Седловое представления задач поиска конкурентных равновесий в транспортно-экономических сетях

Гасников Александр Владимирович

д.ф.-м.н., доц. МФТИ, в.н.с. ИППИ РАН

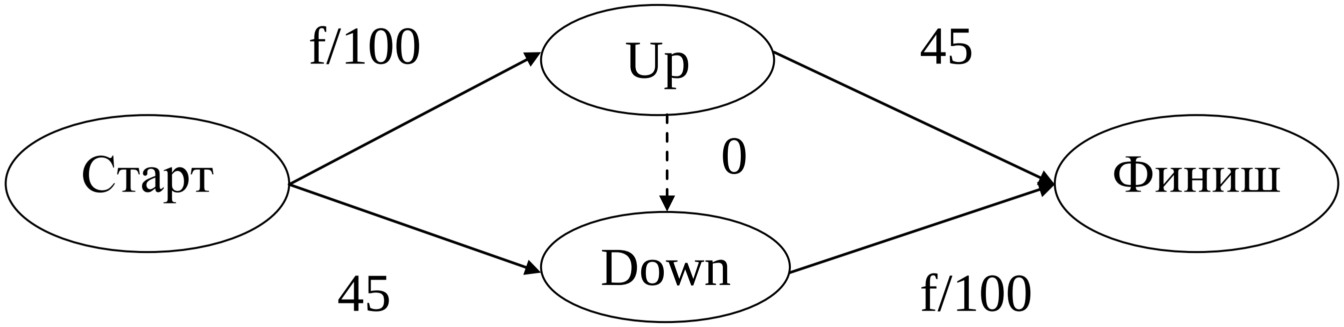
gasnikov@yandex.ru

Двенадцатая Международная Школа-семинар «Проблемы оптимизации сложных систем»

Новосибирск, Академгородок, ИВМиМГ СО РАН

12-16 декабря 2016 г.

Парадокс Браеса (модель Бэкмана)



Корреспонденция: $d = 4000\ авт/час,\ x_{up} + x_{down} = d.$

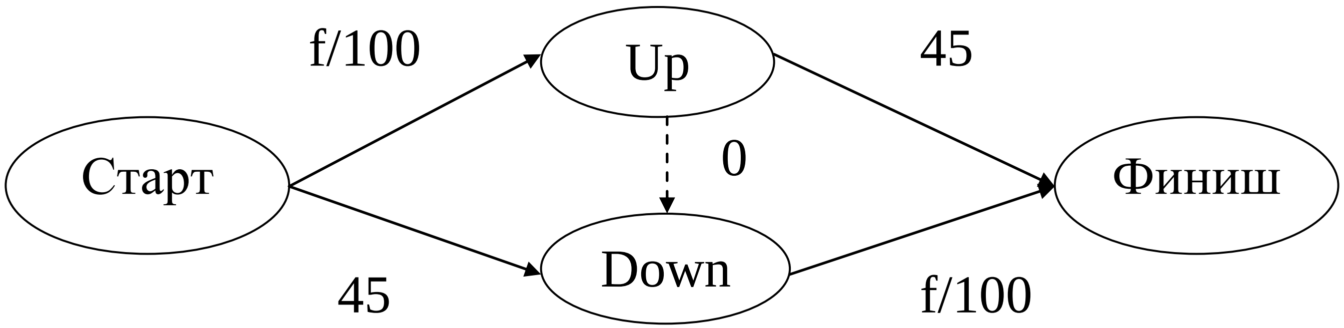
Равновесие: $x_{up} = 2000\ авт/час, x_{down} = 2000\ авт/час,$

$$\tilde{T}_{up}(x) = \tilde{T}_{down}(x) = 65\ мин.$$

Равновесие (если есть ребро Up->Down): $x_{up,down} = 4000\ авт/час,$

$$\tilde{T}_{up,down}(x) = 80\ мин.$$

Парадокс Браеса (модель Бэкмана)

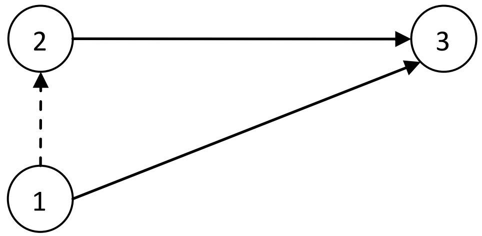


$$\boxed{\Psi(f)=\sum_{e\in E}\sigma_e(f_e)\to\min_{f=\Theta x,\,x\in X}},\ \sigma_e(f_e)=\int_0^{f_e}\tau_e(z)\,dz. \qquad (1)$$

