

Гидравлические прыжки на горизонтально-сдвиговом потоке идеальной жидкости в открытом канале переменного сечения

А. К. ХЕ

А. А. ЧЕСНОКОВ

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,

Новосибирский государственный университет

E-mail: chesnokov@hydro.nsc.ru

Для нелинейных уравнений, описывающих в приближении теории мелкой воды горизонтально-сдвиговые движения идеальной несжимаемой жидкости в открытом канале переменного сечения, предложены интегродифференциальные законы сохранения. Проанализированы вытекающие из них соотношения Гюгонио и установлено свойство определенности разрыва. Выполнена дискретизация исходных интегродифференциальных уравнений и получена гиперболическая система дифференциальных законов сохранения. Показано, что для течений со слабой потенциальной завихренностью осредненные уравнения сдвигового движения жидкости в канале сводятся к уравнениям неизэнтропической газовой динамики.

1. Математическая модель. Рассматриваются пространственные движения слоя идеальной несжимаемой жидкости глубины $h(t, x, y)$ со свободной границей $z = \eta(t, x, y)$ в открытом канале переменного сечения с неровным дном $z = Z(x)$ и криволинейными боковыми стенками $y = Y_1(x)$, $y = Y_2(x)$ в поле силы тяжести (рис. 1). Предполагается, что характерный масштаб по ширине канала и глубине слоя жидкости много меньше типичной длины волны, распространяющейся вдоль канала. В этом случае применима модель длинноволнового приближения [1, 2], в рамках которой уравнения движения жидкости и граничные условия (в безразмерных переменных) принимают вид

$$\begin{aligned} \rho(u_t + uu_x + vu_y + wu_z) + p_x &= 0, \\ p_y = 0, \quad p_z = -g\rho, \quad u_x + v_y + w_z &= 0; \\ \eta_t + u\eta_x + v\eta_y = w, \quad p = p_0 \quad (z = \eta); \\ w = uZ'(x) \quad (z = Z), \quad uY_i'(x) = v \quad (y = Y_i). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь x, y, z — декартовы координаты; t — время; p — давление; u, v и w — горизонтальные и вертикальная компоненты вектора скорости; p — давление, безразмерные постоянные ρ, g, p_0 — плотность жидкости, ускорение свободного падения и давление на свободной границе.

Далее будем рассматривать класс течений, в котором горизонтальные компоненты скорости u и v не зависят от вертикальной координаты z . В результате несложных преобразований уравнений (1) получим следующую модель [3, 4]

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vu_y + g(h + Z)_x &= 0, \quad h_y = 0, \\ h_t + (uh)_x + (vh)_y &= 0, \quad uY_i'(x) - v|_{y=Y_i} = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований 10-01-00338 и гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ НШ-4368.2010.1.

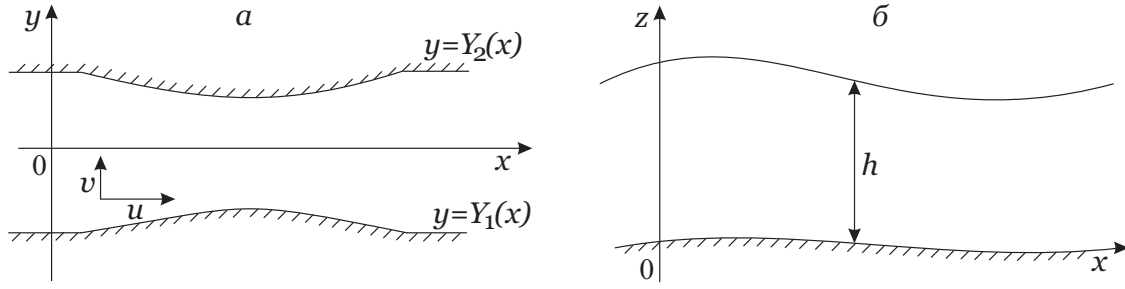


Рис. 1. Течение жидкости в открытом канале переменного сечения: a — сечение канала плоскостью $z = \text{const}$; b — сечение канала плоскостью $y = \text{const}$.

описывающую горизонтально-сдвиговые движения жидкости в протяженном открытом канале в приближении теории мелкой воды.

