

Сравнение методов томографической реконструкции Фельдкамп, Гранжа и Туя для круговой траектории источника.

А.В. ЛИХАЧЕВ

Институт автоматизации и электрометрии СО РАН

e-mail: ipm1@iae.nsk.su

Рассматривается реконструкция по проекционным данным, полученным при круговом движении источника. Для реконструкции используются алгоритмы, основанные на формуле обращения Туя, теореме Гранжа, а также алгоритм Фельдкамп. Проведено сравнение этих трёх методов. Получены оценки их быстродействия. В проведённом вычислительном эксперименте получено, что когда радиус траектории источника порядка размера области реконструкции алгоритмическая реализация формулы Туя обеспечивает меньшую ошибку.

1. Введение

В современных томографических установках часто используются схемы регистрации проекционных данных, в которых источник зондирующего излучения движется относительно объекта по некоторой кривой. При этом интенсивность излучения, прошедшего через объект, регистрируется двумерным детектором, либо движущимся синхронно с источником, либо неподвижным. По этим данным реконструируется распределение коэффициента ослабления зондирующего излучения в объёме исследуемого тела.

С математической точки зрения рассматриваемую задачу томографии можно свести к задаче реконструкции функции трёх переменных по набору интегралов от неё вдоль некоторого множества лучей в трёхмерном пространстве. В работе Туя (H.K. Tuy) [1] были выведены условия, которые должны накладываться на кривую, для того чтобы имела место формула обращения соответствующего интегрального преобразования. Кривые, удовлетворяющие этим условиям обычно называются полными траекториями источника. Главное из условий полноты состоит в следующем: любая плоскость, пересекающая носитель искомой функции, пересекает также и траекторию источника.

Очевидно, что окружность, охватывающая объект, не является полной траекторией. Тем не менее, в силу своей простоты она часто реализуется в томографическом оборудовании. Как правило, для реконструкции по таким данным используют приближённые методы: алгоритм Фельдкамп [2], либо послойную реконструкцию. Эти подходы сравнивались в работе [3]. По результатам проведённого там вычислительного эксперимента был сделан вывод, что оба эти подхода обеспечивают примерно одинаковое качество восстановления, которое при малом радиусе окружности является невысоким.

В данном исследовании алгоритм Фельдкамп сравнивается с двумя другими подходами. Один из них основывается на формуле обращения Туя, в другом используется метод, предложенный Гранжа (P. Grangeat) [4].

2. Теория

Пусть заданы функция $g(\mathbf{r}) = g(x, y, z)$, вектор $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ и точка $\mathbf{s} = (s_x, s_y, s_z)$. Лучевым преобразованием функции $g(\mathbf{r})$ называется функция

$$f(\mathbf{s}, \mathbf{n}) = \int_0^{\infty} g(\mathbf{s} + \mathbf{n}p) dp. \quad (1)$$

Функция $f(\mathbf{s}, \mathbf{n})$ есть интеграл от функции $g(\mathbf{r})$ вдоль луча, проходящего через точку \mathbf{s} в направлении вектора \mathbf{n} . Применительно к рассматриваемой задаче томографии, \mathbf{s} – точка, в которой находится источник излучения. При фиксированном положении источника функция переменной \mathbf{n} называется проекцией в расходящихся лучах, ниже для краткости мы её будем называть просто проекцией. При регистрации данных плоским двумерным детектором, проекция является функцией двух переменных, заданных на его поверхности.

Пусть источник движется вдоль кривой $\mathbf{C}(\lambda) = (C_x(\lambda), C_y(\lambda), C_z(\lambda))$, $\lambda \in \Lambda \subset R^1$, которая удовлетворяет условиям полноты. Тогда имеет место следующая формула обращения лучевого преобразования, полученная Туем в работе [1]:

$$g(\mathbf{r}) = -\frac{1}{i(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{\langle \mathbf{C}'(\lambda), \mathbf{n} \rangle} \frac{\partial F(\mathbf{n}, \lambda)}{\partial \lambda} \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (2)$$