Платные дороги: $\overline{\tau}(f)=\tau(f)+\underbrace{f\tau'(f)}_{штраф}$. (VCG – механизм);

$$x_{up}=x_{down}=1750\ авт/час,\ x_{up,down}=500\ авт/час.$$

Парадокс Браеса (модель Стабильной Динамики)



Корреспонденции: $d_{13} = d_{23} = 1500\ \text{авт/час},\ d_{12} = 0;$

$$\tau_e^{\mu}(f_e) \xrightarrow[\mu \to 0+]{} \begin{cases} \bar{t}_e, & 0 \le f_e < \bar{f}_e \\ [\bar{t}_e, \infty), & f_e = \bar{f}_e \end{cases},\ \text{BPR}:\ \tau_e(f_e) = \bar{t}_e \cdot \left(1 + \eta \cdot \left(f_e / \bar{f}_e\right)^{\frac{1}{\mu}}\right),$$

$$(\bar{f}_{12} = \bar{f}_{13}) = \bar{f}_{23} = 2000\ \text{авт/час},\ \bar{t}_{13} = 1\ \text{час},\ \bar{t}_{23} = 30\ \text{мин},\ \bar{t}_{12} = 15\ \text{мин}.$$

Равновесие (без 1-2): $x_{13} = x_{23} = 1500\ \text{авт/час},\ T_{13} = 1\ \text{час},\ T_{23} = 30\ \text{мин}.$

Равновесие (с 1-2): $x_{13} = 1000\ \text{авт/час},\ x_{123} = 500\ \text{авт/час},$

$x_{23} = 1500\ \text{авт/час},\ T_{13} = 1\ \text{час},\ T_{23} = 45\ \text{мин}.$

Если в (1) перейти к пределу $\mu \to 0+$, то: $\boxed{\sum_{e \in E} f_e \bar{t}_e \to \min_{f = \Theta x,\ f \le \bar{f},\ x \in X}}.$

Обобщение

Обозначим множество пар $w=(i,j)$ источник-сток OD, x_p – поток по пути p; P_w – множество путей, отвечающих корреспонденции w, $P=\bigcup_{w\in OD} P_w$ – множество всех путей; $f_e(x)=\sum_{p\in P}\delta_{ep}x_p$ – поток на ребре e (здесь и далее $x=\{x_p\}$, $f=\Theta x$), где $\delta_{ep}=\begin{cases}1, & e\in p\\ 0, & e\notin p\end{cases}$; $\tau_e(f_e)$ – затраты на ребре e ($\tau_e'(f_e)\geq 0$); $T_p(x)=\sum_{e\in E}\tau_e(f_e(x))\delta_{ep}$ – затраты на пути p; $X=\left\{x\geq 0:\ \sum_{p\in P_w} x_p=d_w, w\in OD\right\}$ – множество допустимых распределений потоков по путям, где d_w – корреспонденция, отвечающая паре w.

Определение 1. *Распределение потоков по путям* $x = \{x_p\} \in X$ *называется равновесием (Нэша–Вардропа) в популяционной игре* $\left\langle \{x_p\} \in X, \{\tilde{T}_p(x)\} \right\rangle$, *если из* $x_p > 0$ *(*$p \in P_w$*) следует* $\tilde{T}_p(x) = \min_{q \in P_w} \tilde{T}_q(x)$.

Или, что то же самое:

$$\text{для любых } w \in OD,\ \ p \in P_w \text{ выполняется } x_p \cdot \left(\tilde{T}_p(x) - \min_{q \in P_w} \tilde{T}_q(x) \right) = 0.$$

Теорема 1. *Популяционная игра* $\left\langle \{x_p\} \in X, \{\tilde{T}_p(x)\} \right\rangle$ *является потенциальной. Равновесие* x^* *в этой игре всегда существует, и находится из решения задачи выпуклой оптимизации (*$\tilde{T}(x) = \nabla \Psi(f(x))$*)*

$$x^* \in \operatorname{Arg}\min_{x \in X} \Psi(f(x)) = \sum_{e \in E} \int_0^{f_e(x)} \tau_e(z)\,dz = \sum_{e \in E} \sigma_e(f_e(x)). \qquad (1)$$

