Двенадцатая Международная Азиатская школа-семинар «Проблемы оптимизации сложных систем»

Оценка условной устойчивости решения задачи продолжения для гиперболического уравнения

А. Т. Нурсеитова

Казахский Национальный университет имени аль-Фараби,
Казахский Национальный педагогический университет имени Абая,
г. Алматы, Казахстан

Новосибирск, Академгородок, 12-16 декабря 2016

Постановка задачи

В области $\Omega \times (0, T)$, $T > 0$,
$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} | x \in (0, h), y \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n\}$ рассматривается задача

$$u_{tt} = u_{xx} + L(y)u, \qquad (x, y) \in \Omega, \quad t \in (0, T), \tag{1}$$

$$u(x, y, 0) = u(x, y, T) = 0, \qquad (x, y) \in \overline{\Omega}, \tag{2}$$

$$u|_{\partial\mathcal{D}} = 0, \qquad x \in [0, h], \quad t \in [0, T], \tag{3}$$

$$u(0, y, t) = f(y, t), \qquad y \in \overline{\mathcal{D}}, \quad t \in [0, T], \tag{4}$$

$$u_x(0, y, t) = g(y, t), \qquad y \in \overline{\mathcal{D}}, \quad t \in [0, T]. \tag{5}$$

Будем полагать, что $\mathcal{D}$ – связная ограниченная область с липшицевой границей, а оператор $L(y)$ обладает следующими свойствами:

$$C_1 \sum_{j=1}^{n} \nu_j^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(y)\nu_i\nu_j \quad \text{для любых} \quad \nu_i \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = \overline{1, n}, \tag{7}$$

$$0 \leq c(y) \leq C_2, \tag{8}$$

$$a_{ij} \in C^1(\bar{\mathcal{D}}), \quad c \in C(\bar{\mathcal{D}}). \tag{9}$$

Постановка задачи

Задачу (1)–(5) рассматриваем как обратную к следующей *прямой задаче*

$$
\begin{aligned}
&u_{xx} = Au, && (x,y) \in \Omega, \quad t \in (0,T), && (10)\\
&u(x,y,0) = u(x,y,T) = 0, && (x,y) \in \overline{\Omega}, && (11)\\
&u|_{\partial\mathcal{D}} = 0, && x \in [0,h], \quad t \in [0,T], && (12)\\
&u_x(0,y,t) = g(y,t), && y \in \overline{\mathcal{D}}, \quad t \in [0,T], && (13)\\
&u(h,y,t) = q(y,t), && y \in \overline{\mathcal{D}}, \quad t \in [0,T], && (14)
\end{aligned}
$$

где $A(x)u = u_{tt}(x,y,t) - L(y)u(x,y,t)$, $x \in [0,h]$.
В **прямой задаче** (10)–(14) требуется определить функцию $u \in L_2(\Omega \times (0,T))$ по заданным функциям $q, g \in L_2(\mathcal{D} \times (0,T))$.
В **обратной задаче** (1)–(5) требуется определить функцию $q \in L_2(\mathcal{D} \times (0,T))$ из (10)–(14) по дополнительной информации о решении прямой задачи

$$u(0,y,t) = f(y,t), \quad y \in \overline{\mathcal{D}}, \quad t \in [0,T]. \qquad (15)$$

Определение

Функцию $u \in L_2(\Omega \times (0,T))$ будем называть **обобщенным решением задачи продолжения** (1)–(5), если для любых $\omega \in H^2(\Omega \times (0,T))$ таких, что

$$\omega(h,y,t) = 0, \qquad y \in \overline{\mathcal{D}}, \quad t \in [0,T], \tag{16}$$

$$\omega_x(h,y,t) = 0, \qquad y \in \overline{\mathcal{D}}, \quad t \in [0,T], \tag{17}$$

$$\omega(x,y,0) = \omega(x,y,T) = 0, \qquad (x,y) \in \overline{\Omega}, \tag{18}$$

$$\omega|_{\partial\mathcal{D}} = 0, \qquad x \in [0,h], \quad t \in [0,T], \tag{19}$$

выполняется условие

$$\int_\Omega \int_0^T u(\omega_{xx} - A\omega)dtdxdy = \int_{\mathcal{D}} \int_0^T (g(y,t)\omega(0,y,t) - f(y,t)\omega_x(0,y,t))dtdy. \tag{20}$$