где $F(\mathbf{n}, \lambda)$ определяется выражением

$$F(\mathbf{n}, \lambda) = \int_{R^3} f(\boldsymbol{\beta}, \lambda) \exp(-i \langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\omega} \rangle) d\boldsymbol{\beta}, \quad \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\omega} \in R^3, \quad \mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|} \in S^2, \quad (3)$$

$$f(\boldsymbol{\beta}, \lambda) = \frac{f(\mathbf{n}, \lambda)}{|\boldsymbol{\beta}|} = \frac{1}{|\boldsymbol{\beta}|} \int_0^{\infty} g\left(\mathbf{C}(\lambda) + \frac{\boldsymbol{\beta}}{|\boldsymbol{\beta}|}p\right) dp \quad (4)$$

Здесь через $\langle \circ, \circ \rangle$ обозначено скалярное произведение; $\mathbf{C}'(\lambda)$ – касательный вектор к траектории источника, его компоненты $(dC_x(\lambda)/d\lambda, dC_y(\lambda)/d\lambda, dC_z(\lambda)/d\lambda)$; единичный вектор \mathbf{n} параметризован посредством полярного угла θ и азимутального угла φ , он имеет компоненты $(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$. При заданных значениях \mathbf{r} и \mathbf{n} величина параметра λ , т.е. точка положения источника на траектории, определяется из уравнения

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{C}(\lambda), \mathbf{n} \rangle \quad (5)$$

Выполнение условий полноты обеспечивает существование решения уравнения (5), такого что $\langle \mathbf{C}'(\lambda), \mathbf{n} \rangle \neq 0$.

В работе [5] формула обращения (2) была приведена к виду, более удобному для алгоритмической реализации:

$$g(\mathbf{r}) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{\langle \mathbf{C}'(\lambda), \mathbf{n} \rangle} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\int_{S(\mathbf{n})} L_{\mathbf{n}} f(\boldsymbol{\beta}, \lambda) d\mu \right] \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (6)$$

В (6) $f(\boldsymbol{\beta}, \lambda)$ определяется согласно (4), $\boldsymbol{\beta} \in R^3$; $S(\mathbf{n})$ – окружность, по которой пересекаются единичная сфера и плоскость, проходящая через начало координат ортогонально единичному вектору \mathbf{n} ; через $d\mu$ обозначена мера на $S(\mathbf{n})$. Таким образом,

внутреннее интегрирование в (6) ведётся для векторов β , которые перпендикулярны \mathbf{n} . Через $L_{\mathbf{n}}$ обозначен оператор дифференцирования в направлении \mathbf{n} . Параметризация вектора \mathbf{n} , а также остальные обозначения в (6) те же самые, что и в (2). Значение параметра λ при фиксированных \mathbf{r} и \mathbf{n} определяется по уравнению (5). Согласно формуле обращения (6) для реконструкции функции $g(\mathbf{r})$ в одной точке нужно провести три интегрирования, в то время как в (2) их требуется пять.

В случае если траектория источника неполная, решение уравнения (5) будет существовать не для любой пары \mathbf{r} и \mathbf{n} . Вследствие этого, при вычислении интегралов по угловым переменным в формулах (2), (6) подынтегральная функция будет неизвестной на некоторых интервалах. Поэтому в данном случае может быть получена только оценка искомой функции $g(\mathbf{r})$.

К реконструкции по проекционным данным, полученным при движении источника по кривой в пространстве возможен также другой подход, основанный на работе Гранжа [4]. Там было установлено следующее соотношение:

$$\frac{r_s^2}{|\mathbf{s} \times \mathbf{n}|} \frac{\partial \tilde{f}(\mathbf{s}, p')}{\partial p'} \Big|_{p'=0} = \frac{\partial (\mathbf{R}g)(\mathbf{n}, l)}{\partial l} \Big|_{l=\langle \mathbf{s}, \mathbf{n} \rangle} \quad (7)$$

где

$$\tilde{f}(\mathbf{s}, p') = \int_{L(p')} \frac{r_s}{|\mathbf{s}, A(q)|} f(\mathbf{s}, A(q)) dq \quad (8)$$

Здесь $(\mathbf{R}g)(\mathbf{n}, l)$ – трёхмерное преобразование Радона функции $g(\mathbf{r})$, см., например, [6]; $f(\mathbf{s}, A(q))$ – интеграл от функции $g(\mathbf{r})$ вдоль прямой, проходящей через источник, находящийся в точке \mathbf{s} , и точку $A(q)$, принадлежащую прямой $L(p')$. Прямая $L(p')$ образуется в пересечении двух плоскостей, одна из них, P_D , параллельна плоскости детектора и проходит через начало координат, другая, $P_{\mathbf{n}}$, перпендикулярна вектору \mathbf{n} и проходит через источник. Координата p' определена в плоскости P_D , в направлении, перпендикулярном прямой $L(p')$. Через $|\mathbf{s}, A(q)|$ обозначено расстояние от источника до точки $A(q)$; r_s – расстояние от источника до начала координат; $\mathbf{s} \times \mathbf{n}$ – векторное произведение.