Для дальнейшего будет важно переписать задачу $\min_{x\in X}\Psi\left(f\left(x\right)\right)$ через двойственную:

$$\min_{x\in X}\Psi\left(f\left(x\right)\right)=\min_{f,x}\left\{\sum_{e\in E}\sigma_e\left(f_e\right):\ f=\Theta x,\ x\in X\right\}=$$

$$=\min_{f,x}\left\{\sum_{e\in E}\max_{t_e\in\mathrm{dom}\ \sigma_e^*}\left[f_e t_e-\sigma_e^*\left(t_e\right)\right]:\ f=\Theta x,\ x\in X\right\}=$$

$$=\max_{t\in\mathrm{dom}\ \sigma^*}\left\{\min_{f,x}\left[\sum_{e\in E}f_e t_e:\ f=\Theta x,\ x\in X\right]-\sum_{e\in E}\sigma_e^*\left(t_e\right)\right\}=$$

$$=\max_{t\geq\bar{t}}\left\{\sum_{w\in OD}d_w T_w\left(t\right)-\left\langle\bar{f},t-\bar{t}\right\rangle-\mu\sum_{e\in E}h\left(t_e-\bar{t}_e,\bar{t}_e,\bar{f}_e,\mu\right)\right\},\qquad(2)$$

где $\sigma_e^*(t_e)$ – сопряженная функция к $\sigma_e(f_e)$, $T_w(t) = \min_{p\in P_w} \sum_{e\in E} \delta_{ep} t_e$ – длина кратчайшего пути из i в j ($w = (i, j)$) на графе, взвешенном согласно вектору t, $h(t_e - \bar{t}_e, \bar{t}_e, \bar{f}_e, \mu)$ – сильно выпуклая функция по первому аргументу. При этом $\tau_e^\mu(f_e(x(\mu))) \xrightarrow[\mu\to 0+]{} t_e$, где $x(\mu)$ – равновесное распределение потоков, рассчитывающееся по формуле (1), а $t = \{t_e\}$– решение задачи (2), при естественных условиях единственное. Описанный предельный переход позволяет переходить к задачам, в которых вместо функции затрат на ребрах $\tau_e(f_e)$ заданны ограничения на пропускные способности $0 \le f_e \le \bar{f}_e$ и затраты $\bar{t}_e$ на прохождения ребер, когда на ребрах нет “пробок” ($f_e < \bar{f}_e$).

Основным для дальнейшего выводом из этого всего является способ (основанный на применении теоремы Демьянова–Данскина, как правило, в градиентном варианте в виду единственности t) потенциального описания набора $T(d) := \left\{T_w\left(t(d)\right)\right\}$:

$$T(d) = \partial_d \underbrace{\min_{x \in X(d)} \Psi\left(f(x)\right)}_{\Phi(d)} =$$

$$= \partial_d \underbrace{\max_{t \geq \bar{t}} \left\{ \sum_{w \in OD} d_w T_w(t) - \left\langle \bar{f}, t - \bar{t} \right\rangle - \mu \sum_{e \in E} h\left(t_e - \bar{t}_e, \bar{f}_e, \mu\right) \right\}}_{\Phi(d)}. \qquad (3)$$

Выше матрица корреспонденций $\{d_w\}_{w\in OD}$ была задана по постановке задачи. Сейчас мы откажемся от этого условия, вводя в источники O производство, а в стоки D – потребление. Агенты “появляются” в тех пунктах производства, произведя товар в которых его можно с выгодой для себя реализовать в каком-нибудь из пунктов потребления. Это означает, что затраты на производство и затраты на транспортировку полностью окупаются последующей выручкой от реализации продукции в пункте потребления. Агенты, которых мы здесь считаем маленькими, будут “приходить” в систему до тех пор, пока существует цепочка (пункт производства–маршрут–пункт потребления), обеспечивающая им положительную прибыль. Важно отметить, что по ходу “наплыва” агентов транспортная сеть становится все более и более загруженной, что может сказываться на затратах на перевозку. В результате прибыль ранее пришедших агентов падает, что побуждает их перераспределяться, т.е. искать более выгодные цепочки. Возникает ряд вопросов. Например, сходится ли такая динамика (точнее семейство динамик, отражающих рациональность агентов) к равновесию? Если сходится, то единственно ли равновесие? Если равновесие единственно, то как его можно эффективно найти (описать)? Попытка ответить на эти вопросы (но, прежде всего, на последний вопрос) для достаточно широкого и важного в приложениях класса задач предпринята далее.

