О задаче идентификации функции источника в системе составного типа

Ю.Я. Белов
Сибирский Федеральный университет
e-mail: `belov@lan.krasu.ru`

В работе рассмотрены задачи идентификации функции источника для одномерной системы двух уравнений в частных производных второго порядка, одно из которых является параболическим, а второе — эллиптическим. Исследованы задача Коши и первая краевая задача. Исходные задачи аппроксимируются задачами, в которых эллиптическое уравнение заменяется параболическим, содержащим малый параметр $\varepsilon > 0$ при производной по времени. Доказаны разрешимость аппроксимирующих задач и исходной задачи в классах достаточно гладких функций.

Решения задач для полуэволюционной системы находятся как пределы ω решений ω^ε соответствующих краевых задач для эволюционных систем при стремлении параметра ε к нулю.

Разрешимость исследуемых задач при $\varepsilon > 0$ при условии периодичности по пространственной переменной, достаточной гладкости и выполнения условий согласования входных данных задачи доказана "в целом" методом слабой аппроксимации [1,2]. Переодичность решений ω^ε доказывается расщеплним исходных задач на ряд задач, компоненты которых являются переодическими по x и равномерно сходятся при стремлении параметра расщепления к нулю к переодическим по x функциям ω^ε, являющимися решениями аппроскимирующих задач. Условия переодичности решений ω^ε позволяют доказать равномерные по ε оценки решений ω^ε в нормах $C^k\left(\overline{Q_T}\right)$, $\overline{Q_T} = \{t, x | 0 \le t \le T, 0 \le x \le l\}$, и равномерную в $\overline{Q_T}$ сходимость ω^ε к ω.

Получены оценки скорости сходимости. Рассмотрен случай, когда находится принадлежащая параболическому уравнению неизвестная компонента вектор - функции источника [3], и случай, когда неизвестна компонента, принадлежащая уравнению, содержащему малый параметр.

Изучению прямых задач для систем составного типа посвящены работы различных авторов [4-10]. Обратные задачи для эволюционных систем составного типа см., например, в [11-14].

Задача 1.

Рассмотрим в полосе $\Pi_{[0,T]} = \{(t,x) | 0 \le t \le T, -\infty < x < +\infty\}$ систему уравнений

$$\begin{aligned} u_t^\varepsilon + a_{11}u^\varepsilon + a_{12}v^\varepsilon &= \mu_1 u_{xx}^\varepsilon + g^\varepsilon f, \\ \varepsilon v_t^\varepsilon + a_{21}u^\varepsilon + a_{22}v^\varepsilon &= \mu_2 v_{xx}^\varepsilon + F, \quad \varepsilon > 0 - const, \end{aligned} \tag{1}$$

с данными Коши

$$u^\varepsilon(0,x) = u_0(x), \quad v^\varepsilon(0,x) = v_0(x), \quad -\infty < x < +\infty. \tag{2}$$

В системе (1) коэффициенты $a_{ij} = a_{ij}(t)$ заданы на отрезке $[0,T]$, $\mu_i = const > 0$, $i = 1,2$. Функции f, F заданы в $\Pi_{[0,T]}$, а функция $f(t,x)$ удовлетворяет при $x_0 \in (0,l)$

условию

$$f(t, x_0) \geq \delta, \quad \delta > 0 - const, \quad t \in [0, T]. \tag{3}$$

Требуется найти функции $u^\varepsilon = u^\varepsilon(t, x)$, $v^\varepsilon = v^\varepsilon(t, x)$, $g^\varepsilon = g^\varepsilon(t)$ при дополнительном условии (условии переопределения)

$$u^\varepsilon(t, x_0) = \varphi(t), \quad \varphi(t) \in C^2[0, T], \tag{4}$$

где $\varphi(t)$ — заданная функция на $[0, T]$.

