О РОЛИ СОБОЛЕВСКОГО ТОЖДЕСТВА В ОБРАТНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ

Титаренко С.А.

Санкт-Петербургская Торгово-Промышленная Палата, Санкт-Петербург

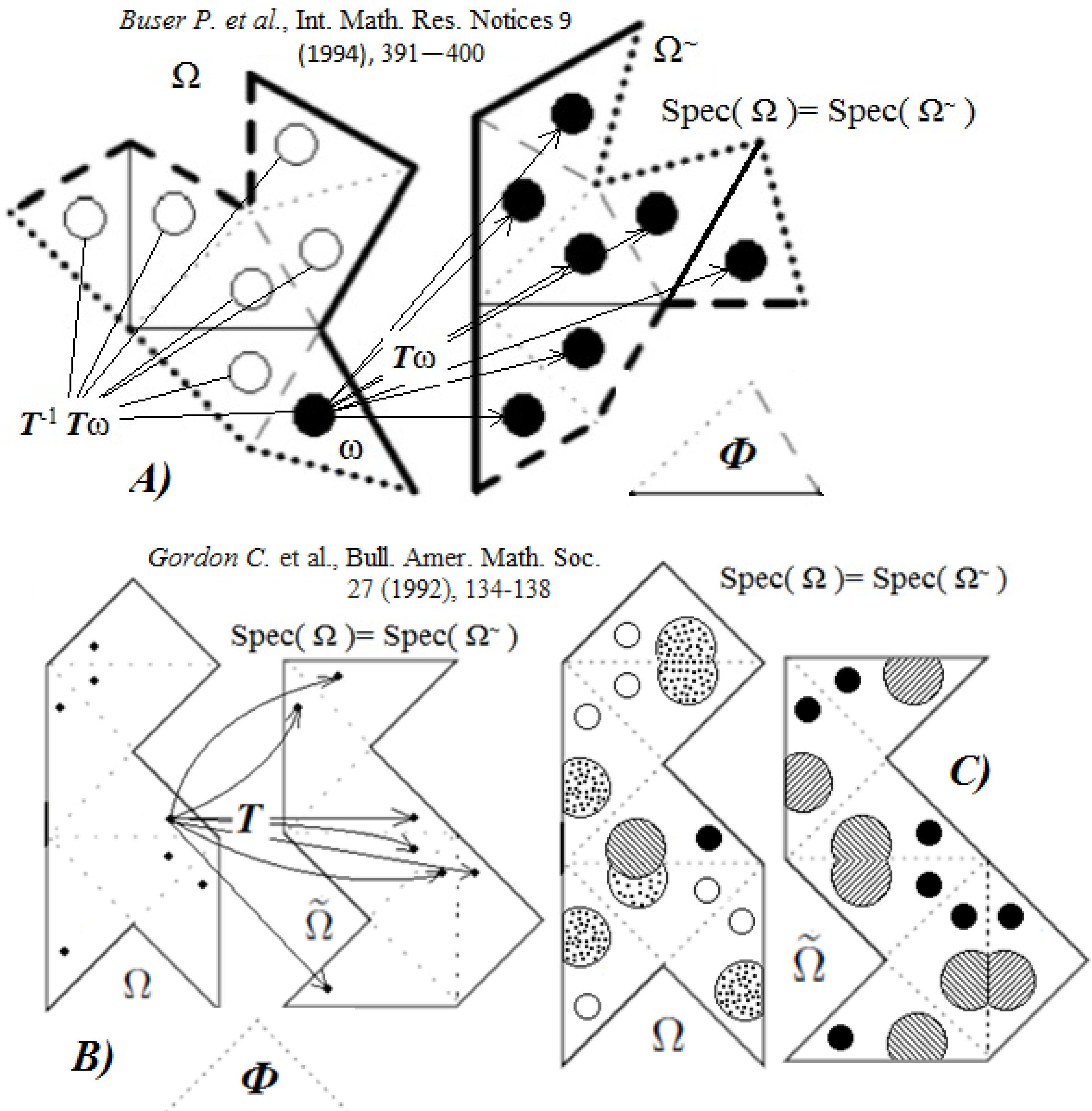
titarenko.sa@gmail.com

Для спектральной задачи $-\Delta W_n = E_n W_n$, $W_n \mid_{\partial\Omega}= 0$ рассматривается обратная постановка: найти неизвестную область Ω по ее заданному спектру $Spec(\Omega) = \{0 < E_1 < E_2 \leq \ldots\}$. Распространено мнение, что эта задача, известная как задача Каца о барабане, не имеет решения: за последние 30 лет построено немало неизометричных, но изоспектральных областей (их спектры совпадают как счетные множества) – см. на рис.А-С пары охватывающих многоугольников (взяты из указанных статей, прочие построения наши). Разработанный нами общий метод изоспектрии дает необходимое условие неединственности: если области изоспектральны и неизометричны, то они m-клеточны и связаны многозначной изометрией ($\mathbf{T}$ на рис.В). Клетка – это подобласть $\Phi \subset \Omega : Spec(\Phi) \subset Spec(\Omega)$. Собственные функции клетки есть сужения некоторых $W_{n_k} \mid_\Phi$ для клеточной области Ω, которая строится отражениями клетки Φ относительно отрезков на границе $\partial\Phi$ (например, 7-клеточные многоугольники на рис.А-В).

Основа метода изоспектрии – формулировка спектральной задачи в соболевском пространстве $H(\Omega)(=\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$ как соболевского вариационного тождества:

$(W_n, f)_{H(\Omega)} = (1 + E_n)(W_n, f)_{L_2(\Omega)},\ \forall f \in H(\Omega),\ W_n \in H(\Omega) \subset L_2(\Omega)$,

