

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ МЕЖДУ ДВУМЯ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ЦИЛИНДРАМИ

Л.Г.Варепо¹, А.В.Паничкин²

¹ Омский государственный технический университет, Омск

² Омский филиал Института математики СО РАН им. С.Л.Соболева, Омск

MODELLING OF THE CURRENT OF THE VISCOUS INCOMPRESSIBLE LIQUID WITH FREE BORDERS BETWEEN TWO ROTATING CYLINDERS

L.G.Varepo¹, A.V.Panichkin²

¹ Omsk state technical university, Omsk

² Omsk branch of Institute of mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Science of S.L.Soboleva, Omsk

The problem of course of a viscous liquid of the limited volume with free borders between two rotating cylinders is considered. In two-dimensional statement with settlement schemes on regular grids the algorithm is developed for the non-stationary equations of Nave-Stoks in accompanying cylindrical system of coordinates. Results of calculations of a current and division of a viscous incompressible liquid on surfaces of two cylinders are resulted at constant pressure upon free borders.

Введение

Моделирование процесса переноса краски и усилий, действующие в зоне печатного контакта, на основе решения уравнений для вязкой несжимаемой жидкости является актуальной задачей [1]. Поскольку при офсетной печати происходит движение двух цилиндров, между которыми происходит движение жидкости с начальным нанесенным слоем ее на один цилиндр, целесообразно рассмотреть область решения в сопутствующей системе координат, связанной с одним цилиндром. При этом возникает необходимость постановки задачи для течения жидкости, ограниченной двумя вращающимися цилиндрами и имеющей свободные границы [2].

Так как печатная краска является вязкой жидкостью, то при моделировании течения в рабочем слое необходимо применить модель течения вязкой жидкости, описывающей ламинарное течение при определенных ограничениях на скорости движения цилиндров.

Постановка задачи

Ограничимся постановкой плоской задачи в полярной системе координат (r, θ) , в которой уравнения Навье-Стокса совместно с уравнением неразрывности при учете центробежной силы и перехода к безразмерным величинам (ввод безразмерного числа Рейнольдса $Re = U_0 D / \nu$, ν - кинематическое число вязкости жидкости, U_0 - характерная скорость жидкости, D - размер области) имеют вид [3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_r}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_\theta R}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta R} - \frac{(U_\theta + \omega r)^2}{r} &= -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left(\nabla^2 U_r - \frac{U_r}{r^2} - \frac{2R}{r^2} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta R} \right), \\ \frac{\partial U_\theta}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_\theta}{\partial r} + \frac{U_\theta R}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta R} + \frac{U_r U_\theta}{r} + 2U_r \omega &= -\frac{R}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta R} + \frac{1}{Re} \left(\nabla^2 U_\theta - \frac{U_\theta}{r^2} + \frac{2R}{r^2} \frac{\partial U_r}{\partial \theta R} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где
$$\nabla^2 U = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{R^2}{r^2} \frac{\partial^2 U}{(\partial \theta R)^2};$$

$$\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} + \frac{R}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta R} = 0. \quad (2)$$

Цилиндры имеют радиус R и вращаются в разные стороны с угловой скоростью ω . Зазор между цилиндрами равен δ . Рассматривается область жидкости, прикасающаяся к верхнему цилиндру, длиной δL по окружности и толщиной δS по радиусу ($\delta < \delta S$). В начальный момент времени скорости жидкости равны 0 в сопутствующей системе координат (r, θ) , давление равно 1 на свободных границах, где жидкость не соприкасается с границами цилиндров, на которых рассматривается условие $\partial P / \partial n = 0$, где n – внешняя нормаль к границе.

