ИЗУЧЕНИЕ ТЕЧЕНИЯ СЖИМАЕМОГО ГАЗА СО СВОБОДНОЙ СТРУЕЙ В ЦИЛИНДРЕ

А.Х.Закиров
Национальный университет Узбекистана, Ташкент

THE STUDY OF COMPRESSIBLE GAS FLOW WITH A FREE JET IN THE CYLINDER

A.H. Zakirov
National University of Uzbekistan, Tashkent

The plane problem of a jet potential flow of compressible gas in the cylinder at subsonic speed without external forces. Problem is solved by conformal mapping. Writing the boundary conditions for the Zhukovskii function, and using the Schwarz integral formula for the upper half-plane, we obtain expressions for the desired function.

Современное развитие техники, особенно машиностроения, обусловливает необходимость проведения теоретических исследований по струйным течениям газа с образованием свободной поверхности. В задачах, связанных с газовой динамикой, необходимо совершенствовать математические модели теории сжимаемого газа; развивать и совершенствовать методы реализации этих моделей; необходимо учитывать вычислительный эксперимент, который позволяет исследовать достаточно подробные модели технологического процесса.

Задачи о струйном течении жидкости и газа имеют практическое приложение в различных отраслях техники, в частности в газораспределительном механизме двигателя. Физические процессы газообмена в цилиндре двигателя с наименьшим гидравлическим сопротивлением приводятся к задаче теории струй сжимаемого газа.

Рассматривается плоская задача о струйном потенциальном течении сжимаемого газа в цилиндре с дозвуковой скоростью без учета внешних сил. Течение потенциальное и стационарное, а процесс политропический. Предполагается, что источник с секундным расходом q расположен в точке А: $q = V_A h$, где V_A - скорость частицы газа в точке А, h - ширина потока на источнике. Частицы газа, заполняя полость цилиндра, образуют свободную поверхность с неизвестной границей, вдоль которой давление постоянно. Набегающий поток газа имеет в бесконечности $V_\infty = V_A$.

Запишем уравнение неразрывности и условия отсутствия вихря [1]:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

При потенциальном движении сжимаемого газа можно ввести потенциал скорости и функцию тока, которые должны удовлетворять условию:

$$u = \frac{1}{\overline{p}} \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{1}{\overline{p}} \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

где $\overline{p} = y^k \dfrac{\rho}{\rho_0}$ - характеристическая функция; при $k = 0$ имеем плоскую, а при $k = 1$ - осесимметричную задачу.

Опираясь на некоторые методы гидродинамики для идеальной жидкости [1], задачу будем решать с использованием комплексных величин. Введем систему координат $z = x + iy$ с началом в точке М, ось у направим по оси симметрии течения (рис.1).

Однако задача определения конформного отображения $W(z)$ сама по себе достаточно сложна, так как отображаемые области имеют сложную конфигурацию. Одним из способов упрощения является введение вспомогательной комплексной канонической области в плоскости комплексного переменного $\zeta = \xi + i\eta$. Вместо того, чтобы искать непосредственно функцию $W(z)$, будем определять две аналитические функции $W(\zeta)$ и $z = z(\zeta)$.

Для решения задачи конформно отобразим область течения в физической плоскости на верхнюю полуплоскость $\zeta = \xi + i\eta$ (рис.2). Пусть P, Q-аналитическая функция $z = z(\zeta)$ квазиконформно отображает верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta \geq 0$ на область G_z так, чтобы точкам $-b, 0, d, k, 1, e, f, n$ оси ξ соответствовали точки B, C, D, K, M, E, F, N границы области G_z [1, 2].

Функция комплексного потенциала $W = \varphi + i\psi$ будет $p-$аналитической функцией в области течения G_z. Область комплексного потенциала W представляет собой полосу шириной q. Конформное отображение верхней полуплоскости G_ζ на полосу осуществляется аналитической функцией:

