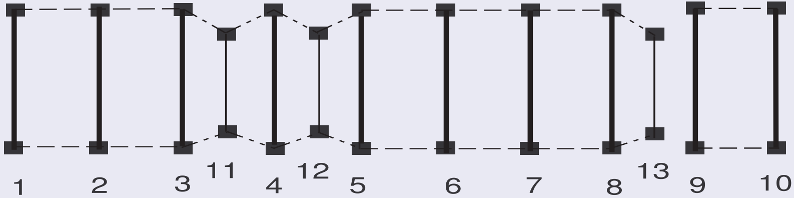


Шаг 2. Встраивание легких ребер:

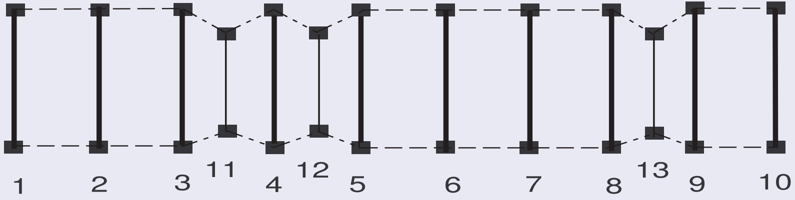


Euclidean MAX TSP.

Шаг 2. Встраивание легких ребер:

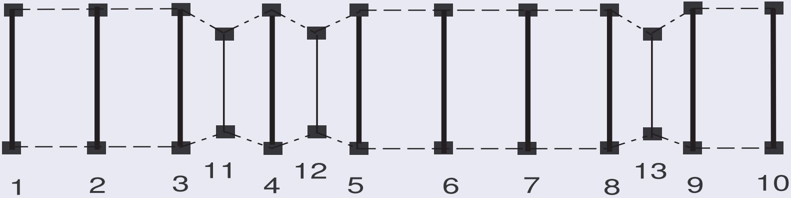


Шаг 2. Встраивание легких ребер:

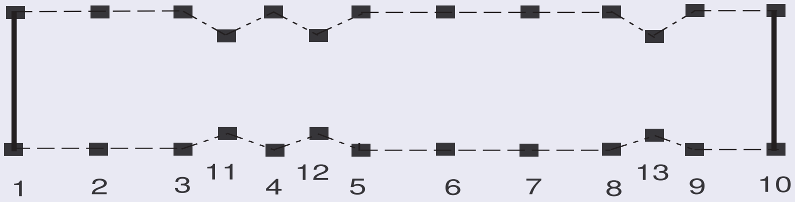


Euclidean MAX TSP.

Шаг 3. Убираем ребра паросоч., кроме м.б. двух



Шаг 3. Удалить $\mathcal{M}^*$-ребра, кроме м.б. двух



Euclidean MAX TSP.

Оценки качества алгоритма $A(t)$

$$\varepsilon_n \le \frac{2t}{n} + \frac{\gamma_k}{t^{2/(k-1)}}; \quad T_{A(t)} = O(n^3).$$

Теорема об асимптотич. точности A

Алгоритм с параметром $t = n^{(k-1)/(k+1)}$ асимптотически точен:

$$\varepsilon_n = \mathcal{O}\left(n^{-\frac{2}{k+1}}\right) \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

m-Peripatetic Salesman Problem [Крарун (1974)]

В полном n-верш. неор. графе $G = (V, E)$ с $w : E \to \mathbf{R}_+$ найти m реб.-неперес. гамильтоновых циклов $H_1, \ldots, H_m \subset E$ с мин. (макс.) сум. длиной $W(H_1) + \ldots + W(H_m)$, где $W(H) = \sum_{e \in H} w(e)$.

Задача об m коммивояжерах (m-PSP)

m-Peripatetic Salesman Problem [Краруп (1974)]

В полном n-верш. неор. графе $G = (V, E)$ с $w : E \to \mathbf{R}_+$ найти m реб.-неперес. гамильтоновых циклов $H_1, \ldots, H_m \subset E$ с мин. (макс.) сум. длиной $W(H_1) + \ldots + W(H_m)$, где $W(H) = \sum\limits_{e \in H} w(e)$.

