

Сравнение алгоритмов двумерной томографии с ограниченным диапазоном углов.

Н.В. ВАЖЕНЦЕВА

Институт автоматизации и электрометрии СО РАН

e-mail: vazhentseva@gmail.com

А.В. ЛИХАЧЕВ

Сравниваются разработанные ранее авторами методы двумерной томографии с ограниченным диапазоном углов. Один из них основывается на условии Кавальери для преобразования Радона. В другом методе неизвестные проекционные данные вычисляются в итерационном процессе по оценке искомой функции с учётом априорной информации.

1. Введение

Задачи томографической реконструкции внутренней структуры объектов различной природы ставятся в различных областях науки, инженерии и медицины [1]. Томография с ограниченным углом обзора объекта – это проблема, которая возникает во многих приложениях, в том числе в рентгенографии, гидролокации, радиолокации, неразрушающем контроле, геофизической разведке и голографической интерферометрии.

В настоящей работе исследуется двумерная задача, когда восстанавливается распределение интересующего параметра в одном слое объекта. Для определённости будем рассматривать трансмиссионную рентгеновскую томографию. В этом случае измеряемой величиной является интенсивность проникающего излучения, прошедшего через объект. При этом ставится задача реконструкции распределения коэффициента ослабления излучения. При некоторых предположениях она сводится к задаче восстановления функции двух переменных по интегралам от неё вдоль семейства лучей [1].

Для того, чтобы корректно провести восстановление функции по таким данным нужно знать её интегралы вдоль всех прямых, пересекающих её носитель. Применительно к рассматриваемому случаю рентгеновской томографии, это, в частности, означает, что источник должен просвечивать исследуемый объект со всех сторон. Если некоторый интервал углов сканирования по каким-либо причинам пропущен, то возникает задача двумерной томографии в ограниченном диапазоне углов. В такой постановке она рассматривалась авторами предлагаемой работы в [2, 3]. В этих работах были предложены два различных подхода к решению проблемы. Здесь проводится сравнение этих методов между собой.

2. Теория

Обозначим функцию двух переменных, подлежащую реконструкции, через $g(x, y)$. Запишем интеграл от неё вдоль прямой, заданной вектором нормали \mathbf{n} с координатами

$(\cos \varphi, \sin \varphi)$ и расстоянием до начала координат p :

$$f(\mathbf{n}(\varphi), p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) \delta(p - x \cos \varphi - y \sin \varphi) dx dy. \quad (1)$$

Здесь $\delta(l)$ – обобщённая функция, известная как δ -функция Дирака. Выражение (1) называется двумерным преобразованием Радона. Функцию одной переменной, полученную по формуле (1) при фиксированном значении φ , будем называть одномерной проекцией функции $g(x, y)$ в направлении φ .

Известна формула обращения двумерного преобразования Радона. Согласно [1], она имеет следующий вид

$$g(\psi, r) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r \cos(\varphi - \psi) - p} \frac{\partial f(\varphi, p)}{\partial p} dp \right) d\varphi. \quad (2)$$

Формула (2) является одной из основных в двумерной томографии. Она может быть интерпретирована следующим образом. Каждая одномерная проекция фильтруется посредством фильтра высоких частот, Фурье-образ которого есть модуль частоты. В современной литературе эта операция также называется гапф-фильтрацией. Вслед за этим производится интегрирование по вектору направлений – обратное проецирование. Существует большое количество алгоритмов, реализующие формулу (2). Основное их отличие друг от друга – это способ аппроксимации гапф-фильтра.

Как видно из уравнения (2), для того, чтобы провести обратное проецирование нужно знать проекции для всех углов φ . Однако, на практике встречаются ситуации, когда доступ к исследуемому объекту ограничен, и поэтому для некоторого интервала углов φ проекционные данные оказываются неизвестными. В работе [2] для этого случая был разработан алгоритм генерации проекций. Его идея состоит в следующем.

Пусть проекции измерены в диапазоне углов $[0; \varphi_0]$, соответственно, в интервале $]\varphi_0; 2\pi[$ они не известны. По имеющимся данным одним из алгоритмов, реализующих формулу обращения (2), реконструируется начальное приближение, причём верхним пределом внешнего интеграла берётся величина φ_0 . В начальное приближение вносится априорная информация об исследуемом объекте, при этом получается функция, обозначаемая ниже как $g^{(0)}$. От $g^{(0)}$ по формуле (1) насчитываются проекции в тех направлениях, в которых они отсутствуют. Таким образом происходит пополнение данных до диапазона углов от 0 до 2π . На следующем шаге производится реконструкция по составному набору: известным проекциям, и проекциям, вычисленным по функции $g^{(0)}$. В реконструированное решение вновь вносится априорная информация, после чего получается функция $g^{(1)}$. От неё вычисляются отсутствующие проекции, и далее описанные действия повторяются. В результате приходим к итерационному процессу:

$$g^{(i+1)} = \Phi \left(\mathbf{R}^{-1} \left(f + \mathbf{P}_{] \varphi_0; 2\pi[} g^{(i)} \right) \right), \quad g^{(0)} = \Phi \mathbf{R}^{-1} f. \quad (3)$$