Согласно формуле (7), из проекционных данных, зарегистрированных плоским двумерным детектором, можно получить производную трёхмерного преобразования Радона от искомой функции $g(\mathbf{r})$. После этого для реконструкции функции $g(\mathbf{r})$ можно воспользоваться формулой, [6],

$$g(\mathbf{r}) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\partial^2 (\mathbf{R}g)(\mathbf{n}, l)}{\partial l^2} \Big|_{l=\langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle} |\sin \theta| d\theta d\varphi, \quad (9)$$

Здесь параметризация вектора \mathbf{n} та же, что и ранее. При использовании метода Гранжа для неполных траекторий источника также, как и в случае использования формулы обращения Туя, получается лишь приближённое решение.

Пусть источник движется в плоскости $z = 0$ по окружности радиуса r_s с центром в начале координат. Регистрирующая поверхность двумерного детектора перпендикулярна плоскости $z = 0$. Центр детектора описывает вокруг начала координат окружность радиуса r_s . Движение происходит таким образом, что в любой момент прямая, проходящая через источник перпендикулярно поверхности детектора, проходит через начало

координат. При таких условиях алгоритм Фельдкамп [2] имеет следующий вид:

$$g(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{(r_s + r_d)^2 f^{Flt}(\phi, u(x, y, z), v(x, y, z))}{(r_s + r_d + x \cos \phi + y \sin \phi)^2} d\phi, \quad (10)$$

$$u(x, y, z) = \frac{(r_s + r_d)(y \cos \phi - x \sin \phi)}{(r_s + x \cos \phi + y \sin \phi)}, \quad v(x, y, z) = \frac{(r_s + r_d)z}{(r_s + x \cos \phi + y \sin \phi)}, \quad (11)$$

$$f^{Flt}(\phi, u, v) = \frac{r_s^2}{(r_s + r_d)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\phi, u', v') \Omega_U(u - u') \Omega_V(v - v')}{\sqrt{(r_s + r_d)^2 + u'^2 + v'^2}} du' dv', \quad (12)$$

$$\Omega_U(u) = \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{\omega_U} \omega \exp(i\omega u) d\omega \right\}, \quad \Omega_V(v) = \frac{\sin(\omega_V v)}{\pi v}. \quad (13)$$

Здесь положение источника на окружности характеризуется азимутальным углом ϕ ; u, v – координаты на двумерном детекторе, при этом координатная ось V параллельна оси Z , а ось U является пересечением поверхности детектора и плоскости $z = 0$. В разработанном алгоритме реконструкции фильтры $\Omega_U(u)$ и $\Omega_V(v)$ были реализованы так же, как и в работе [3], в частности, такими же были выбраны значения параметров ω_U, ω_V , характеризующих степень сглаживания проекций.