- $m = 1 \Rightarrow$ обычная ЗК.

Задача об m коммивояжерах (m-PSP)

m-Peripatetic Salesman Problem [Крарун (1974)]

В полном n-верш. неор. графе $G = (V, E)$ с $w : E \to \mathbf{R}_+$ найти m реб.-неперес. гамильтоновых циклов $H_1, \ldots, H_m \subset E$ с мин. (макс.) сум. длиной $W(H_1) + \ldots + W(H_m)$, где $W(H) = \sum\limits_{e \in H} w(e)$.

- $m = 1 \Rightarrow$ обычная ЗК.
- Задача NP-трудна при $m \geq 2$ [De Kort (1991)].

Асимпт. точный подход к решению Eucl Max m-PSP

Алгоритм

- Сначала в графе G отыскивается макс. (по весу) паросочетание $\mathcal{M}^*$.

Асимпт. точный подход к решению Eucl Max m-PSP

Алгоритм

- Сначала в графе G отыскивается макс. (по весу) паросочетание $\mathcal{M}^*$.
- Затем последов. строются маршруты с использ. ребер паросочетания $\mathcal{M}^*$, но только в качестве вспомог. строит. лесов так, что ни один из постр-х маршрутов не содержит ребер $\mathcal{M}^*$.

Асимпт. точный подход к решению Eucl Max m-PSP

Алгоритм

- Сначала в графе G отыскивается макс. (по весу) паросочетание $\mathcal{M}^*$.
- Затем последов. строются маршруты с использ. ребер паросочетания $\mathcal{M}^*$, но только в качестве вспомог. строит. лесов так, что ни один из постр-х маршрутов не содержит ребер $\mathcal{M}^*$.
- Относ. погр-ть решения равна величине порядка $\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{2}{k+1}}$, где k-размерность пр-ва.

Асимпт. точный подход к решению Eucl Max m-PSP

Алгоритм

- Сначала в графе G отыскивается макс. (по весу) паросочетание $\mathcal{M}^*$.
- Затем последов. строются маршруты с использ. ребер паросочетания $\mathcal{M}^*$, но только в качестве вспомог. строит. лесов так, что ни один из постр-х маршрутов не содержит ребер $\mathcal{M}^*$.
- Относ. погр-ть решения равна величине порядка $\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{2}{k+1}}$, где k-размерность пр-ва.
- Получаем **условие асимптотической точности** алгоритма:

$$m = o(n).$$

Еще примеры труднорешаемых задач с реализациями асимптотически точного подхода к их решению

- Задача m-PSP на случ. входах с одинаковыми и с различными весовыми функциями маршрутов коммивояжера.
- Задача отыскания покрытия полного взвеш. графа m несмежными циклами заданных размеров с максимальным суммарным весом ребер в покрытии m-Cycles Cover Problem (m-CCP).
- Задачи маршрутизации транспортных средств (VRP) с одним и несколькими депо, с возвратом и необязательным возвратом в депо и др.
- Задача отыскания связного остовного подграфа с максимальным весом ребер в полном неориентированном графе с заданными степенями вершин.

- Задача отыскания в полном взвешенном графе остовного дерева с ограниченным снизу диаметром по критерию минимума суммарного веса ребер на случайных входных данных (Minimum Spanning Tree Bounded from Below – MSPBB)(на примере равномерного, показательного и усеченно-нормального распределений).
- Задача отыскания подмножества векторов заданного размера максимального суммарного веса (Vector Subset Problem – VSP)
- Задача разбиения графа на два подмножества (кластера) заданных размеров с нулевым центром одного из них по критерию минимума суммы квадратов расстояний вершин от соответствующих центров кластеров.

Обе задачи эквивалентны в том смысле, что точное решение одной задачи (на максимум) дает точное решение

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!