Следствием уравнений (2) являются балансовые соотношения для импульса

$$(uh)_t + (u^2h + gh^2/2)_x + (uvh)_y = -ghZ' \quad (3)$$

и энергии слоя жидкости

$$(u^2h + gh^2)_t + (u^3h + 2guh^2)_x + (u^2vh + 2gvh^2)_y = -2guhZ'. \quad (4)$$

В уравнениях (2) удобно перейти к полулагранжевым координатам с помощью замены переменной $y = \Phi(t, x, \lambda)$, где функция Φ решения задачи Коши [5]

$$\Phi_t + u(t, x, \Phi)\Phi_x = v(t, x, \Phi), \quad \Phi|_{t=0} = \lambda Y_2(x) + (1 - \lambda)Y_1(x).$$

Лагранжева переменная $\lambda \in [0, 1]$; значениям $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$ соответствуют боковые границы канала $y = Y_1(x)$ и $y = Y_2(x)$. В новых переменных для определения функций $u(t, x, \lambda)$ и $H(t, x, \lambda) = h\Phi_\lambda$ возникает система уравнений [3]

$$u_t + uu_x + g(h + Z)_x = 0, \quad H_t + (uH)_x = 0, \quad h = \frac{1}{Y} \int_0^1 H d\lambda, \quad (5)$$

где $Y(x) = Y_2(x) - Y_1(x) > 0$ — заданная ширина канала.

2. Осредненные уравнения. Газодинамическая аналогия. Для описания течений со слабым горизонтальным сдвигом скорости можно использовать осредненные дифференциальные уравнения. Определим среднюю по сечению канала скорость

$$u_c = \frac{1}{Y} \int_{Y_1}^{Y_2} u dy$$

и проинтегрируем по y от Y_1 до Y_2 третье уравнение системы (2), а также уравнения (3) и (4) с учетом граничных условий на стенках каналах. При этом возникает следующая

система уравнений

$$\begin{aligned} (hY)_t + (u_c hY)_x &= 0, \quad (u_c hY)_t + \left(h \int_{Y_1}^{Y_2} u^2 dy + \frac{gh^2 Y}{2} \right)_x = \frac{gh^2 Y'}{2} - ghY Z', \\ \left(h \int_{Y_1}^{Y_2} u^2 dy + gh^2 Y \right)_t + \left(h \int_{Y_1}^{Y_2} u^3 dy + 2gY u_c h^2 \right)_x &= -2gu_c hY Z'. \end{aligned} \quad (6)$$

Полагая, что профиль скорости близок к линейному

$$u(t, x, y) \approx (y - Y_1(x))h(t, x)\Omega(t, x) + u_c(t, x) - h(t, x)\Omega(t, x)Y(x)/2$$

вычислим интегралы в (6). В итоге получим систему газодинамического типа

$$\begin{aligned} (hY)_t + (u_c hY)_x &= 0, \\ (u_c hY)_t + \left(u_c^2 hY + \frac{\Omega^2 h^3 Y^3}{12} + \frac{gh^2 Y}{2} \right)_x &= \frac{gh^2 Y'}{2} - ghY Z', \\ \left(u_c^2 hY + \frac{\Omega^2 h^3 Y^3}{12} + gh^2 Y \right)_t + \left(u_c^3 hY + \frac{u_c \Omega^2 h^3 Y^3}{4} + 2gu_c h^2 Y \right)_x &= -2gu_c hY Z'. \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнения (7) при $Y = \text{const}$, $Z = \text{const}$ совпадают с полученной В. М. Тешуковым газодинамической моделью для слабозавихренных плоскопараллельных течений со свободной границей [6].

В данном случае роль плотности и энтропии “газа” играют величины $\bar{\rho} = hY$ и $s = \ln(\Omega^2)$, а уравнения состояния “газа” для давления и внутренней энергии имеют вид

$$p(\bar{\rho}, s) = \frac{g\bar{\rho}^2}{2Y} + \frac{\bar{\rho}^3 \exp(s)}{12}, \quad e(\bar{\rho}, s) = \frac{g\bar{\rho}}{2Y} + \frac{\bar{\rho}^2 \exp(s)}{24}.$$

Нетрудно видеть, что при таком выборе термодинамических параметров “газа” справедливо основное термодинамическое тождество $Tds = de + pd(1/\bar{\rho})$, где $T = e_s$ — температура “газа”. Течения жидкости с постоянной средней потенциальной завихренностью $\Omega = \text{const}$ соответствуют изэнтропическим движениям газа. В случае $\Omega \rightarrow 0$ (или $s \rightarrow -\infty$) система (7) сводится к классическим уравнениям теории мелкой воды.