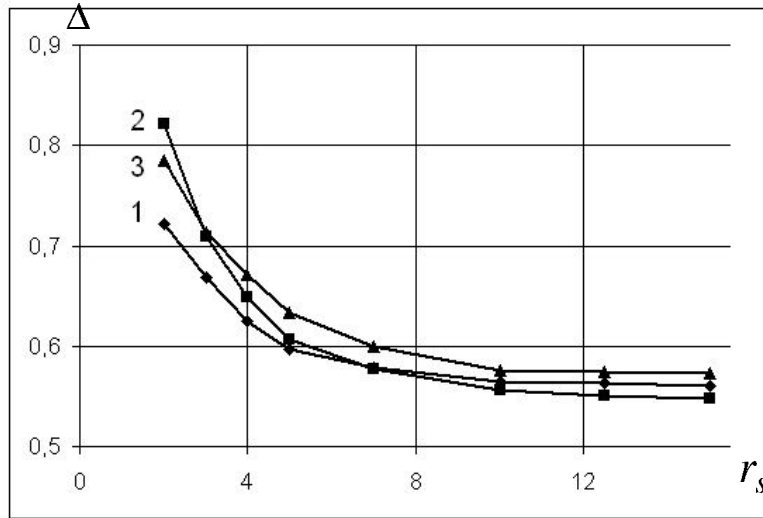


Рис. 1. Зависимости ошибки реконструкции от радиуса траектории источника

В работе было проведено сравнение трёх описанных выше подходов для реконструкции по данным, полученным при движении источника по окружности. Для этого была проведена алгоритмическая реализация модифицированной формулы Туя (6) и метода Фельдкамп (10) - (13). Также был разработан алгоритм, реализующий метод Гранжа, согласно формулам (7), (9). Сравнивались точность и быстродействие разработанных алгоритмов.

3. Вычислительный эксперимент

В вычислительном эксперименте использовался тот же фантом, что и в работе [3]. Он состоит из девяти одинаковых дисков, радиусом 0,5, расположенных один над другим

вдоль оси Z . Центры дисков лежат на этой оси. Толщина дисков – 0.03125, плотность – 1.0, зазор между ними – 0.046875. Расчёты производились на кубической сетке $256 \times 256 \times 256$ узлов, заданной в кубе с центром в начале координат и длиной ребра, равной 2.0. Проекционные данные моделировались как 360 двумерных конусных проекций, которые были распределены равномерно (через 1°) по углу ϕ в интервале от 0° до 360° . Размер детекторов равнялся 2.0×2.0 . На каждом из них задавалась сетка 256×256 узлов. Расстояние r_d было фиксированным и равнялось 1.0. В расчётах варьировалось расстояние r_s от источника до оси Z , а также уровень шумов в исходных данных. Для контроля точности использовалось нормированное среднеквадратичное отклонение Δ между математическим фантомом и восстановленной функцией. При реконструкции функции методом Туя (формула (6)) и методом Гранжа (формулы (7), (9)) бралось $N_{\mathbf{n}} = 120 \times 60$ направлений вектора \mathbf{n} (через 3° по азимутальному и полярному углу).

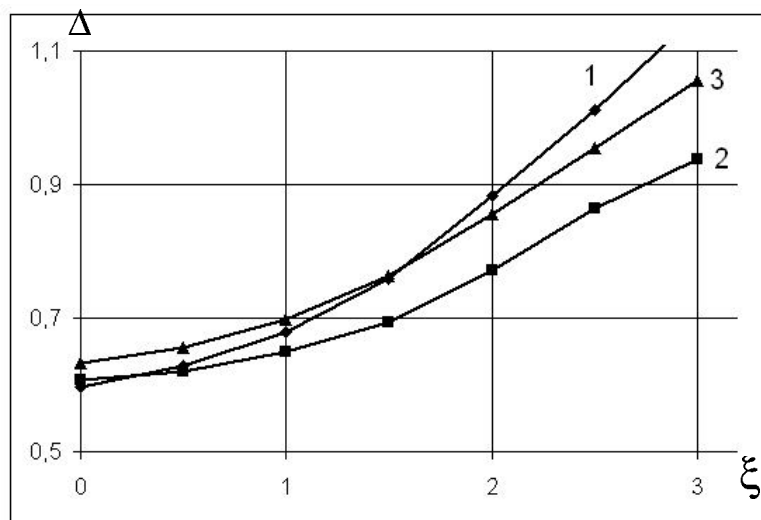


Рис. 2. Зависимости ошибки реконструкции от уровня шума

На рис.1 представлены зависимости ошибки Δ от расстояния r_s . Кривая 1 соответствует алгоритму, реализующему формулу (6), кривая 2 - методу Гранжа, кривая 3 - алгоритму Фельдкамп. На рис.2 приведены зависимости ошибки Δ от параметра ξ , характеризующего уровень шума в проекционных данных. Шум предполагался гауссовским со средним равным нулю и переменной дисперсией, составляющей ξ процентов от значения проекции в данной точке. Расстояние до источника r_s для рис.2 равно 5.0. Нумерация кривых на рис.2 имеет тот же смысл, что и на рис.1.