$$W(\zeta) = -\frac{q}{\pi}\ln(\zeta - 1) + iq\,. \qquad (1)$$

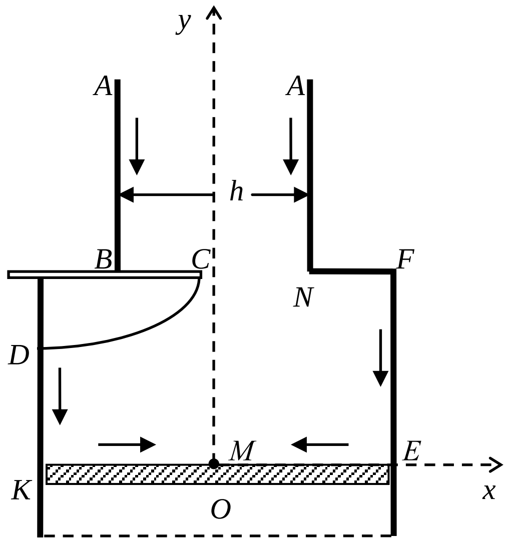

Рис. 1

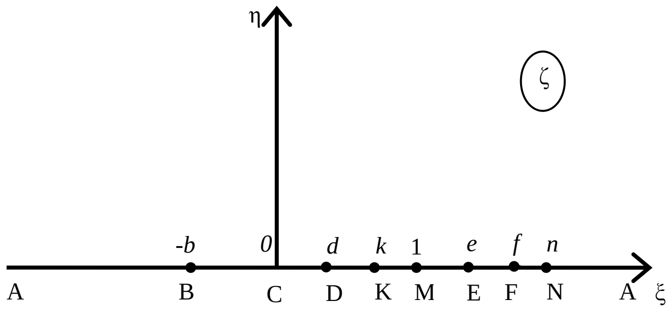

Рис. 2

Пользуясь методом [3], рассматриваемая задача предварительно решается в плоской постановке для несжимаемого газа.

Введем аналитическую в области G_ζ функцию Жуковского $\omega(\zeta) = \ln\dfrac{iV_0}{\overline{V}}$, где V_0 - модуль скорости на свободной поверхности.

Запишем граничные условия для функции $\omega(\zeta)$:

На AB, DK, EF, NA: при $\eta = 0, -\infty < \xi < -b,\ d < \xi < k,\ \ e < \xi < f,\ n < \xi < \infty$: $\operatorname{Im}\omega = 0$.

На BC, KM, NF: при $\eta = 0, -b < \xi < 0,\ k < \xi < 1,\ f < \xi < n,\ \operatorname{Im}\omega = \dfrac{\pi}{2}$.

На ME: при $\eta = 0, 1 < \xi < e,\ \operatorname{Im}\omega = -\dfrac{\pi}{2}$.

На CD: при $\eta = 0,\ 0 < \xi < d,\ \operatorname{Re}\omega = 0$.

Теперь рассмотрим функцию $\omega_1(\zeta) = \dfrac{\omega(\zeta)}{\sqrt{\zeta}\sqrt{\zeta - d}}$, для которой имеем следующие граничные значения:

$$\operatorname{Im}\omega_1 = 0,\ \textit{при}\ \ \eta = 0,\ -\infty < \xi < -b,\ 0 < \xi < d,\ d < \xi < k, e < \xi < f, n < \xi < \infty,$$

$$\operatorname{Im}\omega_1 = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{|\xi|}\sqrt{d-\xi}},\ \textit{при}\ \ \eta = 0, -b < \xi < 0,$$

$$\operatorname{Im}\omega_1 = -\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{\xi}\sqrt{\xi - d}},\ \textit{при}\ \ \eta = 0{,}1 < \xi < e,$$

$$\operatorname{Im}\omega_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{\xi}\sqrt{\xi-d}},\ \textit{при}\ \ \eta = 0,\ k < \xi < 1,\ f < \xi < n\ .$$

На всей границе G_ζ известна мнимая часть функции $\omega(\zeta)$ и, следовательно, ее можно восстановить с интегральной формулой Шварца. Для верхней полуплоскости построим аналитическую функцию $\omega(\zeta)$, отображающую область G_0 на область G_ω:

$$\omega(\zeta\ = \ln\left[\frac{F^2(\zeta,1)F(\zeta,n)}{F(\zeta,b)F(\zeta,k)F(\zeta,e)F(\zeta,f)}\right], \tag{2}$$

где- $F(\zeta,b) = \dfrac{\sqrt{d(\zeta+b)}}{\sqrt{\zeta-d} + \sqrt{\zeta(d+b)}}$, $F(\zeta,k) = \dfrac{\sqrt{\zeta-k}}{\sqrt{k(\zeta-d)} + \sqrt{\zeta(k-d)}}$,

$$F(\zeta,1) = \frac{\sqrt{\zeta-1}}{\sqrt{\zeta-d} + \sqrt{\zeta(1-d)}}, F(\zeta,f) = \frac{\sqrt{\zeta-f}}{\sqrt{(\zeta-d)f} + \sqrt{\zeta}\sqrt{f-d}},$$

$$F(\zeta,n) = \frac{\sqrt{\zeta-n}}{\sqrt{n(\zeta-d)} + \sqrt{\zeta(n-d}}.$$

Из последнего выражения находим сопряженную комплексную скорость:

$$\bar{V} = u - iv = iV_0F(\zeta), \tag{3}$$

где $F(\zeta) = \dfrac{F(\zeta,b)F(\zeta,k)F(\zeta,e)F(\zeta,f)}{F^2(\zeta,1)F(\zeta,n)}$.