Следствием системы (7) является уравнение

$$(\Omega hY)_t + (u_c \Omega hY)_x = 0. \quad (8)$$

Учитывая поведение энтропии на ударной волне, для моделирования разрывных решений в рамках рассматриваемого приближения будем использовать первые два уравнения системы (7) и уравнение (8). Соответствующие соотношения на сильном разрыве, распространяющемся со скоростью D , имеют вид

$$\begin{aligned} [(u_c - D)h] &= 0, \quad [(u_c - D)h\Omega] = 0, \\ \left[(u_c - D)^2 h + \frac{\Omega^2 h^3 Y^2}{12} + \frac{gh^2}{2} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Из (9) вытекает, что разрывы подразделяются на “ударные волны” $u_c \neq D$ и “контактные” разрывы $u_c = D$. При этом в случае $u_c \neq D$ на разрыве сохраняется потенциальная завихренность Ω .

3. Законы сохранения и анализ соотношений на сильном разрыве. Для описания гидравлических прыжков в рамках интегродифференциальной модели (5) необходимо сформулировать корректную систему законов сохранения. Используя аналогию с длинноволновой моделью вертикально-сдвиговых движений жидкости [7, 8], разрывные решения будем определять на основе следующих балансовых соотношений

$$\begin{aligned} (u - u_0)_t + \left(\frac{u^2 - u_0^2}{2} \right)_x &= 0, \quad H_t + (uH)_x = 0, \quad (u_0(t, x) = u(t, x, 0)) \\ \left(\int_0^1 uH d\lambda \right)_t + \left(\int_0^1 u^2 H d\lambda + \frac{gYh^2}{2} \right)_x &= \frac{gY'h^2}{2} - ghYZ'. \end{aligned} \quad (10)$$

Нетрудно показать, что системы уравнений (5) и (10) эквивалентны на гладких решениях. Первое уравнение (10) выражает закон сохранения относительного локального импульса, второе уравнение соответствует локальному закону сохранения массы, третье уравнение является балансовым соотношением для полного импульса слоя. Гладкие решения системы (5) или (10) также удовлетворяют закону сохранения полной энергии слоя жидкости

$$\left(\int_0^1 u^2 H d\lambda + gYh^2 \right)_t + \left(\int_0^1 u^3 H d\lambda + 2g(h + Z) \int_0^1 uH d\lambda \right)_x = 0. \quad (11)$$

Вытекающие из (10) соотношения на сильном разрыве имеют вид

$$\begin{aligned} [(u - D)^2 - (u_0 - D)^2] &= 0, \quad [(u - D)H] = 0, \\ \left[\int_0^1 (u - D)^2 H d\lambda + \frac{g}{2Y} \left(\int_0^1 H d\lambda \right)^2 \right] &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Следствием первых двух соотношений (12) является сохранение потенциальной завихренности на разрыве: $[u_\lambda/H] = [\Omega] = 0$. В работах [2, 7] для модели вертикально-сдвиговых движений жидкости выполнен анализ соотношений на разрыве и сформулированы условия определенности разрыва. Этот анализ с небольшими изменениями переносится на модель (10), поэтому кратко отметим ключевые моменты.

Пусть известны параметры потока $u = u_1$, $H = H_1$ перед гидравлическим прыжком и скорость D гидравлического прыжка (полагаем, что $u_1 - D > 0$, $u_{1\lambda} > 0$, $H_1 > 0$). Определим параметры течения u_2 , H_2 за скачком. В силу первого уравнения (12) величина $K = -[(u - D)^2]$ не зависит от переменной λ . Поэтому для u_2 и H_2 имеем следующие выражения

$$u_2 = D + \sqrt{(u_1 - D)^2 - K}, \quad H_2 = \frac{(u_1 - D)H_1}{\sqrt{(u_1 - D)^2 - K}} \quad (K \leq K_* = \min_\lambda (u_1 - D)^2).$$

Последнее уравнение (12) приводится к виду

$$F(K) - F(0) = 0, \quad (13)$$

и служит для определения величины K , где

$$F(K) = \int_0^1 (u_1 - D)H_1 \sqrt{(u_1 - D)^2 - K} d\lambda + \frac{g}{2Y} \left(\int_0^1 \frac{(u_1 - D)H_1 d\lambda}{\sqrt{(u_1 - D)^2 - K}} \right)^2.$$

При этом интерес представляют те решения уравнения (13), которые удовлетворяют условию убывания энергии при переходе через фронт разрыва, что эквивалентно условию сверхкритичности потока перед фронтом разрыва и докритичности за фронтом. Для проверки этого условия необходимо использовать неравенство, вытекающее из закона сохранения (11). Как показано в [2], решение уравнения (13) и условие устойчивости разрыва не всегда являются совместными. В случае отсутствия корня уравнения (13), для которого энергия слоя жидкости на разрыве убывает, возможно построение решения более сложной структуры, включающее за разрывом рециркуляционную зону возвратного движения жидкости.