Уравнение окружности радиуса R для второго цилиндра на расстоянии $(2R + \delta)$ от O_1 будет иметь координаты (r, ψ_1) , где ψ_1 – угол от центра O_1 между точкой окружности второго цилиндра и отрезком, соединяющим центры цилиндров O_1 и O_2 . Эти координаты имеют вид:

$$r = R\sqrt{\sin^2\psi_2 + (2 - \cos\psi_2)^2} = R\sqrt{5 - 4\cos\psi_2},$$

$$\psi_1 = \arcsin\left(\frac{\sin\psi_2}{\sqrt{5 - 4\cos\psi_2}}\right),$$

где ψ_2 – угол соответствующей дуги во втором цилиндре.

В сопутствующей системе координат движение центра второго цилиндра вокруг первого будет с угловой скоростью ω , а вращение его вокруг своего центра – с угловой скоростью 2ω в противоположном направлении.

При движении второго цилиндра на область жидкости необходимы скорости точек окружности второго цилиндра, которые имеют вид:

$$V_\varphi = V_x \cos(\varphi_{m1}) + V_y \sin(\varphi_{m1}),$$

$$V_r = -V_x \sin(\varphi_{m1}) + V_y \cos(\varphi_{m1}),$$

для которых

$$x_m = x_c + (2R + \delta)\sin(\varphi_1) + r_2 \sin(\varphi_2),$$

$$y_m = y_c - (2R + \delta)\cos(\varphi_1) + r_2 \cos(\varphi_2),$$

$$V_x = (2R + \delta)\omega \cos(\varphi_1) + 2\omega r_2 \cos(\varphi_2),$$

$$V_y = (2R + \delta)\omega \sin(\varphi_1) - 2\omega r_2 \sin(\varphi_2),$$

$$\varphi_1 = \varphi_0 - \omega t, \quad \varphi_2 = \varphi_{m0} - 2\omega t,$$

$(x_m, y_m), (x_c, y_c)$ – координаты данной точки и центра первого цилиндра; φ_0, φ_{m1} – начальное значение θ для центра второго цилиндра и текущее значение θ для точки;

φ_1, φ_2 – углы от двух центров цилиндров между точкой второго цилиндра и вертикальными направляющими в зависимости от времени и угловой скорости вращения;

φ_{m0} – начальное значение φ_2 . Здесь радиусы первого и второго цилиндра равны $r_1 = R$ и $r_2 = R$.

Для однозначного определения давления оно задается константой на свободных границах жидкости для всех t из $[0, T]$: $p(r, \theta) = 1$. При этом уравнение (2) для использования его в определении поля давления обычно дополняют эволюционным членом $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ в следующем виде:

$$\varepsilon_p \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot U = 0, \quad (3)$$

где $U = (U_r, U_\theta)$, $\nabla \cdot U = \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} + \frac{R}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta R}$, $\varepsilon_p > 0$ – параметр, оптимально выбираемый при численных расчетах для сходимости решения и приближения уравнения (3) к уравнению (2).

Конечно-разностные методы решения

Для численного решения уравнений (1), (3) вводится система координат (x,y) , преобразованная из полярной системы координат (r,θ) и соответствующая $(R\theta, R-r)$, в которой граница первого цилиндра проходит по оси Ox , а у второго цилиндра его центр перемещается при $y < 0$ от $R\varphi_0$ слева направо со скоростью $R\omega$ в новой системе. В этой системе координат берется область W в форме прямоугольника с регулярной сеткой и равномерными шагами h_x и h_y (N_x, N_y — число узлов по координатам x и y). На фиксированной сетке применяются конечно-разностные методы с вводом подвижных граничных узлов для границы второго цилиндра и свободной границы жидкости, которая в начальный момент находится на первом цилиндре без относительного движения. В новой системе координат переобозначим компоненты скорости $(U_\theta, -U_r)$ через $(u,v) = V$.

Для численного расчета данной системы уравнений был применен расчетный алгоритм работы [4] с использованием схемы стабилизирующей поправки (см.[5]).