В предположении достаточной гладкости входных данных мы:

- докажем существование достаточно гладкого решения $(u^\varepsilon, v^\varepsilon, g^\varepsilon)$ задачи (1), (2), (4) в $\Pi_{[0,T]}$ при любом $\varepsilon > 0$;

- при условии периодичности по x и нечетности входных данных f, F, u_0, v_0 докажем существование достаточно гладкого решения задачи определения $(u^\varepsilon, v^\varepsilon, g^\varepsilon)$ в $\overline{Q_T} = [0, T] \times [0, l]$ при первом краевом условии

$$u^\varepsilon(t, 0) = v^\varepsilon(t, 0) = u^\varepsilon(t, l) = v^\varepsilon(t, l) = 0, \quad t \in [0, T]. \tag{5}$$

- докажем существование решения (u, v, g) первой краевой задачи (1^0), (2^0), (4^0), (5^0), где
$$u = \lim_{\varepsilon \to 0} u^\varepsilon, \quad v = \lim_{\varepsilon \to 0} v^\varepsilon, g = \lim_{\varepsilon \to 0} g^\varepsilon,$$
и через (1^0), (2^0), (4^0), (5^0) обозначены соответственно (1), (2), (4), (5) при $\varepsilon = 0$ ($u^\varepsilon = u$, $v^\varepsilon = v$);

- Получим оценку скорости сходимости u^ε, v^ε, g^ε к u, v, g соответственно при $\varepsilon \to 0$.

Предположим выполнение следующих условий:

- условие согласования
$$u_0(x_0) = \varphi(0); \tag{6}$$

- функции $a_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2$, дважды непрерывно дифференцируемы на отрезке $[0, T]$:
$$a_{ij} \in C^2[0, T], \quad i, j = 1, 2; \tag{7}$$

- матрица
$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}$$
порождает симметрическую и коэрцитивную билинейную форму $a(t, \xi, \chi) = (A(t)\xi, \chi)$:
$$a(t, \xi, \chi) = a(t, \chi, \xi), \quad \forall \chi, \xi \in E_2,$$
$$a(t, \xi, \xi) \geq \kappa |\xi|^2, \forall \xi = (\xi_1, \xi_2) \in E_2, \quad t \in [0, T], \quad \kappa > 0 - const. \tag{8}$$

Рассмотрим четное число $p \geq 6$. Предположим, что функции f, F, u_0, v_0 имеют непрерывные производные, входящие в (9), и удовлетворят условиям

$$\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}\frac{\partial^m}{\partial t^m}F(t,x)\right| + \left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}\frac{\partial^m}{\partial t^m}f(t,x)\right| + \left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}u_0(x)\right| + \left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}u_0(x)\right| \leq C, \tag{9}$$

$$j = 0, \ldots, p+6, \quad m = 0, 1, 2, \quad (t,x) \in Q_T.$$

В (9) и ниже C – постоянные, не зависящие от ε.

Через $K_d^{l,k_1,k_2}(\Pi_{[0,T]})$ обозначим линейное пространство вектор - функций $(\varphi(t,x), \psi(t,x), \chi(t))$, определенных в $\Pi_{[0,T]} \times \Pi_{[0,T]} \times [0,T]$ соответственно и таких, что в $\Pi_{[0,T]}$ функции φ, ψ непрерывно дифференцируемы по x до порядка l, функция φ непрерывно дифференцируема по t до порядка k_1, функция ψ непрерывно дифференцируема k_2 раз по t и функция χ непрерывно дифференцируема d раз на $[0,T]$.

Через $K_d^{l,k_1,k_2}(\overline{Q_T})$ обозначим $K_d^{l,k_1,k_2}(\Pi_{[0,T]})$, где вместо $\Pi_{[0,T]}$ следует рассматривать $\overline{Q_T}$.

Теорема 1. *При выполнении условий* (3), (6)—(9) *задача* (1), (2), (4) *имеет единственное решение* $(u^\varepsilon,\ v^\varepsilon,\ g^\varepsilon)$ *класса* $K_1^{p+4,1,1}(\Pi_{[0,T]})$, *удовлетворяющее соотношению*

$$\sum_{j=0}^{p+4}\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}\omega^\varepsilon(t,x)\right| + ||g^\varepsilon||_{C^1[0,T]} + \left|\frac{\partial}{\partial t}\omega^\varepsilon(t,x)\right| \leq C(\varepsilon), \quad (t,x) \in \Pi_{[0,T]}. \tag{10}$$