Здесь через \mathbf{R}^{-1} обозначен оператор, соответствующий алгоритму решения задачи двумерной томографии; через Φ – оператор, вносящий априорную информацию; через $\mathbf{P}_{] \varphi_0; 2\pi[}$ – оператор, вычисляющий проекции от функции $g^{(i)}$ в интервале углов $]\varphi_0; 2\pi[$; через f – имеющиеся данные. Таким образом, выражение $f + \mathbf{P}_{] \varphi_0; 2\pi[} g^{(i)}$ означает полный набор данных, включающий существующие и искусственно полученные проекции.

Для реализации итерационного процесса (3) в настоящей работе, как и в работе [2], в качестве оператора \mathbf{R}^{-1} был выбран один из наиболее часто употребляемых в томографии алгоритмов, который был предложен Шеппом и Логаном, [4]. В алгоритме Шеппа–Логана фильтрации проекций в формуле обращения двумерного преобразования Радона осуществляется как свёртка с ядром

$$\Omega(jh) = \begin{cases} 1/(1 - 4j^2)\pi^2 h^2, & j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ 0 & |j| > J/2 \end{cases}, \quad (4)$$

где J – число узлов равномерной сетки, в которых задана проекция, h – шаг этой сетки.

В работе [3] был предложен другой метод решения задачи двумерной томографии в ограниченном диапазоне углов. Он основан на одном из свойств преобразования Радона, известном под названием условия Кавальери (иначе оно называется аналог теоремы Пэли-Винера). Обозначим через $M_k(\varphi)$ момент k -го порядка от проекции,

$$M_k(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{n}(\varphi), p) p^k dp. \quad (5)$$

Согласно условию Кавальери, все $M_k(\varphi)$ являются однородными многочленами степени k от компонент вектора \mathbf{n} , [5]:

$$M_k(\varphi) = \sum_{l=0}^k a_{lk} \cos^l(\varphi) \sin^{k-l}(\varphi) \quad (6)$$

Причём коэффициенты a_{lk} не зависят от угла φ .

Разработанный в [3] алгоритм строится следующим образом. Пусть измерено $N + 1$ проекций в диапазоне углов $[0; \varphi_0]$ с равномерным шагом $\Delta\varphi$ по углу. Обозначим через N_1 целую часть числа $(2\pi - \varphi_0)/\Delta\varphi$. На первом шаге алгоритма для каждой известной проекции вычисляются моменты от 1-го до K -го порядка включительно. Найденные моменты подставляются в формулу (6), получается K систем линейных уравнений вида

$$\left\{ \begin{array}{l} M_k(0) = \sum_{l=0}^k a_{lk} \cos^l(0) \sin^{k-l}(0) \\ M_k(\Delta\varphi) = \sum_{l=0}^k a_{lk} \cos^l(\Delta\varphi) \sin^{k-l}(\Delta\varphi) \\ M_k(2\Delta\varphi) = \sum_{l=0}^k a_{lk} \cos^l(2\Delta\varphi) \sin^{k-l}(2\Delta\varphi) \\ \vdots \\ M_k(N\Delta\varphi) = \sum_{l=0}^k a_{lk} \cos^l(N\Delta\varphi) \sin^{k-l}(N\Delta\varphi) \end{array} \right. \quad (7)$$

Каждая из систем (7) содержит $N + 1$ уравнений и $k + 1$ неизвестных. Выбор метода решения систем (7) зависит от конкретных условий, в частности, от соотношения чисел N и k . Если $N > k$, то для решения целесообразно применять метод наименьших квадратов.

На следующем шаге по формуле (6) с использованием полученных коэффициентов a_{lk} вычисляются моменты с 1-го до K -го порядка для N_1 неизвестных проекций: $M_k(i\Delta\varphi)$, $i = N + 1, N + 2, \dots, N + N_1$. (Моменты нулевого порядка для всех проекций одинаковы.)

Представим интеграл (5) в виде конечной суммы:

$$M_k(\varphi) = h \sum_{j=-J/2}^{J/2} f(\varphi, jh)(jh)^k, \quad (8)$$

где h – шаг равномерной сетки, на которой заданы проекции. Выражение (8) представляет собой систему линейных уравнений для определения значений неизвестных проекций в узлах сетки. Она содержит $K + 1$ уравнений и J неизвестных. В данной работе, также как и в работе [3], для использованных J и K имело место $K \ll J$, в связи с этим система (8) решалась алгоритмом ART, [1].