Разностные уравнения представимы в следующем виде с итерационным шагом по времени τ и с аппроксимацией $O(h_x^2 + h_y^2 + \tau)$:

$$\frac{V^{n+1/2} - V^n}{\tau} = \Lambda_1(V^{n+1/2} - V^n) + \Lambda V^n + \Lambda_0 V^n - \Gamma p^{n+1} + F^n, \quad (4)$$

$$\frac{V^{n+1} - V^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_2(V^{n+1} - V^n), \quad (5)$$

где

$$\Lambda_1 = u R/(R-y) \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2h_x} + \frac{1}{Re} R^2/(R-y)^2 \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h_x^2}, \quad (6)$$

$$\Lambda_2 = v \frac{\Delta_2 + \Delta_{-2}}{2h_y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\Delta_2 \Delta_{-2}}{h_y^2} - 1/(R-y) \frac{\Delta_2 + \Delta_{-2}}{2h_y} \right),$$

$$\begin{aligned} \Lambda_0 V^n &= \frac{1}{Re} \left(-2R/(R-y)^2 \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2h_x} v^n - 1/(R-y)^2 \cdot u^n, 2R/(R-y)^2 \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2h_x} u^n - \right. \\ &\quad \left. - 1/(R-y)^2 \cdot v^n \right) + (1/(R-y) \cdot v^n u^n, -1/(R-y) \cdot u^n u^n), \\ F^n &= (2v^n \omega, -2u^n \omega - \omega^2 (R-y)), \end{aligned}$$

$\Delta_1, \Delta_{-1}, \Delta_2, \Delta_{-2}$ — операторы сдвига функции на шаг сетки вверх или вниз по осям x и y .

При этом оператор Λ является суммой операторов $\Lambda_1 + \Lambda_2$.

Для градиента давления (Γp^{n+1} в (4)) и дивергенции скорости в (3) были рассмотрены следующие конечно-разностные приближения:

$$\Gamma p^{n+1} |_{i,j} = (R/(R-y)) \cdot \left(\frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2h_x} p_{i,j}^{n+1} \right) + O(h_x^2), \frac{\Delta_2 + \Delta_{-2}}{2h_y} p_{i,j}^{n+1} + O(h_y^2), \quad (7)$$

$$\nabla \cdot V^{n+1} |_{i,j} = R/(R-y) \cdot \left(\frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2h_x} u_{i,j}^{n+1} \right) - 1/(R-y) \cdot v_{i,j}^{n+1} + \frac{\Delta_2 + \Delta_{-2}}{2h_y} v_{i,j}^{n+1} + O(h_x^2 + h_y^2). \quad (8)$$

Аппроксимации производных в (7), (8) производится в узлах с индексами (i,j) , $i=1, \dots, N_x-1$, $j=1, \dots, N_y-1$.

Для расчета давления уравнение (3) представляется в виде

$$\varepsilon_p \frac{p^{n+1,k+1} - p^{n+1,k}}{\tau} + \nabla \cdot V^{n+1,k} = 0, \quad (9)$$

в котором заменялась дивергенция скорости по (8) без учета погрешностей $O(h_x^2 + h_y^2)$, и производился дополнительный расчет с итерациями по k ($k=0, \dots, k_0$) до установления давления при каком-то k_0 с нормой изменения порядка величины 10^{-5} .

Расчет производился до определенного значения времени t , пока второй цилиндр находится в зоне контакта с жидкостью, первоначально расположенной на первом цилиндре, или до момента прохождения этой зоны, когда происходило разделения жидкости на поверхности двух цилиндров.

Результаты расчетов

Для рассмотренной выше задачи ниже приводятся результаты расчетов с применением обычных методов по конечно-разностной схеме с уравнениями (6), (7), (11) при использовании в (6) оператора Λ в виде (8) с ориентацией шаблона вдоль узловых линий для расчета конвективно-диффузионного переноса.

Была использована равномерная сетка с N_x и N_y , равными 80. Для итерационного шага τ выбирались значения из условий устойчивости расчетной схемы в пределах от $0,5 \cdot 10^{-7}$ до $0,5 \cdot 10^{-6}$ при нижеприведенных параметрах задачи.