Рассмотрим сначала для большей наглядности отдельно потенциальный случай. А именно тот случай, когда в источнике $i \in O$ производственная функция имеет вид $\sigma_i\left(f_i\right)$, где $f_i = \sum_{k:(i,k)=e\in E} f_e = \sum_{j:(i,j)\in OD} d_{ij}$, аналогично для стоков $j \in D$ определим функции полезности со знаком минус $\sigma_j\left(f_j\right)$, $f_j = \sum_{k:(k,j)=e\in E} f_e = \sum_{i:(i,j)\in OD} d_{ij}$. Все эти функции считаем выпуклыми. Мы обозначаем эти функции одинаковыми буквами, однако, это не должно вызвать в дальнейшем путаницы в виду характерных нижних индексов. Редуцируем рассматриваемую задачу к рассмотренной ранее задаче. Рассмотрим новый граф с множеством вершин $O\bigcup D$, соединенных теми же ребрами, что и в изначальном графе, и с одним дополнительным фиктивным источником и одним дополнительным фиктивным стоком. Этот фиктивный источник соединим со всеми источниками O, аналогично фиктивный сток соединим со всеми стоками D. Если существует путь из источника i в сток j в исходном графе, то в новом графе прочертим соответствующее ребро с функцией затрат $T_{ij}\left(d\right)$. Проведем дополнительное (фиктивное) ребро, соединяющее фиктивный источник с фиктивным стоком, затраты на прохождения которого тождественный ноль. Получим в итоге ориентированный граф путей из источника в сток. Легко понять, что мы оказываемся “почти” в условиях предыдущего пункта (причем с более частным графом – с одним источником и стоком) с точностью до обозначений:

$$\left\{x_p\right\} \to \left\{d_{ij}\right\},\ \left\{\tau_e\left(f_e\right)\right\} \to \left\{\sigma_i'\left(f_i\right), T_{ij}\left(d\right), \sigma_j'\left(f_j\right)\right\}.$$

“Почти”, потому что, во-первых, затраты $T_{ij}\left(d\right)$ зависят от всего набора $\left\{d_{ij}\right\}$, а не только от d_{ij}, а во-вторых, не ясно что в данном случае играет роль матрицы корреспонденций (в нашем случае это матрица 1×1, т.е. просто число). Начнем с ответа на второй вопрос. Мы считаем, что в источниках имеется потенциальная возможность производить неограниченное количество продукта, просто в какой-то момент, перестает быть выгодным что-то производить и перевозить. Для этого, собственно, и было введено нулевое ребро, поток по которому обозначим d_0. То есть, другими словами, мы должны считать, что $\sum_{(i,j)\in W} d_{ij} + d_0 = \bar{d}$. Если $\bar{d}$ – достаточно большое, то равновесная конфигурация не зависит от того, чему именно равно $\bar{d}$, поскольку не требуется определять d_0. С первой проблемой можно разобраться, немного обобщив теорему 1. Предположим, что (см. формулу (3))

$$\exists\ \Phi(d) \text{ - выпуклая}: T(d) = \nabla\Phi(d). \tag{4}$$

Тогда имеет место

Теорема 2. *Популяционная игра*

$$\left\langle \left\{ d_{ij}, d_0 \geq 0 \right\}, \left\{ G_{ij}(d) = \sigma_i'(f_i) + T_{ij}(d) + \sigma_j'(f_j), G_0(d) \equiv 0 \right\} \right\rangle,$$

является потенциальной. Равновесие d^* *в этой игре всегда существует (если* $\sigma(\cdot)$ *– сильно выпуклые функции, то равновесие гарантировано единственно), и находится из решения задачи выпуклой оптимизации*

$$d^* \in \arg\min_{d \geq 0} \tilde{\Psi}(d),$$

$$\tilde{\Psi}\left(d = \left\{ d_{ij} \right\}\right) = \sum_{i \in O} \sigma_i \left(\sum_{j:(i,j) \in OD} d_{ij} \right) + \sum_{j \in D} \sigma_j \left(\sum_{i:(i,j) \in OD} d_{ij} \right) + \Phi(d). \qquad (5)$$