На последнем этапе алгоритма производится томографическая реконструкция функции $g(x, y)$ каким-либо стандартным алгоритмом по набору из $N + N_1 + 1$ одномерных проекций; $N + 1$ из них известно в результате измерений, а N_1 получено путём описанной выше процедуры.

3. Вычислительный эксперимент

В вычислительном эксперименте использовался тот же математический фантом, что и в работе [2]:

$$g(x, y) = \sum_{i=1}^{20} g_i(x, y), \quad (9)$$

$$g_i(x, y) = \begin{cases} (1 - (x - x_{0i})^2/a_i^2 - (y - y_{0i})^2/b_i^2), & (x - x_{0i})^2/a_i^2 - (y - y_{0i})^2/b_i^2 \leq 1 \\ 0, & (x - x_{0i})^2/a_i^2 - (y - y_{0i})^2/b_i^2 > 1 \end{cases}.$$

Параметры a_i , b_i , x_{0i} , y_{0i} в (9) были подобранными так, чтобы эллипсы, имеющие полуоси a_i , b_i , с центрами в точках (x_{0i}, y_{0i}) , не пересекались.

Область реконструкции представляла собой квадрат с центром в начале координат и длиной ребра, равной двум. На нём была задана квадратная сетка 256×256 узлов. Проекционные данные моделировались как набор одномерных проекций, которые были распределены равномерно по углу φ в интервале от 0 до φ_0 . На каждой проекции задавалась сетка в 1025 узлов. Реконструкция проводилась как при отсутствии случайного шума в проекционных данных, так и при его наличии. Шум предполагался гауссовым со средним равным нулю и переменной дисперсией, составляющей ξ процентов от значения проекции в данной точке.

В расчётах варьировались величина угла φ_0 , число проекций M , значение параметра ξ , определяющего уровень шума. Для контроля точности реконструкции использовалось нормированное среднеквадратичное отклонение Δ между математическим фантомом и восстановленной функцией.

Оператор априорной информации Φ в алгоритме (3) включал в себя процедуру зануления отрицательных значений, процедуру зануления томограммы вне круга, вписанного в область реконструкции, а также медианную фильтрацию в скользящем окне,

размером 5×5 пикселей. При восстановлении недостающих проекций в методе, основанном на условии Кавальери, использовались 15 первых моментов. Реконструкция по пополненному набору данных проводилась алгоритмом Шеппа–Логана (4). Зашумлённые проекции предварительно сглаживались кубическими сплайнами.

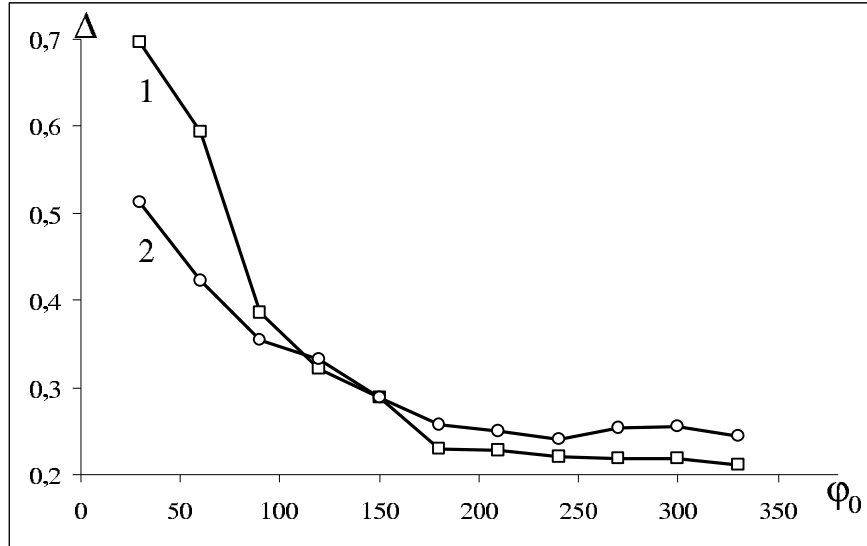


Рис. 1. Зависимости ошибки реконструкции от величины угла, в котором известны проекции. Шум в данных отсутствует. Число проекций 100.