Расчеты были проведены для чисел $Re = 1, 10$ и 100 , $\omega = 10^2$ для нескольких моментов времени при прохождении нижнего цилиндра по жидкости.

На рисунках, представленных ниже, показаны картины течений с мгновенными линиями тока, полученными из поля скоростей путем интегрирования в расчетной области следующих соотношений с точностью $O(h^2)$ после задания на границах функции тока $\psi = 0$:

$$\frac{R-y}{R} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\psi}{R} = u, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v. \quad (12)$$

Численные решения на сетке 80×80 при числах $Re = 1, 10$ и 100 приведены на рис. 1–3

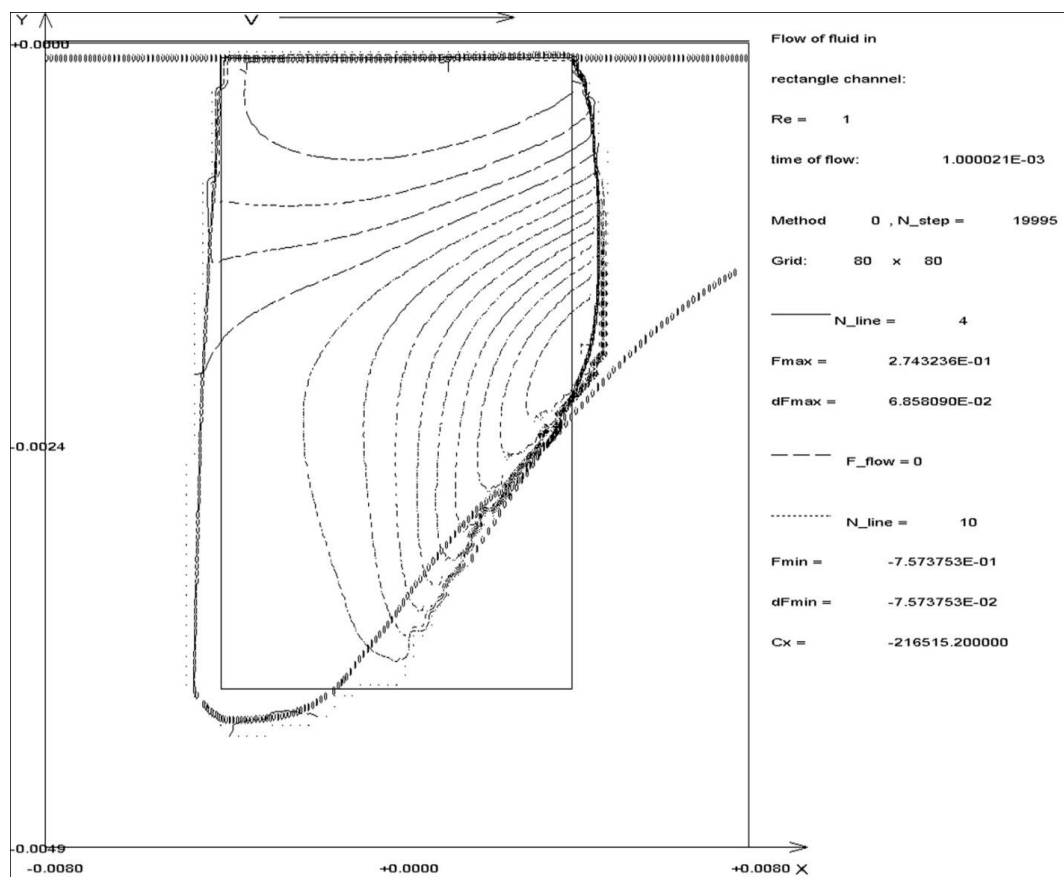


Рис.1. Положение слоя вязкой несжимаемой жидкости при $Re = 1$ в момент времени $t=0,001$

при угловой скорости ω , равной 100, и $\delta = 0,002$. Начальные размеры для области жидкости были равны $\delta L = 0,008$ и $\delta S = 0,004$. Радиусы r_1 и r_2 равны 0,05.