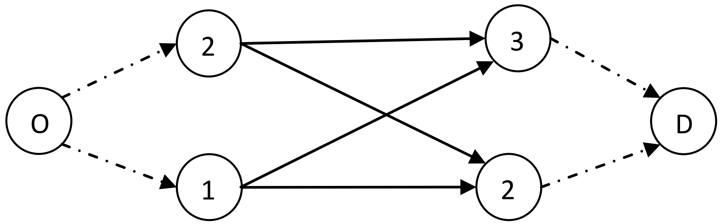
Именно такая конструкция и была рассмотрена в работе А.А. Шананин и др., 2014 (для многопродуктового рынка грузоперевозок РЖД). Если искать стохастическое равновесие, то функционал в теореме 2 необходимо энтропийно регуляризовать. Такие конструкции рассматривались (в нерегуляризованном случае), например, Гасников–Нестеров, 2014. Уже в этой работе можно углядеть необходимость искусственного введения потенциалов (двойственных множителей) в сами функции σ. А именно, предполагается, что все эти функции σ – линейные с неизвестными наклонами. Тем не менее, считается, что при этом известно, чему должны равняться в равновесии следующие суммы:

$$\sum_{j:(i,j)\in OD} d_{ij} = L_i, \quad \sum_{i:(i,j)\in OD} d_{ij} = W_j \ (\sum_{i\in O} L_i = \sum_{j\in D} W_j = N). \tag{6}$$

То есть имеются скрытые от нас (модельера) потенциалы (параметры) $\left\{\lambda_i^L, \lambda_j^W\right\}$, которые могут быть рассчитаны исходя из дополнительной информации. Применительно к модели расчета матрицы корреспонденций выписанные дополнительные условия (6) однозначно определяют все неизвестные потенциалы. Однако при этом вместо задачи выпуклой оптимизации мы получаем минимаксную (седловую) задачу выпуклую по $\left\{d_{ij}\right\} \geq 0$ и вогнутую, точнее даже линейную, по потенциалам $\left\{\lambda_i^L, \lambda_j^W\right\}$:

$$\min_{\substack{\{d_{ij}\}\geq 0 \\ \sum_{(i,j)\in W} d_{ij} = N}} \max_{\left\{\lambda_i^L, \lambda_j^W\right\}} \left[\sum_{i\in O} \lambda_i^L \cdot \left(\sum_{j:(i,j)\in OD} d_{ij} - L_i\right) + \sum_{j\in D} \lambda_j^W \cdot \left(W_j - \sum_{i:(i,j)\in OD} d_{ij}\right) + \Phi(d) + \gamma \sum_{(i,j)\in OD} d_{ij} \ln\left(d_{ij}/N\right)\right]. \tag{7}$$

Энтропийная модель расчета матрицы корреспонденций



$$\sum_{i=1,\ j=1}^{n,\ n} T_{ij} d_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i^L \sum_{j=1}^{n} d_{ij} \right) + \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_j^W \sum_{i=1}^{n} d_{ij} \right) + \gamma \sum_{i,\ j=1}^{n} d_{ij} \ln d_{ij} \ \to \min_{\sum_{i,\ j=1}^{n} d_{ij} = N,\ \{d_{ij}\} \ge 0},$$

$\left\{ \lambda_i^L, \lambda_j^W \right\}$ – потенциалы “притяжения” районов (Канторович–Гавурин).

К сожалению, они не известны. Зато известны такие $\left\{ L_i, W_j \right\}$, что

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij} = L_i,\ \sum_{i=1}^{n} d_{ij} = W_j\ \left(N = \sum_{i=1}^{n} L_i = \sum_{j=1}^{n} W_j \right). \qquad \text{(A)}$$

$$\boxed{\sum_{i=1,\ j=1}^{n,\ n} T_{ij} d_{ij} + \gamma \sum_{i,\ j=1}^{n} d_{ij} \ln d_{ij} \ \to \min_{d \in (\mathrm{A}),\ \{d_{ij}\} \ge 0}.}$$

Проблема (возникающая при попытке построить многостадийную модель): $d(T)$ возникает в модели расчета матрицы корреспонденций, а $T\left(\left\{\tau_e\left(f_e(d)\right)\right\}\right)$, где $f_e(d)$ рассчитывается согласно модели Бэкмана или модели Стабильной Динамики. Получается порочный круг!

На практике проблему решали с помощью метода простых итераций (искали неподвижную точку). Однако не было установлено, что такая процедура сходится и, тем более, не было оценок скорости сходимости. Был предложен новый способ записи этой задачи!