Находим распределение скоростей на отрезках действительной оси верхней полуплоскости G_0, соответствующих границам области течения G_z:

Вдоль $\eta = 0,\quad -b < \xi < 0,\qquad \bar{V} = u - iv = V_0F_1(\xi),\ u = V_0F_1(\xi),\ v = 0$,

где $$F_1(\xi) = \frac{F_1(|\xi|,b), F_1(|\xi|,k)F_1(|\xi|,e)F_1(|\xi|,f)}{F_1^{\,2}(|\xi|,1)F_1(|\xi|,n)}.$$

Вдоль $\eta = 0,\quad 0 < \xi < d,\qquad \bar{V} = V_0F_2(\xi),\ u = V_0 \operatorname{Re} F_2(\xi),\ v = V_0 \operatorname{Im} F_2(\xi)$,

где

$$F_2(\xi) = \frac{(\sqrt{\xi}\sqrt{b+d} - i\sqrt{b(d-\xi)})(\sqrt{\xi}\sqrt{k-d} - i\sqrt{k(d-\xi)})(\sqrt{\xi}\sqrt{e-d} - i\sqrt{e(d-\xi)}}{d^3\sqrt{d}\sqrt{\xi+b}\sqrt{k-\xi}\sqrt{e-\xi}}$$

$$\frac{(\sqrt{\xi}\sqrt{f-d} - i\sqrt{f(d-\xi)})\left(\sqrt{\xi}\sqrt{1-d} + i\sqrt{d-\xi}\right)^2(\sqrt{\xi}\sqrt{n-d} + i\sqrt{n(d-\xi)}}{(1-\xi)\sqrt{f-\xi}\sqrt{n-\xi}}.$$

Вдоль $\eta = 0,\quad d < \xi < k,\qquad \bar{V} = iV_0F_3(\xi),\ u = 0,\ v = -V_0F_3(\xi)$.

Вдоль $\eta = 0,\quad k < \xi < 1,\qquad \bar{V} = u - iv = V_0F_4(\xi),\ u = V_0F_4(\xi),\ v = 0$.

Вдоль $\eta = 0,\quad e < \xi < f,\qquad \bar{V} = iV_0F_5(\xi),\ u = 0,\ v = -V_0F_5(\xi)$.

Вдоль $\eta = 0,\quad f < \xi < n,\qquad \bar{V} = V_0F_6(\xi),\ u = V_0F_6(\xi),\ v = 0$.

Выражение для комплексной переменной $z = x + iy$ физической плоскости находится из формулы

$$dz = dx + idy = (d\varphi + i\frac{d\psi}{\overline{p}})\left(\frac{d_{\overline{p}}W}{dz}\right)^{-1}, \tag{4}$$

где $\frac{d_{\overline{p}}W}{dz} = \overline{p}\overline{V}$, $\frac{dW}{d\xi} = -\frac{q}{\pi}\frac{1}{\zeta - 1}$.

Разделяя действительную и мнимую части функцию (4), имеем

$$dx = \frac{\overline{p}ud\varphi - vd\psi}{\overline{p}^2V^2}, dy = \frac{\overline{p}vd\varphi + ud\psi}{\overline{p}^2V^2} \tag{5}$$

После подстановки в (5) выражений

$$\frac{dW}{d\zeta} = \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + i\frac{\partial\psi}{\partial\xi} \text{ и } \left.\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right|_{\eta=0} = -\frac{q}{\pi}\frac{1}{\xi - 1}, \left.\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right|_{\eta=0} = 0,$$

и интегрирования по переменной ξ, в указанных отрезках действительной оси G_ζ, получаем систему шести уравнений для отыскания значений неизвестных параметров b, d, k, f, e, n, входящих в решение данной задачи.

Находим форму свободной поверхности CD:

$$x(\xi) = x(0) + \mathrm{Re}\int_0^\xi \frac{dz}{d\xi}d\xi, \quad y(\xi) = y(0) + \mathrm{Im}\int_0^\xi \frac{dz}{d\xi}d\xi .$$

Так как отсутствуют внешние силы, то интеграл Бернулли приводится к виду:

$$\frac{V^2}{2} + \frac{n}{n-1}\frac{p}{\rho} = const, \tag{6}$$

где n - показатель политропии.

Определяется давление и плотность частиц газа в области течения:

$$p = p_0\left[1 - \tau_0\frac{V^2}{V_0^2}\right]^{\beta+1}, \quad \rho = \rho_0\left[1 - \tau_0\frac{V^2}{V_0^2}\right]^{\beta}, \beta = \frac{1}{n-1} \cdot \tag{7}$$

Таким образом, выведены расчётные формулы для скоростей, давлений и плотностей, и дано их приложение для вычисления гидродинамических и кинематических характеристик процессов протекания газа в цилиндре.

Список литературы

1. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979.
2. Положий Г.Н. Теория и применение p – аналитических и P,Q - аналитической функций. Киев, 1973.
3. Хамидов А.А. Плоские и осесимметричные задачи о струйном течении идеальной сжимаемой жидкости. Ташкент, «Фан», 1978.