4. Сведение к системе дифференциальных законов сохранения. Разобьем отрезок $[0, 1]$ на M интервалов, $(0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_{M-1} < \lambda_M = 1)$ и введем обозначения

$$y_i = \Phi(t, x, \lambda_i), \quad b_i = y_i - y_{i-1}, \quad u_i = u(t, x, \lambda_i),$$

$$\Omega_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{b_i h}, \quad u_{ci} = \frac{u_i + u_{i-1}}{2}.$$

Интегрируя по λ уравнения системы (10), имеем

$$(u_i - u_{i-1})_t + \left(\frac{u_i^2 - u_{i-1}^2}{2} \right)_x = 0, \quad \left(\int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} H d\lambda \right)_t + \left(\int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} uH d\lambda \right)_x = 0,$$

$$\left(\sum_{i=1}^M \int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} uH d\lambda \right)_t + \left(\sum_{i=1}^M \int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} u^2 H d\lambda + \frac{gYh^2}{2} \right)_x = \frac{gY'h^2}{2} - ghYZ'.$$

Принимая во внимание равенство $H d\lambda = h dy$ и используя кусочно-линейную аппроксимацию скорости u по ширине канала

$$u = (y - y_{i-1})h\Omega_i + u_{i-1}, \quad y \in [y_{i-1}, y_i]$$

вычислим интегралы в предыдущих формулах с точностью $O(\sigma^2)$, где $\sigma = \max\{b_i\}$. В результате для определения $2M + 1$ искомых величин

$$p_i = hb_i, \quad q_i = hb_i\Omega_i, \quad m = h \sum_{i=1}^M u_{ci}b_i$$

получаем систему одномерных законов сохранения, состоящую из $2M + 1$ уравнений:

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u_{ci}p_i) = 0, \quad \frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u_{ci}q_i) = 0,$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{i=1}^M \left(u_{ci}^2 p_i + \frac{q_i^2 p_i}{12} \right) + \frac{gYh^2}{2} \right) = \frac{gY'h^2}{2} - ghYZ'. \quad (14)$$

Здесь

$$h = \frac{1}{Y} \sum_{i=1}^M p_i, \quad u_{ci} = u_0 - \frac{q_i}{2} + \sum_{k=1}^i q_k, \quad u_0 = \left(\sum_{i=1}^M p_i \right)^{-1} \left(m - \sum_{i=1}^M \left(\frac{q_i}{2} - \sum_{k=1}^i q_k \right) p_i \right).$$

Центральные схемы сквозного счета [9], не требующие точного или приближенного решения задачи Римана, наиболее хорошо подходят для численного решения уравнений вида (14). В случае $M = 1$ система (14) сводится к уравнениям (7), (8).

Список литературы

- [1] Стокер Дж. Волны на воде. Математическая теория и приложения. М.: ИЛ, 1959.
- [2] Ляпидевский В. Ю., Тешуков В. М. Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
- [3] Чесноков А. А., Ляпидевский В. Ю. Волновые движения идеальной жидкости в узком открытом канале // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 2. С. 61–71.
- [4] Ляпидевский В. Ю., Чесноков А. А. Докритические и сверхкритические горизонтально-сдвиговые течения в открытом канале переменного сечения // Изв. РАН. МЖГ. 2009. № 6. С. 123–138.
- [5] Захаров В. Е. Уравнения Бенни и квазиклассическое приближение в методе обратной задачи // Функцион. анализ и его прил. 1980. Т. 14, вып. 2. С. 15–24.
- [6] Тешуков В. М. Газодинамическая аналогия для вихревых течений со свободной границей // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 3. С. 8–15.
- [7] Тешуков В. М. Гидравлический прыжок на сдвиговом потоке идеальной несжимаемой жидкости // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 1. С. 11–20.
- [8] Teshukov V., Russo G., Chesnokov A. Analytical and numerical solutions of the shallow water equations for 2-D rotational flows // Math. Models Methods Appl. Sci. 2004. V. 14. P. 1451–1479.
- [9] Nessyahu H., Tadmor E. Non-oscillatory central differencing schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comp. Phys. 1990. V. 87. P. 408–463.