Ключевое наблюдение:

$$T\left(\left\{\tau_e\left(f_e(d)\right)\right\}\right)=\partial_d\left(\min_{f=\Theta x,\, x\in X(d)}\Psi\left(f(x)\right)\right)\ \left(\nabla_x\Psi\left(f(x)\right)=\tilde{T}(x), T_{ij}=\min_{p\in P_{ij}}\tilde{T}_p\right).$$

$$\boxed{\Psi\left(f(x)\right)+\gamma\sum_{i,j=1}^{n}d_{ij}\ln d_{ij}\ \to \min_{d\in(\mathrm{A}),\,\{d_{ij}\}\geq 0;\ f=\Theta x,\, x\in X(d)}}.$$

Сетевая модель алгоритмического рыночного поведения

Предположим теперь, что имеется m видов товаров и, дополнительно, имеется q типов материалов (количества которых можно использовать в единицу времени ограничены вектором b), использующихся в производстве. В источниках располагаются производители товаров, а в стоках потребители. Мы считаем, что любой производитель товара, одновременно, является и потребителем, т.е. $O \subseteq D$. Обозначим через y – вектор цен (руб.) на материалы; λ_i^L – вектор цен (руб.), по которым производитель продает товары перевозчику в пункте производства i, λ_j^W – вектор цен (руб.), по которым потребитель покупает товары у перевозчика в пункте потребления j. Опишем каждого экономического агента:

***i*-й Производитель**

$U_i \subset \mathbb{R}_+^m$ – максимальное технологическое множество (замкнутое, выпуклое);

$\alpha_i \in [0,1]$ – уровень участия;

$\chi_i(\alpha_i U_i) = \alpha_i \chi_i(U_i)$ – постоянные технологические производственные затраты (руб.) при уровне участия α_i (в единицу времени);

$L_i \in \alpha_i U_i$, $[L_i]_k$ – количество произведенного *k*-го продукта (в единицу времени);

A_i, $[A_i]_{kl}$ – количество затраченного *l*-го продукта при производстве единицы *k*-го продукта;

c_i, $\left[c_i\right]_k$ – затраты (руб.) на производство единицы *k*-го продукта;

R_i, $\left[R_i\right]_{kl}$ – количество затраченного *k*-го материала для приготовления единицы *l*-го продукта.

Описанный “Производитель” решает задачу:

$$\max_{\substack{L_i \in \alpha_i U_i \\ \alpha_i \in [0,1]}} \left\{ \left\langle \lambda_i^L, L_i \right\rangle - \chi_i\left(\alpha_i U_i\right) - \left\langle \lambda_i^W, A_i L_i \right\rangle - \left\langle c_i, L_i \right\rangle - \left\langle y, R_i L_i \right\rangle \right\} =$$

$$= \max_{L_i \in U_i} \left\{ \left(\left\langle \lambda_i^L - c^i - A_i^T \lambda_i^W - R_i^T y, L_i \right\rangle - \chi_i\left(U_i\right) \right)_+ \right\}.$$

j-й Потребитель

Предположим, что каждый продукт имеет s различных свойств (своеобразных полезностей). Это может быть, например, содержание витаминов, белков, жиров, углеводов.

Q_j, $\left[Q_j\right]_{kl}$ – вклад единицы l-го продукта в удовлетворение k-го свойства;

σ_j, $\left[\sigma_j\right]_k$ – минимально допустимый уровень удовлетворения k-го свойства (в единицу времени);

$\beta_j \in [0,1]$– уровень участия;

$V_j = \left\{W_j \in \mathbb{R}_+^m :\ Q_j W_j \geq \sigma_j\right\}$ – допустимое множество при полном участии;

$W_j \in \beta_j V_j$, $\left[W_j\right]_k$ – количество потребленного k-го продукта (в единицу времени);

τ_j – постоянный доход (руб.) при полном участии (в единицу времени).

Описанный “Потребитель” решает задачу:

$$\max_{\substack{W_j \in \beta_j V_j \\ \beta_j \in [0,1]}} \left\{ \beta_j \tau_j - \left\langle \lambda_j^W, W_j \right\rangle \right\} = \max_{W_j \in V_j} \left\{ \left(\tau_j - \left\langle \lambda_j^W, W_j \right\rangle \right)_+ \right\}.$$

<u>Перевозчик</u>

Этот агент решает задачу типа (5), (7):

$$\min_{\{d_{ij}\}\geq 0}\left[\sum_{i\in O}\left\langle \lambda_i^L, \sum_{j:(i,j)\in OD} d_{ij}\right\rangle - \sum_{j\in D}\left\langle \lambda_j^W, \sum_{i:(i,j)\in OD} d_{ij}\right\rangle + \Phi(d) + \gamma \sum_{(i,j)\in OD}\left(\sum_{k=1}^m [d_{ij}]_k\right)\ln\left(\sum_{k=1}^m [d_{ij}]_k\right)\right],$$