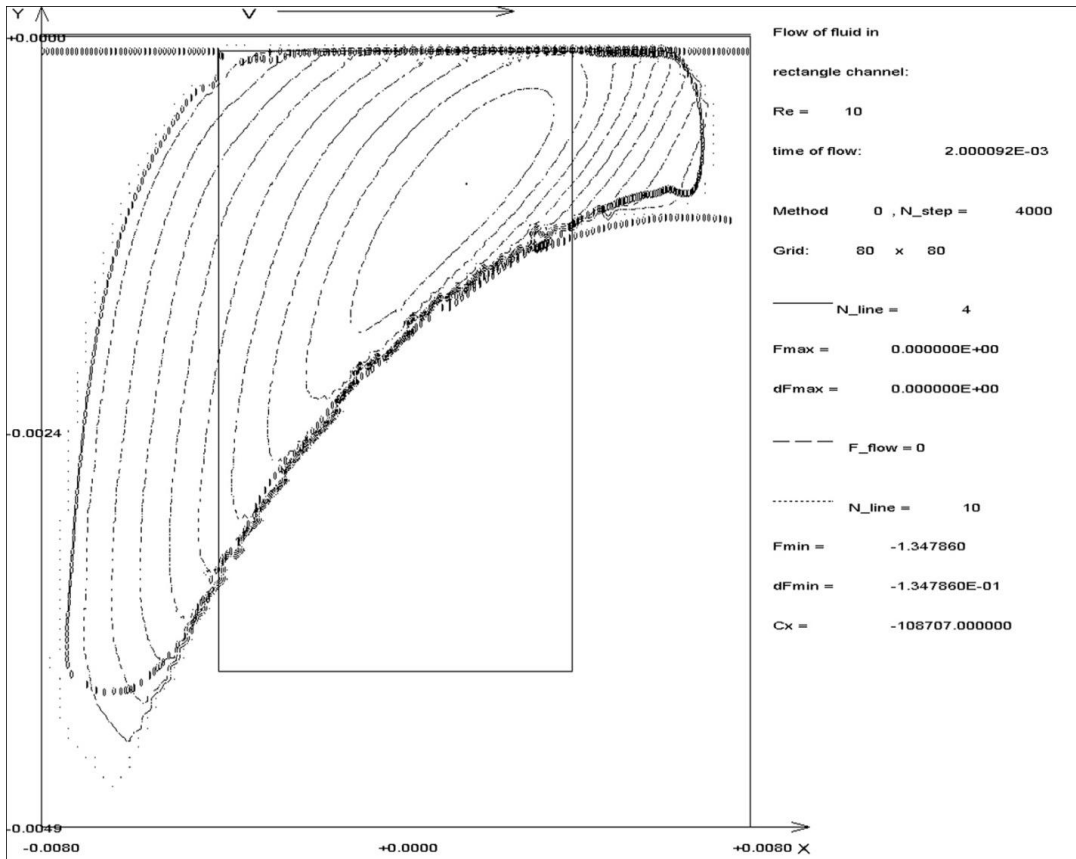


Рис.2. Положение слоя вязкой несжимаемой жидкости при $Re = 10$ в момент времени $t=0,002$