Постоянная $C(\varepsilon)$ *в* (10) *зависит, вообще говоря, от* ε *и входных данных. Функция*

$$g^\varepsilon = \frac{\varphi'(t) + a_{11}\varphi(t) + a_{12}v^\varepsilon(t,x_0) - \mu_1 u^\varepsilon_{xx}(t,x_0)}{f(t,x_0)}, \quad \omega^\varepsilon = (u^\varepsilon, v^\varepsilon).$$

Замечание 1. *Из* (10) *и системы* (1) *следует, что* $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^j}{\partial x^j}\omega^\varepsilon(t,x)$ *существует и*

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^j}{\partial x^j}\omega^\varepsilon(t,x)\right| \leq C(\varepsilon), \quad j = 0, 1, \ldots, p+2, \quad (t,x) \in \Pi_{[0,T]}. \tag{11}$$

Предположение 1. *В предположении, что входные данные* $u_0(x)$, $v_0(x)$, $f(t,x)$, $F(t,x)$, *— периодические по* x *функции и ряды*

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k \sin\frac{k\pi}{l}x, \quad v_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\beta_k \sin\frac{k\pi}{l}x, \tag{12}$$
$$f(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\sin\frac{k\pi}{l}x, \quad F(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t)\sin\frac{k\pi}{l}x$$

сходятся равномерно в $[0,l]$ *и* $\overline{Q_T}$ *вместе со всеми производными по* x *до порядка* $p+4$.

Теорема 2. *При выполнении предположения 1 и условий теоремы 1 при любом фиксированном* $\varepsilon > 0$ *компоненты* u^ε, v^ε *решения* $(u^\varepsilon,\ v^\varepsilon,\ g^\varepsilon)$ *задачи* (1), (2), (4) *являются периодическими функциями по переменной* x *и удовлетворяют условиям*

$$\frac{\partial^{2m}u^\varepsilon(t,0)}{\partial x^{2m}} = \frac{\partial^{2m}u^\varepsilon(t,l)}{\partial x^{2m}} = \frac{\partial^{2m}v^\varepsilon(t,0)}{\partial x^{2m}} = \frac{\partial^{2m}v^\varepsilon(t,l)}{\partial x^{2m}} = 0, \quad m = 0, 1, \ldots, \frac{p}{2}+2. \tag{13}$$

Доказательство теорем 1,2 можно провести на основе метода расщепления [1,2].

Периодичность u^ε, v^ε в теореме 2 доказывается в силу (12) расщеплением задачи (1), (2), (4) на ряд задач, компоненты решений которых $u^{\varepsilon\tau}$, $v^{\varepsilon\tau}$ являются периодическими по x, удовлетворяют (13) и равномерно сходятся при $\tau \to 0$ к периодическим по x функциям u^ε, v^ε, удовлетворяющим (13).

Предположим выполнение условий согласования входных данных

$$\mu_2 v_{0xx}(x) + F(0,x) - a_{21}(0)u_0(x) - a_{22}(0)v_0(x) = 0. \tag{14}$$

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* (3), (6)—(9), (14). *Тогда решение* (u, v, g) *задачи*

$$u_t(t,x) + a_{11}u + a_{12}v(t,x) = \mu_1 u_{xx}(t,x) + g(t)f(t,x),$$
$$a_{21}u(t,x) + a_{22}v(t,x) = \mu_2 v_{xx}(t,x) + F(t,x), \tag{15}$$

$$u(0,x) = u_0(x),\ v(0,x) = v_0(x),\ x \in [0,l], \tag{16}$$

$$u(t,0) = v(t,0) = u(t,l) = v(t,l) = 0, \tag{17}$$

$$u(t,x_0) = \varphi(t) \tag{18}$$

существует и единственно в классе $K_0^{p-1,1,0}(\overline{Q_T})$ *и при* $\varepsilon \to 0$

$$\frac{\partial^j u^\varepsilon}{\partial x^j} \to \frac{\partial^j u}{\partial x^j},\ \frac{\partial^j v^\varepsilon}{\partial x^j} \to \frac{\partial^j v}{\partial x^j} \text{ сильно в } C(\overline{Q_T}), j = 0,1,\ldots,p-1,$$
$$g^\varepsilon \to g \text{ сильно в } C[0,T], \tag{19}$$