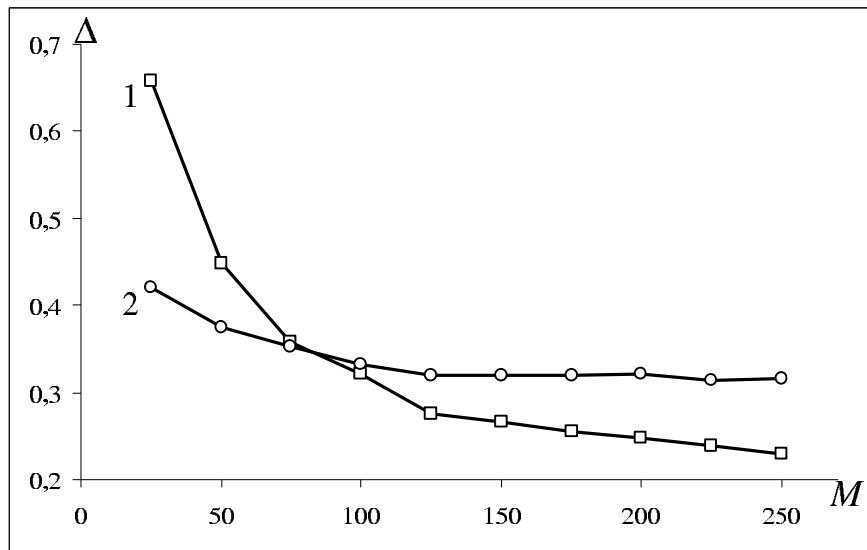


Рис. 2. Зависимости ошибки реконструкции от числа проекций. Величина угла, в котором известны проекции, 120° . Шум в данных отсутствует.

На рис.1 – рис.3 представлены зависимости ошибки Δ от величины угла φ_0 , числа проекций и уровня шума, соответственно. На всех рисунках кривая 1 соответствует итерационному алгоритму пополнения проекционных данных (3), кривая 2 – методу, основанному на условии Кавальери.

Как видно из приведённых рисунков, использование условия Кавальери в случае узкого интервала углов, в котором известны проекционные данные, (приблизительно до

65°), а также при малом числе проекций обеспечивает меньшую ошибку реконструкции, чем алгоритм пополнения проекционных данных (3). Однако этот метод менее устойчив по отношению к случайному шуму.

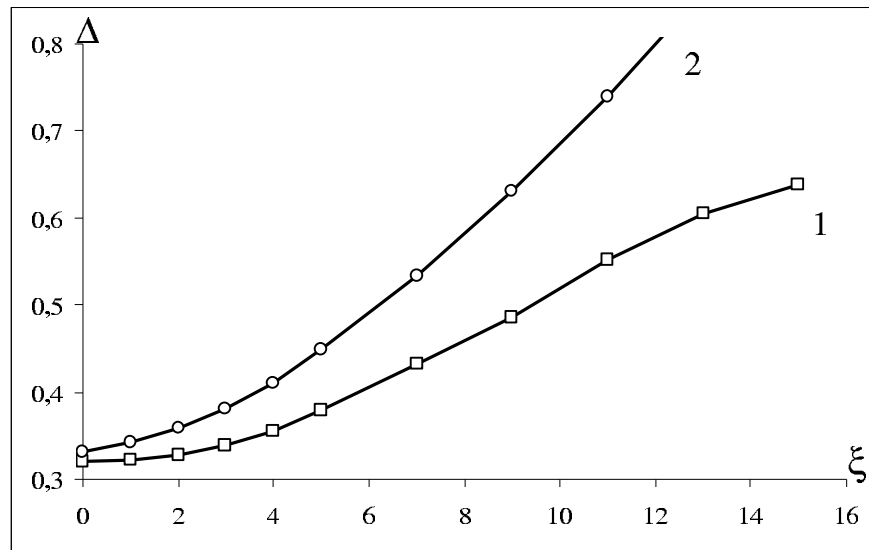


Рис. 3. Зависимости ошибки реконструкции от уровня шума. Величина угла, в котором известны проекции, 120°. Число проекций 100.

4. Заключение

Проведённое сравнение двух алгоритмов двумерной томографии в ограниченном диапазоне углов показало, что ни один из них не имеет абсолютного преимущества над другим. Поэтому выбор между этими алгоритмами следует проводить, исходя из условий задачи.

Список литературы

- [1] ХЕРМЕН Г.Т. Восстановление изображений по проекциям. Основы реконструктивной томографии: Пер. с англ. М.: Мир, 1983.
- [2] ЛИХАЧЁВ А.В. Алгоритм генерации проекций в задачах томографии с ограниченным диапазоном углов. // Автометрия. 2009. Т. 45, № 1. С.83–91.
- [3] ВАЖЕНЦЕВА Н.В., ЛИХАЧЕВ А.В. Новый метод повышения точности томографической реконструкции при ограниченном угле сканирования. // III Евразийский конгресс по медицинской физике и инженерии, Москва, 2010. Т. 1. С.30–32.
- [4] SHEPP L.A., LOGAN B.F. The Fourier reconstruction of a head section. // IEEE Trans. Nucl. Sci. 1974. Vol. 21, N 3. P.21–43.
- [5] ГЕЛЬФАНД И.М., ГРАЕВ М.И., ВИЛЕНКИН Н.Я. Избранные задачи интегральной геометрии. М.: Добросвет, 2000. 208 с.