Определение

Функцию $u \in L_2(\Omega \times (0,T))$ будем называть **обобщенным решением прямой задачи** (10)–(14), если для любых $\omega \in H^2(\Omega \times (0,T))$ таких, что

$$\omega(h,y,t) = 0, \qquad y \in \overline{\mathcal{D}}, \quad t \in [0,T], \tag{21}$$

$$\omega_x(0,y,t) = 0, \qquad y \in \overline{\mathcal{D}}, \quad t \in [0,T], \tag{22}$$

$$\omega(x,y,0) = \omega(x,y,T) = 0, \qquad (x,y) \in \overline{\Omega}, \tag{23}$$

$$\omega|_{\partial\mathcal{D}} = 0, \qquad x \in [0,h], \quad t \in [0,T], \tag{24}$$

выполняется условие

$$\int_\Omega \int_0^T u(\omega_{xx} - A\omega)dtdxdy$$
$$= \int_{\mathcal{D}} \int_0^T (g(y,t)\omega(0,y,t) + q(y,t)\omega_x(h,y,t))dtdy. \tag{25}$$

Теорема условной устойчивости

Пусть для некоторых $q, g \in L_2(\mathcal{D} \times (0,T))$ и $f \in H^1(\mathcal{D} \times (0,T))$ функция $u \in L_2(\Omega \times (0,T))$ является обобщенным решением задачи продолжения (1)–(5), тогда имеют место неравенства:

$$\begin{aligned}
\|u\|^2(x) \leq &\Big(\|q\|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\|_{C(\mathcal{D})} \cdot \|D_i f\| \cdot \|D_j f\| \\
&+ \frac{C_2}{2}\|f\|^2 - \frac{1}{2}\|f_t\|^2 - \frac{1}{2}\|g\|^2\Big)^{\frac{x}{l}} \times \\
&\times \Big(\|f\|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\|_{C(\mathcal{D})} \cdot \|D_i f\| \cdot \|D_j f\| \\
&+ \frac{C_2}{2}\|f\|^2 - \frac{1}{2}\|f_t\|^2 - \frac{1}{2}\|g\|^2\Big)^{\frac{l-x}{l}} \cdot e^{2x(l-x)} \\
&- \frac{C_1}{2}\sum_{j=1}^{n} \|D_j f\|^2 + \frac{1}{2}\|f_t\|^2 + \frac{1}{2}\|g\|^2,
\end{aligned} \tag{26}$$

$$
\begin{aligned}
\|u\|^2(x) \leq & \left(\|q\|^2 + \frac{1}{2}\|f_t\|^2 + \frac{1}{2}\|g\|^2 - \frac{C_1}{2}\sum_{i=1}^{n}\|D_i f\|^2\right)^{\frac{x}{l}} \times \\
& \times \left(\|f\|^2 + \frac{1}{2}\|f_t\|^2 + \frac{1}{2}\|g\|^2 - \frac{C_1}{2}\sum_{i=1}^{n}\|D_i f\|^2\right)^{\frac{l-x}{l}} \cdot e^{2x(l-x)} \\
& + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\|a_{ij}\|_{C(\mathcal{D})} \cdot \|D_i f\| \cdot \|D_j f\| \\
& + \frac{C_2}{2}\|f\|^2 - \frac{1}{2}\|f_t\|^2 - \frac{1}{2}\|g\|^2,
\end{aligned} \tag{27}
$$

$$
(26): \int_0^T \int_{\mathcal{D}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(y) D_i f \ D_j f dy dt + \int_0^T \int_{\mathcal{D}} c(y) f^2(y,t) dy dt > \|f_t\|^2 + \|g\|^2 \tag{28}
$$

$$
(27): \int_0^T \int_{\mathcal{D}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(y) D_i f \ D_j f dy dt + \int_0^T \int_{\mathcal{D}} c(y) f^2(y,t) dy dt < \|f_t\|^2 + \|g\|^2 \tag{29}
$$

Вспомогательные леммы

Пусть функция u - решение рассматриваемой задачи. Тогда имеют место следующие утверждения:

Lemma (1)

$$\int_0^T \int_{\mathcal{D}} uAu_x dydt = \int_0^T \int_{\mathcal{D}} u_x u_{xx} dydt, \tag{30}$$

