

Двенадцатая Международная Азиатская школа-семинар  
«Проблемы оптимизации сложных систем»

Новосибирск, Академгородок, 12-16 декабря 2016 г.

## Решение обратной задачи для системы Стритера – Фелпса

Д. Б. Нурсеитов<sup>1</sup>, А. А. Азимов<sup>1</sup>, А. В. Готовцев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Национальная научная лаборатория коллективного пользования информационных и космических технологий, Казахский национальный исследовательский технический университет им. К. И. Сатпаева, г. Алматы, Казахстан

<sup>2</sup>Институт водных проблем Российской академии наук, г. Москва, Россия

- Для определения таких важнейших показателей качества воды как *биохимическая потребность в кислороде* ( $L_0$ ) и коэффициент скорости биохимического потребления кислорода ( $k_0$ ) до настоящего времени использовалось аналитическое решение обратной задачи модифицированной системы Стритера – Фелпса.
- Это решение было получено для частного случая, когда периоды инкубаций двух измерений *биохимического потребления кислорода* ( $BOD_t$ ) были кратными величинами.
- В работе приводятся формулировка и численное решение обратной задачи для произвольного числа измерений с произвольными периодами инкубации, а также примеры обработки экспериментальных данных.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-17-00672) и Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (проекты №757.МОН.ГФ.15.ИИТ.4, №1746/ГФ4).

Рассматривается модифицированная система Стритера – Фелпса

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= -k_1 L, \\ \frac{dC}{dt} &= -k_1 L + k_2(C_S - C), \\ k_1 &= k_0 \frac{C}{C_S},\end{aligned}\tag{1}$$

где

$t > 0$  – время,

$L$  – концентрация растворенного органического вещества,

$C$  – концентрация растворенного кислорода,

$C_S$  – концентрация кислородного насыщения,

$k_0$  и  $k_2$  – константы, характеризующие скорость биохимического потребления кислорода и скорость реэрации.

Система (1) с начальными условиями

$$C(0) = C_0, L(0) = L_0, \quad (2)$$

и условием отсутствия аэрации

$$k_2 = 0$$

описывает процесс распада органического вещества, происходящий в пробе воды, помещенной в герметичную колбу при определении величины биохимического потребления кислорода  $BOD_t$ , а также в покрытых льдом речных руслах и водоемах.

## Постановка задачи

В системе (1), (2) неизвестными считаются параметры  $k_0$  и  $L_0$ . Для их определения путем гидрохимического измерения находятся значения биохимического потребления кислорода

$$BOD_t = C_0 - C(t)$$

в определенные моменты времени, откуда находятся значения  $C(t)$ , что можно записать в виде условия

$$C(t_j) = f_j, \quad j = 1, \dots, M. \quad (3)$$

Обратная задача состоит в определении параметров  $k_0$  и  $L_0$  так, чтобы решение задачи (1), (2) удовлетворяло условию (3). Задача сводится к оптимизационной, связанной с минимизацией функционала вида

$$I(k_0, L_0) = \sum_{j=1}^M [C(t_j) - f_j]^2.$$

# Градиентный метод

Решение полученной задачи осуществляется градиентным методом. Градиент функционала  $I' = (I'_{k_0}, I'_{L_0})$  определяется соотношениями

$$I'_{k_0} = \int_0^T \frac{CL}{C_S} (p_1 + p_2), \quad I'_{L_0} = -p_1(0),$$

где  $p_1, p_2$  – решение сопряженной задачи

$$\frac{dp_1}{dt} = k_0 \frac{C}{C_S} (p_1 + p_2),$$

$$\frac{dp_2}{dt} = k_0 \frac{L}{C_S} (p_1 + p_2) + 2 \sum_{j=1}^M [C(t) - f(t)] \delta(t - t_j),$$