и имеют место соотношения

$$\left\|\frac{\partial^j u^\varepsilon}{\partial x^j} - \frac{\partial^j u}{\partial x^j}\right\|_{C(\overline{Q_T})} \le \varepsilon^{\frac{1}{2}} C,\ j = 0,1,2,$$

$$\left\|\frac{\partial^m u^\varepsilon}{\partial x^m} - \frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right\|_{L_2(\overline{Q_T})} + \left\|\frac{\partial^m v^\varepsilon}{\partial x^m} - \frac{\partial^m v}{\partial x^m}\right\|_{L_2(\overline{Q_T})} \le \varepsilon^{\frac{1}{2}} C,\ m = 0,1,\ldots,4. \tag{20}$$

Из первого уравнения системы (1), следует, что

$$g(t) = \frac{\varphi'(t) + a_{11}\varphi(t) + a_{12}v(t,x_0) - \mu_1 u_{xx}(t,x_0)}{f(t,x_0)}. \tag{21}$$

Задача 2.

Рассмотрим во полосе $\Pi_{[0,T]}$ систему уравнений

$$u_t^\varepsilon + a_{11}(t)u^\varepsilon + a_{12}(t)v^\varepsilon = \mu_1 u_{xx}^\varepsilon + f,$$
$$\varepsilon v_t^\varepsilon + a_{21}(t)u^\varepsilon + a_{22}(t)v^\varepsilon = \mu_2 v_{xx}^\varepsilon + g^\varepsilon f, \tag{22}$$

Пусть выполняется условие переопределения

$$v^\varepsilon(t,x_0) = \psi(t) \in C^2[0,T], \tag{23}$$

условие

$$F(t,x_0) \geq \delta > 0, \tag{24}$$

и при некотором $\beta > 0$ условия

$$\kappa > \frac{\mu_2 l^{\frac{1}{2}} M_2}{2\delta\beta},$$
$$1 > \frac{\beta l^{\frac{3}{2}} M_2}{2\delta}. \tag{25}$$

В (25) постоянная $M_2 = \max\limits_{\overline{Q_T}} \left| \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} F(t,x) \right|$.

Считаем выполненными условия согласования входных данных

$$v_0(x_0) = \psi(0), \tag{26}$$

$$\mu_2 v_{0xx}(x) - a_{21}(0)u_0(x) - a_{22}(0)v_0(x) + g(0)F(0,x) = 0, \tag{27}$$

$$\text{где } g(0) = \left[a_{21}(0)u_0(x_0) + a_{22}(0)\psi(0) - \mu_2 v_{0xx}(x_0)\right] \frac{1}{F(0,x_0)}. \tag{28}$$

Имеют место следующие утверждения :

Теорема 4. *При выполнении предположения 1 и условий* (24),(26),(7)-(9) *при любом фиксированном* $\varepsilon > 0$ *компоненты* $u^\varepsilon, v^\varepsilon$ *решения* $(u^\varepsilon, v^\varepsilon, g^\varepsilon)$ *задачи* (22),(2),(23) *являются периодическими функциями по переменной* x *и удовлетворяют условиям* (13). *Здесь*

$$g^\varepsilon(t) = \left\{\psi'(t) + a_{21}(t)u^\varepsilon(t,x_0) + a_{22}(t)\psi(t) - \mu_1 v^\varepsilon_{xx}(t,x_0)\right\} \frac{1}{F(t,x_0)}. \tag{29}$$

Теорема 5. *Пусть выполняются условия* (24)-(28),(7)-(9). *Тогда решение* (u,v,g) *системы*

$$\begin{aligned} u_t(t,x) + a_{11}(t)u_1(t,x) + a_{12}(t)v(t,x) &= \mu_1 u_{xx}(t,x) + f(t,x), \\ a_{21}(t)u_1(t,x) + a_{22}v(t,x) &= \mu_2 v_{xx}(t,x) + g(t)F(t,x), \end{aligned} \tag{30}$$

удовлетворяющее соотношениям (16),(17),(23), *существует и единственно в классе* $K_0^{p-1,1,0}(\overline{Q_T})$, *и при* $\varepsilon \to 0$ *выполняются соотношения* (19),(20).