4. Обсуждение и выводы

Из видно рис.1, видно, что когда радиус траектории источника более чем в четыре раза превосходит размер области реконструкции все три рассмотренных метода обеспечивают примерно одинаковую среднеквадратичную ошибку. В случае меньшего радиуса траектории алгоритм, реализующий формулу (6), даёт ошибку на 5% – 8% меньше, чем алгоритм Фельдкамп. Однако он затрачивает много больше времени на реконструкцию.

Для разработанной программной реализации формулы (6) число операций для полной трёхмерной реконструкции оценивается как $N_{Tuy} \sim MN^2 + N_{\mathbf{n}}(MK_1 + N^3)$. Пред-

полагается, что имеется M проекций, каждая из которых задана в $N \times N$ узлах, реконструкция производится на кубической сетке $N \times N \times N$ узлов. Через N_n обозначено количество направлений вектора \mathbf{n} , через K_1 - среднее число операций, требуемое для вычисления внутреннего интеграла в (6). В тех же условиях для разработанного алгоритма, реализующего метод Гранжа, имеет место оценка $N_{Gran} \sim N_n(NK_2 + N^3)$, где K_2 - среднее число операций затрачиваемое для получения функции $\tilde{f}(\mathbf{s}, p')$ в одной точке. Для алгоритма Фельдкамп оценка числа операций будет $N_{Feld} \sim MN^3$.

Если предположить $K_1 \sim K_2 \sim N$, то при больших N имеет место $N_{Tuy}/N_{Feld} \sim N_{Gran}/N_{Feld} \sim N_n/M$. Для использованных в работе значений N_n и M это отношение составляет 20. По результатам вычислительного эксперимента величина отношений времён реконструкции оказалась ниже оценочной. Это объясняется тем, что в силу неполноты траектории источника внутреннее интегрирование в (6) или вычисление функции $\tilde{f}(\mathbf{s}, p')$ в методе Гранжа производится не для всех направлений вектора \mathbf{n} .

По рис.2 можно заключить, что наличие шумов в проекционных данных заметно ухудшает результат реконструкции всеми рассмотренными методами. При этом самым неустойчивым оказался алгоритм, реализующий формулу (6). Это объясняется тем, что в формулу (6) входит оператор дифференцирования проекционных данных. В алгоритм, основанный на подходе Гранжа, также входит дифференцирование. Однако оно применяется к проинтегрированным проекционным данным. По результатам вычислительного эксперимента метод Гранжа оказался наиболее устойчивым по отношению к случайным шумам.

В целом по исследованию, проведённому в данной работе, был сделан следующий вывод. Сложные методы трёхмерной томографии, основанные на формуле обращения Туя и теореме Гранжа, при реконструкции по данным, полученным при движении источника по окружности, не приводят к решающему улучшению качества реконструкции по сравнению с алгоритмом Фельдкамп. При этом время, которое затрачивается ими на реконструкцию, во много раз больше времени, которое требуется для алгоритма Фельдкамп.

Список литературы

- [1] TUY H.K. An inversion formula for cone-beam reconstruction. // SIAM J. Applied Mathematics. 1983. Vol. 43, N 3. P.546–552.
- [2] FELDKAMP L.A., DAVIS L.C., KRESS J.W. Practical cone-beam algorithm // J. Opt. Soc. Amer. A. 1984. Vol. 1, N 6. P.612–619.
- [3] ЛИХАЧЁВ А.В. Сравнение алгоритма Фельдкамп с алгоритмом синтеза Фурье для трёхмерной томографии. // Автометрия. 2006. Т. 42, № 1. С.88–101.
- [4] GRANGEAT P. Mathematical framework of cone beam 3D reconstruction via the first derivative of the Radon transform. // Int. Conf. Mathematical Methods in Tomography, Oberwolfach, Germany, 1990. P.66-97.
- [5] ЛАВРЕНТЬЕВ М.М., ЗЕРКАЛЬ С.М., ТРОФИМОВ О.Е. Численное моделирование в томографии и условно-корректные задачи. Новосибирск: Изд-во ИДМИ НГУ, 1999. 170 с.
- [6] НАТТЕРЕР Ф. Математические аспекты компьютерной томографии: Пер. с англ. М.: Мир, 1990.