с условиями

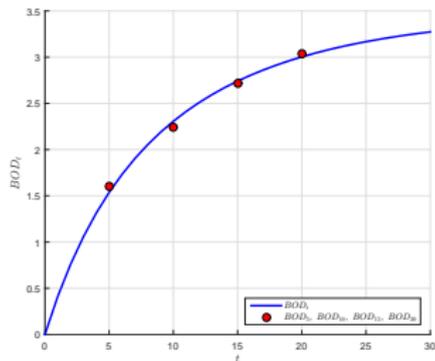
$$p_1(T) = 0, \quad p_2(T) = 0.$$

# Результаты решения обратной задачи

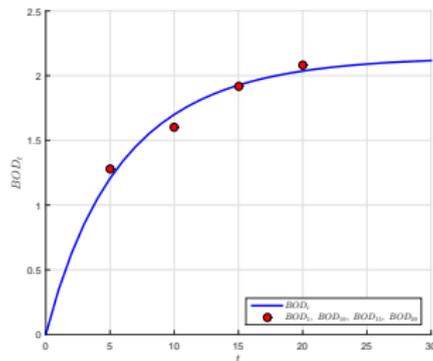
В таблице приведены результаты решения обратной задачи при определении  $L_0$  и  $k_0$  для четырех различных серий экспериментальных значений  $BOD_5$ ,  $BOD_{10}$ ,  $BOD_{15}$ ,  $BOD_{20}$ .

Серия измерений	Результаты измерений				Результаты решения обратной задачи	
	$BOD_5$	$BOD_{10}$	$BOD_{15}$	$BOD_{20}$	$L_0$	$k_0$
№						
1	1.60	2.24	2.72	3.04	3.48	0.129
2	1.28	1.60	1.92	2.08	2.14	0.18
3	0.96	1.12	1.44	1.76	2	0.011
4	0.64	0.8	1.44	1.92	29.65	0.0036

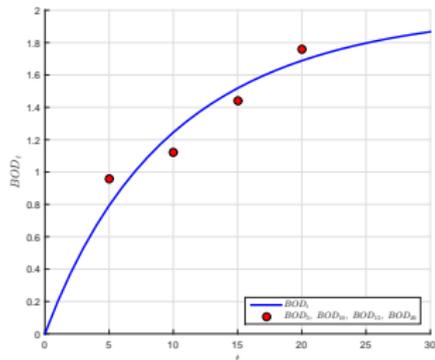
# Результаты решения обратной задачи



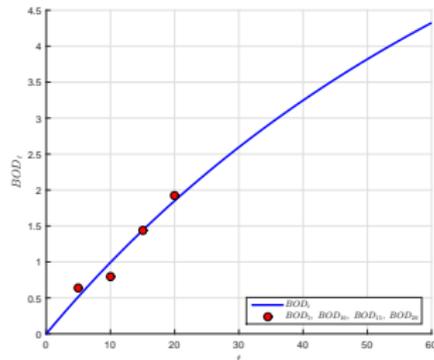
Серия 1



Серия 2



Серия 3



Серия 4

- Предложен алгоритм численного решения обратной задачи модифицированной системы Стритера – Фелпса
- Приведены примеры обработки экспериментальных данных.
- Проведенные расчеты для серий экспериментальных значений  $BOD_5$ ,  $BOD_{10}$ ,  $BOD_{15}$ ,  $BOD_{20}$  иллюстрируют возможности предложенного алгоритма.
- Предложенный алгоритм позволяет решать задачу для произвольного числа измерений с произвольными периодами инкубации.

-  Streeter H. W., Phelps E.B. 1925. A Study of the Pollution and Natural Purification of the Ohio River // U.S. Publ. Health Service Bull. № 146. P. 1–75
-  Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2008. – 460 с.
-  Готовцев А. В. Модификация системы Стритера – Фелпса с целью учета обратной связи между концентрацией растворенного кислорода и скоростью окисления органического вещества // Водные ресурсы. 2010 Т. 37. №2. С. 250–256

-  Готовцев А. В. Определение БПК и коэффициента скорости биохимического потребления кислорода: мониторинг, прямая и обратная задачи, формулы, расчеты и таблицы // Водные ресурсы, 2016, том 43, № 6. – С. 633–647.
-  Азимов А. А., Готовцев А. В., Нурсеитов Д. Б., Джамалов Д. К. Численное решение обратной задачи замкнутой системы Стритера – Фелпса для двух периодов инкубации // Водные ресурсы Центральной Азии и их использование. Материалы Международной научно-практической конференции, посвященной подведению итогов объявленного ООН десятилетия «Вода для жизни». Книга 1. Алматы, Казахстан, 22–24 сентября 2016 . С. 56-63.

Благодарю за внимание!