в которой корреспонденции формируются "Производителями" и "Потребителями". Мы считаем, что все товары одинаковы с точки зрения "Перевозчика", т.е. $\Phi(d) := \Phi\left(\left\{\sum_{k=1}^m [d_{ij}]_k\right\}\right)$ (можно рассматривать и другие варианты). Здесь и далее нам будет удобно писать энтропийную регуляризацию в виде $\gamma \sum_{(i,j)\in OD}\left(\sum_{k=1}^m [d_{ij}]_k\right)\ln\left(\sum_{k=1}^m [d_{ij}]_k\right)$, т.е. опускать $N = \sum_{(i,j)\in OD} \sum_{k=1}^{m} \left[d_{ij} \right]_k$. Точнее полагать $N = 1$ с той же потоковой (физической) размерностью, что и d, чтобы под логарифмом была безразмерная величина. При естественных балансовых условиях $\sum_{i\in O} L_i = \sum_{i\in O} A_i L_i + \sum_{i\in D} W_j$ это никак не повлияет на решение задачи.

Проблема здесь в том, что все эти три типа задач завязаны друг на друга посредством векторов цен. Выпишем, как это принято при поиске конкурентных равновесий, все имеющиеся **законы Вальраса** (балансовые ограничения + условия дополняющей нежесткости), которые накладывают совершенно естественные ограничения на эти векторы цен:

$$\sum_{j:(i,j)\in OD} d_{ij} \le L_i,\ \left\langle \lambda_i^L,\ \sum_{j:(i,j)\in OD} d_{ij} - L_i \right\rangle = 0,\ \lambda_i^L \ge 0;$$

$$\sum_{k:(k,i)\in OD} d_{ki} \ge W_i + A_i L_i,\ \left\langle \lambda_i^W, W_i + A_i L_i - \sum_{k:(k,i)\in OD} d_{ki} \right\rangle = 0,\ \lambda_i^W \ge 0,\ i \in O;$$

$$\sum_{i:(i,j)\in OD} d_{ij} \ge W_j,\ \left\langle \lambda_j^W, W_j - \sum_{i:(i,j)\in OD} d_{ij} \right\rangle = 0,\ \lambda_j^W \ge 0,\ j \in D \setminus O;$$

$$\sum_{i\in O} R_i L_i \le b,\ \left\langle y, b - \sum_{i\in O} R_i L_i \right\rangle = 0,\ y \ge 0.$$

Определение 2. *Набор* $\left\langle \left\{d_{ij}\right\}, \left\{L_i\right\}, \left\{W_j\right\}; y, \left\{\lambda_i^L\right\}, \left\{\lambda_j^W\right\} \right\rangle$ *называется конкурентным равновесием (Вальраса–Нестерова–Шихмана) если он доставляет решения задачам всех агентов и удовлетворяет законам Вальраса.*

Для того чтобы установить корректность этого определения, подобно, введем **условие продуктивности**:

$$\text{существуют такие } \bar{L}_i \in U_i,\ \bar{W}_j \in V_j, \text{ что}$$

$$\sum_{i \in O} \bar{L}_i > \sum_{i \in O} A_i \bar{L}_i + \sum_{i \in D} \bar{W}_j \ \text{ и } \sum_{i \in O} R_i \bar{L}_i < b.$$

Теорема 3. *В условиях продуктивности конкурентное равновесие существует и находится из решения правильной выпукло-вогнутой седловой задачи:*

$$\min_{\{d_{ij}\}\geq 0}\ \max_{\substack{\{\lambda_i^L,\lambda_j^W\}\geq 0\\ y\geq 0}}\ \min_{\substack{\{L_i\in\alpha_i U_i,\ \alpha_i\in[0,1]\}\\ \{W_j\in\beta_j V_j,\ \beta_j\in[0,1]\}}}$$

$$\left[\sum_{i\in O}\left(\left\langle \lambda_i^L, \sum_{j:(i,j)\in OD} d_{ij} - L_i\right\rangle + \left\langle \lambda_i^W, \sum_{k:(k,i)\in OD} A_i L_i\right\rangle + \chi_i\left(\alpha_i U_i\right)\right) + \right.$$

$$+\sum_{j\in D}\left(\left\langle \lambda_j^W, W_j - \sum_{i:(i,j)\in OD} d_{ij}\right\rangle - \beta_j\tau_j\right) + \left\langle y, b - \sum_{i\in O} R_i L_i\right\rangle +$$