где скалярное произведение $(g, f)_{H(\Omega)} = (g, f)_{L_2(\Omega)} + \int\limits_\Omega (\nabla g, \nabla f) d\Omega$. Подстановка ортонормированного в L_2 базиса $\{W_n\}_{n=1}^\infty$ дает его ортогональность и в H с нормировкой $(W_n, W_n)_{H(\Omega)} = 1 + E_n$. Тогда для изоспектральных областей Ω и $\widetilde{\Omega}$ их лебегов изоморфизм T: $\widetilde{W_n} = TW_n$ является также изоморфизмом соболевских пространств, сохраняя ортонормированные соболевские базисы: $\widetilde{W_n}/\sqrt{1 + \widetilde{E_n}} = TW_n/\sqrt{1 + E_n} \Rightarrow \sqrt{1 + \widetilde{E_n}} = \sqrt{1 + E_n} \Rightarrow \widetilde{E_n} = E_n, \forall n$. Изучение дважды унитарного оператора T и индуцированного им спектрального отражения $\mathbf{T}$ дает условие неединственности и позволяет доказать, что множества $\omega : Spec(\omega) = Spec(\mathbf{T}\omega)$ образуют алгебру – изоспектральность сохраняется для пересечений, дополнений и объединений. Например, на рис.А и С изоспектральны как несвязные подобласти из 7 черных кругов в $\widetilde{\Omega}$ и 1 черного и 6 белых кругов в Ω, так и их дополнения – связные многоугольники с 7 дырками. Эта алгебра множеств оказывается изоморфной полной булевой алгебре, позволяя трактовать множества ω как представления высказываний, а $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}\omega$ как их двойное отрицание и обобщая закон двойного отрицания $\omega \subseteq \mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}\omega$, где равенство соответствует случаю исключенного третьего. Обобщение не случайно: наша спектральная задача может трактоваться как квантовый биллиард (W_n=волновые функции, E_n=энергетические уровни локализованной частицы), а в основе квантовой теории лежит диалектический корпускулярно-волновой дуализм.


Buser P. et al., Int. Math. Res. Notices 9 (1994), 391—400
Ω
Ω~
Spec(Ω)= Spec(Ω~)
Tω
T-1 Tω
ω
A)
Φ
Gordon C. et al., Bull. Amer. Math. Soc. 27 (1992), 134-138
Spec(Ω)= Spec(Ω~)
Spec(Ω)= Spec(Ω~)
T
Ω̃
Ω
B)
Φ
C)
Ω̃
Ω