Lemma (2)

$$\int_0^T \int_{\mathcal{D}} uAudydt = \int_0^T \int_{\mathcal{D}} u_x^2 dydt + \int_0^T \int_{\mathcal{D}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(y) D_i f \; D_j f dydt$$
$$+ \int_0^T \int_{\mathcal{D}} c(y) f^2 dydt - \|f_t\|^2 - \|g\|^2. \tag{31}$$

Доказательство

Каждую из функций q, $g \in L_2(\mathcal{D} \times (0, T))$, $f \in H^1(\mathcal{D} \times (0, T))$ приближаем соответствующими последовательностями $\{q_m\}$, $\{g_m\}$, $\{f_m\}$, $\{f'_{mt}\}$, $\{D_i f_m\}_{i=\overline{1,n}} \in C_0^\infty(\overline{\mathcal{D}} \times [0, T])$.
Для каждых $\{g_m, q_m\}$ существует единственное решение задачи (10)–(14) $u_m \in C^\infty(\overline{\Omega} \times [0, T])$.
Далее фиксируем индекс m и опускаем его. Рассматриваем функцию

$$\varphi(x) = \int_0^T \int_{\mathcal{D}} u^2(x, y, t)dydt \tag{32}$$

и дифференцируем ее дважды

$$\varphi'(x) = 2\int_0^T \int_{\mathcal{D}} uu_x(x, y, t)dydt, \tag{33}$$

$$\varphi''(x) = 2\int_0^T \int_{\mathcal{D}} (u_x^2 + uu_{xx})(x, y, t)dydt. \tag{34}$$

Доказательство

В силу (31) из (34) имеем

$$\varphi''(x) = 4\int_0^T \int_{\mathcal{D}} u_x^2(x,y,t)\,dydt + 4a, \tag{35}$$

$$a = \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathcal{D}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(y) D_i f \; D_j f dydt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathcal{D}} c(y) f^2(y,t)\,dydt$$
$$- \frac{1}{2}\|f_t\|^2 - \frac{1}{2}\|g\|^2. \tag{36}$$

Теперь рассмотрим функцию

$$\psi(x) = \ln\left(\varphi(x) + |a|\right), \tag{37}$$

$$\psi'(x) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x) + |a|}, \tag{38}$$

$$\psi''(x) = \frac{\varphi''(x)(\varphi(x) + |a|) - \varphi'(x)\varphi'(x)}{(\varphi(x) + |a|)^2}. \tag{39}$$

Доказательство

Покажем, что

$$\psi''(x) + 4 \geq 0, x \in [0, h]. \tag{40}$$

Рассмотрим только числитель, так как знаменатель положителен

$$\begin{aligned}
&\Big(4\int\int u_x^2 + 4a\Big)\Big(\int\int u^2 + |a|\Big) - \Big(2\int\int uu_x\Big)^2 + 4\Big(\int\int u^2 + |a|\Big) \\
&\quad = 4\left[\int\int u_x^2 \cdot \int\int u^2 - \Big(\int\int uu_x\Big)^2\right] + 4|a|\int\int u_x^2 + 4\Big(\int\int u^2\Big)^2 \\
&\quad\quad + 4(a+|a|)\int\int u^2 + 4|a|(a+|a|) \geq 0.
\end{aligned}$$

Т.о. функция $\psi(x) + 2x^2$ выпукла на $[0, h]$. Из свойства выпуклых функций имеем

$$\psi(x) + 2x^2 \leq \frac{x}{h}\big(\psi(h) + 2h^2\big) + \frac{h-x}{h}\psi(0).$$

Доказательство

Учитывая вид функций

$$\psi(x) = \ln\left(\varphi(x) + |a|\right),$$
$$\varphi(x) = \int_0^T \int_{\mathcal{D}} u^2(x,y,t)dydt,$$

из

$$\psi(x) + 2x^2 \leq \frac{x}{h}\left(\psi(h) + 2h^2\right) + \frac{h-x}{h}\psi(0)$$

имеем

$$\int_0^T \int_{\mathcal{D}} u^2(x,y,t)dydt \leq \left(\|q\|^2 + |a|\right)^{\frac{x}{h}} \left(\|f\|^2 + |a|\right)^{\frac{h-x}{h}} e^{2x(h-x)} - |a|, \tag{41}$$

где $$a = \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathcal{D}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(y) D_i f \; D_j f dydt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathcal{D}} c(y) f^2(y,t)dydt - \frac{1}{2}\|f_t\|^2 - \frac{1}{2}\|g\|^2. \tag{42}$$

Благодарю за внимание!