$$+\Phi(d)+\gamma\sum_{(i,j)\in OD}\left(\sum_{k=1}^{m}\left[d_{ij}\right]_k\right)\ln\left(\sum_{k=1}^{m}\left[d_{ij}\right]_k\right)\Bigg]=$$

$$=\max_{\substack{\{\lambda_i^L,\lambda_j^W\}\geq 0\\ y\geq 0}}\Bigg[\langle y,b\rangle-\sum_{i\in O}\max_{L_i\in U_i}\left\{\left(\left\langle\lambda_i^L-c^i-A_i^T\lambda_i^W-R_i^T y,L_i\right\rangle-\chi_i(U_i)\right)_+\right\}-$$

$$-\sum_{j\in D}\max_{W_j\in V_j}\left\{\left(\tau_j-\left\langle\lambda_j^W,W_j\right\rangle\right)_+\right\}+\min_{\{d_{ij}\}\geq 0}\left\{\sum_{i\in O}\left\langle\lambda_i^L,\sum_{j:(i,j)\in OD}d_{ij}\right\rangle-\sum_{j\in D}\left\langle\lambda_j^W,\sum_{i:(i,j)\in OD}d_{ij}\right\rangle+\right.$$

$$\left.+\Phi(d)+\gamma\sum_{(i,j)\in OD}\left(\sum_{k=1}^{m}\left[d_{ij}\right]_k\right)\ln\left(\sum_{k=1}^{m}\left[d_{ij}\right]_k\right)\right\}\Bigg]. \quad (8)$$

Для того чтобы объединить все модели в одну модель рассмотрим формулы (3), (4), (7), (8). Легко понять, что формула (3) как раз и задает тот самый потенциал, существование которого (формула (4)) требуется для справедливости теоремы 2 (неявно это предполагается и в теореме 3), фактически, сводящей поиск конкурентного равновесия к задаче (7), а в общем случае (8).

Определение 3. *Набор* $\left\langle \left\{x_p\right\}, \left\{d_{ij}\right\}, \left\{L_i\right\}, \left\{W_j\right\}; y, \left\{\lambda_i^L\right\}, \left\{\lambda_j^W\right\} \right\rangle$ *называется полным (общим) конкурентным равновесием (Вальраса–Нэша–Вардропа–Нестерова–Шихмана) если* $\left\langle \left\{d_{ij}\right\}, \left\{L_i\right\}, \left\{W_j\right\}; y, \left\{\lambda_i^L\right\}, \left\{\lambda_j^W\right\} \right\rangle$ *– конкурентное равновесие, а* $\left\{x_p\right\}$ *является равновесием (Нэша–Вардропа) при заданном конкурентным равновесием наборе* $\left\{d_{ij}\right\}$.

Теорема 4. *В условиях продуктивности полное конкурентное равновесие существует и находится из решения правильной выпукло-вогнутой седловой задачи:*

$$\max_{\substack{\{\lambda_i^L,\lambda_j^W\}\ge 0\\ y\ge 0}}\Bigg[\langle y,b\rangle-\sum_{i\in O}\max_{L_i\in U_i}\Big\{\Big(\Big\langle \lambda_i^L-c^i-A_i^T\lambda_i^W-R_i^T y,L_i\Big\rangle-\chi_i\left(U_i\right)\Big)_+\Big\}-$$

$$-\sum_{j\in D}\max_{W_j\in V_j}\Big\{\Big(\tau_j-\Big\langle\lambda_j^W,W_j\Big\rangle\Big)_+\Big\}+\min_{\{d_{ij}\}\ge 0}\left\{\sum_{i\in O}\left\langle\lambda_i^L,\sum_{j:(i,j)\in OD}d_{ij}\right\rangle-\sum_{j\in D}\left\langle\lambda_j^W,\sum_{i:(i,j)\in OD}d_{ij}\right\rangle+\right.$$

$$+\max_{t\ge\bar t}\left\{\sum_{(i,j)\in OD}\left(\sum_{k=1}^m\left[d_{ij}\right]_k\right)T_{ij}(t)-\left\langle\bar f,t-\bar t\right\rangle-\mu\sum_{e\in E}h\left(t_e-\bar t_e,\bar f_e,\mu\right)\right\}+$$

$$\left.+\gamma\sum_{(i,j)\in OD}\left(\sum_{k=1}^m\left[d_{ij}\right]_k\right)\ln\left(\sum_{k=1}^m\left[d_{ij}\right]_k\right)\right\}\Bigg].\qquad(10)$$

Спасибо за внимание.