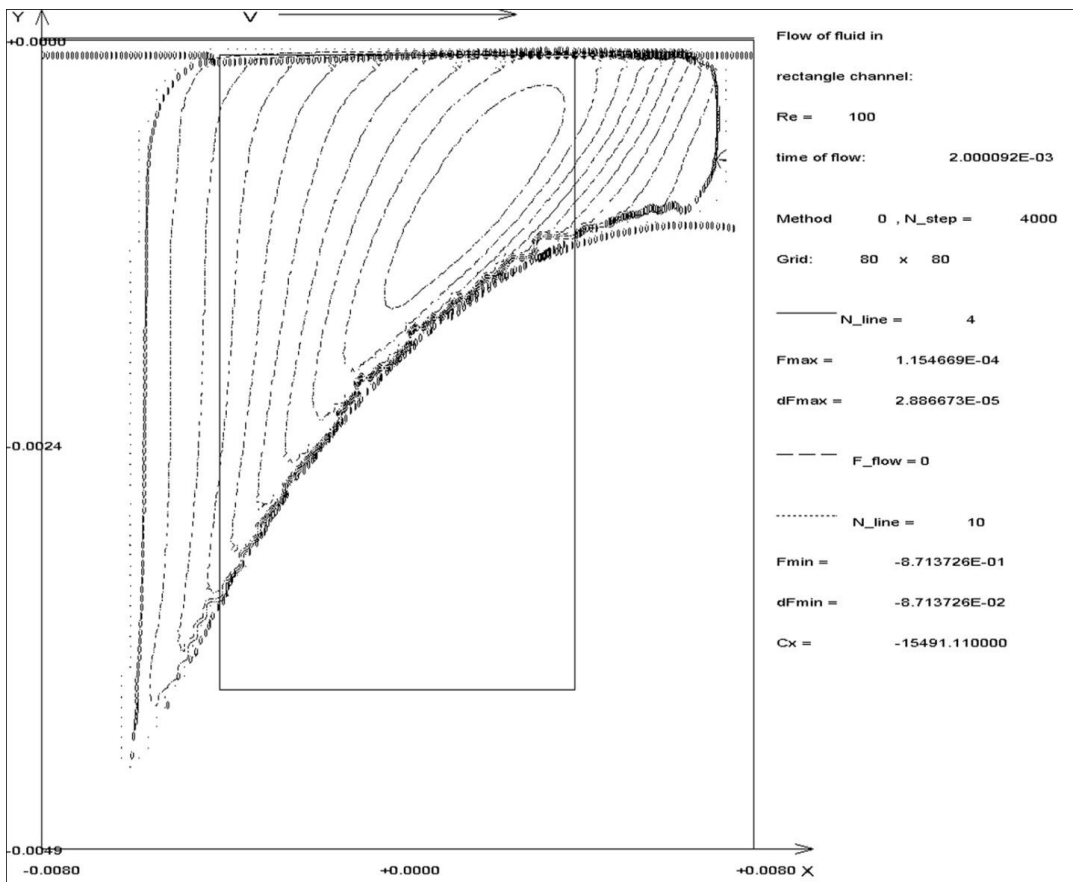


Рис.3. Положение слоя вязкой несжимаемой жидкости при $Re = 100$ в момент времени $t=0,002$

На рис.4. показаны результаты расчетов для других радиусов цилиндров (r_1 и r_2 равнялись 10,0) при той же угловой скорости ω , равной 100, $\delta = 0,002$ и при других начальных размерах области жидкости $\delta L = 0,010$, $\delta S = 0,010$. Для отслеживания границ цилиндров и краев жидкости были использованы движущие маркеры, расчет которых получался с некоторыми отклонениями, и более точное положение жидкости можно проследить по изолиниям тока.