Теорема 6. *Пусть выполняются условия теоремы 3. Тогда решение* (u,v,g) *задачи* (15),(2),(3) *существует и единственно в классе* $K_0^{p-1,1,0}(\Pi_{[0,T]})$ *и при* $\varepsilon \to 0$

$$\frac{\partial^j u^\varepsilon}{\partial x^j} \to \frac{\partial^j u}{\partial x^j},\ \frac{\partial^j v^\varepsilon}{\partial x^j} \to \frac{\partial^j v}{\partial x^j} \text{ равномерно в } \Pi_{[0,T]},$$
$$g^\varepsilon \to g \text{ в } C[0,T],\ j = 0,1,\dots,p-1, \tag{31}$$

$$\left| \frac{\partial^j}{\partial x^j} u^\varepsilon(t,x) - \frac{\partial^j}{\partial x^j} u(t,x) \right| \leq \sqrt{\varepsilon} C,\ (t,x) \in \Pi_{[0,T]},\ j = 0,1,2, \tag{32}$$

$$\left\| \frac{\partial^m u^\varepsilon}{\partial x^m} - \frac{\partial^m u}{\partial x^m} \right\|_{L_2(\overline{Q_T})} + \left\| \frac{\partial^m v^\varepsilon}{\partial x^m} - \frac{\partial^m v}{\partial x^m} \right\|_{L_2(\overline{Q_T})} \leq \sqrt{\varepsilon} C,\ m = 0,1,\dots,4. \tag{33}$$

где (u, v, g) *решение задачи* (15), (2), (3) *и* $(u^\varepsilon, v^\varepsilon, g^\varepsilon)$ — *решение задачи* (1), (2), (4).

Теорема 7. *Пусть выполняются условия теоремы 5. Тогда решение* (u, v, g) *задачи* (30), (2), (23) *существует и единственно в классе* $K_0^{p-1,1,0}(\Pi_{[0,T]})$ *и при* $\varepsilon \to 0$ *выполняются соотношения* (31)-(33), *где* (u, v, g) — *решение задачи* (30), (2), (23) *и* $(u^\varepsilon, v^\varepsilon, g^\varepsilon)$ — *решение задачи* (22), (2), (23).

Список литературы

[1] Н.Н. Яненко, Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, Новосибирск, Наука, 1967.

[2] Ю.Я. Белов, С.А. Кантор, Метод слабой аппроксимации, Красноярск, КрасГУ, 1999.

[3] Ю.Я. Белов, О задаче идентификации функции источника для одной полуэволюционной системы, Журнал Сибирского Федерального Университета. Математика и физика, 2010, 3(4), 487–499.

[4] А.П. Осколков, Об одной квазилинейной параболической системе с малым параметром, аппроксимирующей систему уравнений Навье-Стокса, Записки научных семинаров ЛОМИ АНСССР, 21(1971), 78–103.

[5] П.Е. Соболевский, В.В. Васильев, Об одной ε-аппроксимации уравнений Навье-Стокса, Численные методы механики сплошной среды, Новосибирск, 9(1978), № 5, 115–139.

[6] Ю.Я. Белов, Теоремы однозначной разрешимости и аппроксимации некоторых краевых задач для систем уравнений, описывающих течение океана, Сиб. матем. журн., 20(1979), № 6, 1206–1225.

[7] В.П. Кочергин, Теория и методы расчета океанических течений. – М.: Наука, 1978.

[8] С.Н. Антонцев, А.В. Кажихов, В.Н. Монахов, Краевые задачи механики неоднородных жидкостей, Новосибирск, 1983.

[9] Ж.Л. Лионс, Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, Москва, 1972.

[10] Р. Рихтмайер, Звук и теплопроводность, Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики, Новосибирск, Наука, 1966, 183–185.

[11] Yu.Ya. Belov, Inverse Problems for Partial Differential Equations, VSP, Utrecht.Boston.Koln. Tokyo, 2002.

[12] П.Ю. Вячеславова, Р.В. Сорокин, Задача идентификации коэффициентов при младших членах в системе составного типа, Журнал Сибирского Федерального Университета. Математика и физика, 2(2009), № 3, 288–297.

[13] Р.В. Сорокин, Т.Н. Шипина, О разрешимости одной обратной задачи для системы составного типа, Вычислительные технологии, 8(2003), № 3, 139–146.

[14] A.I. Prilepko, D.G. Orlovsky, I.A. Vasin, Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics, New York, Marcel Dekkar,Inc.,1999.