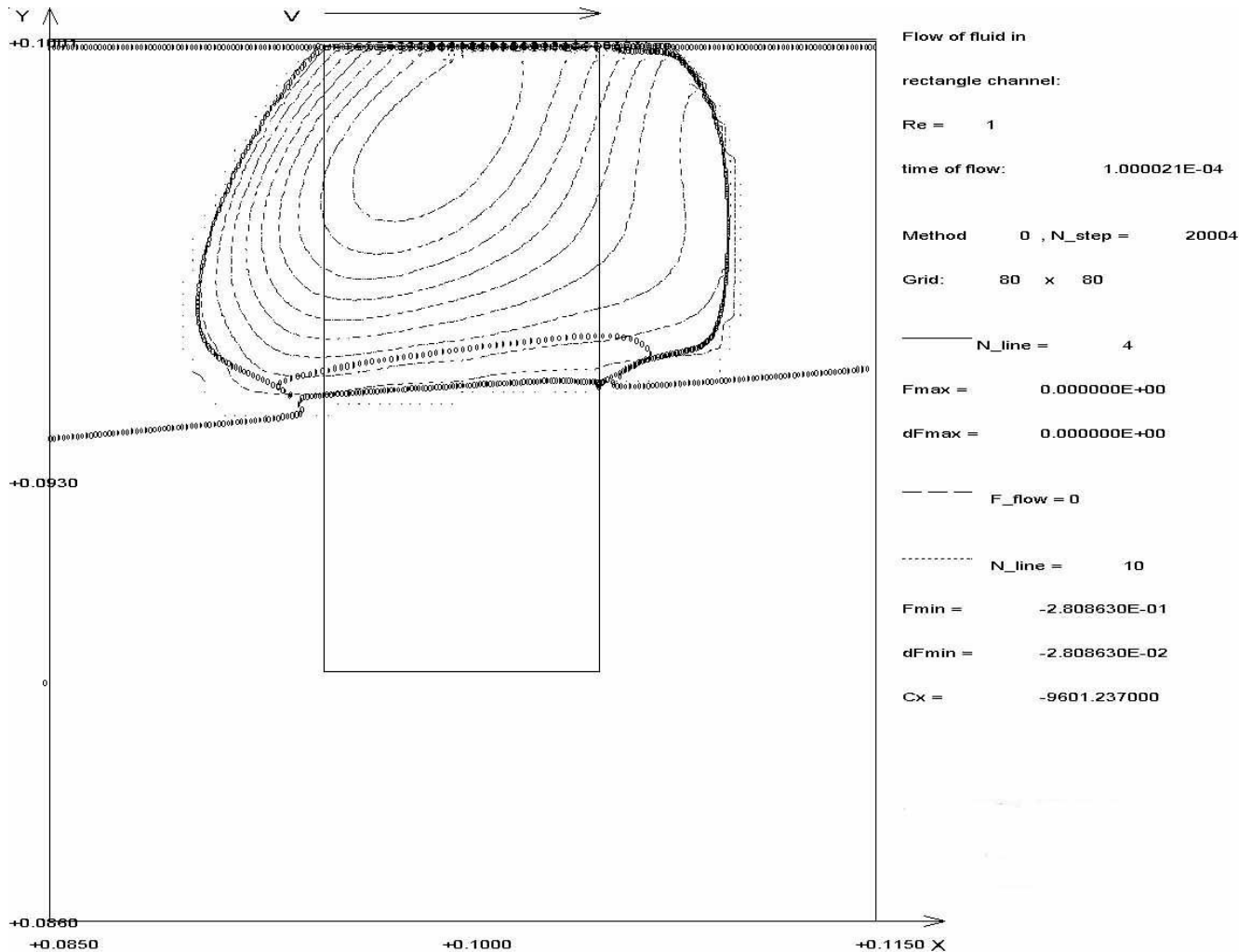


Рис.4. Положение слоя вязкой несжимаемой жидкости при $Re = 1$ в момент времени $t=0,0001$

Список литературы

1. Петер Мюллер. Офсетная печать. – М.: Книга, 1988. – 208с.
2. Voronov E., Varepo L. Modeling Processes of Transfer Ink Units // Chinese Journal of scientific instrument. 2004, № 4. P. 93-94.
3. Лойцянский, Л. Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1970. – 904с.
4. Паничкин, А. В. Ускорение сходимости в расчетах стационарных течений жидкости при больших числах Рейнольдса // Вычислительные технологии, 2008. Т.13, спец. выпуск 3. – С. 38-44.
5. Яненко, Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. – Новосибирск: Наука, 1967. – 196с.