

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ИНСТИТУТ ГИДРОДИНАМИКИ ИМ. М. А. ЛАВРЕНТЬЕВА СО РАН
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР В АКАДЕМГОРОДКЕ
ФОНД «ЦЕНТР ПОДДЕРЖКИ НАУКИ И КУЛЬТУРЫ»
РОССИЙСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ КОМИТЕТ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

ВСЕРОССИЙСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ, ПОСВЯЩЕННАЯ
105-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ АКАДЕМИКА РАН
Л. В. ОВСЯННИКОВА

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

13 – 17 мая 2024 г.
Новосибирск, Россия

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Новосибирск
2024

УДК 51:(531+532.5+533)
ББК 22.1:22.25
В85

Всероссийская конференция, посвященная 105-летию со дня рождения академика РАН Л. В. Овсянникова «**Математические проблемы механики сплошных сред**»: тезисы докладов, 13 – 17 мая 2024 г., г. Новосибирск, Россия / Progr. ком. П. И. Плотников (предс.) [и др.]; Сибирское отделение РАН, Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Математический центр в Академгородке [и др.]. — Новосибирск: СО РАН, 2024. — 197 с.

ISBN 978-5-6049901-5-5

В 2024 году исполняется 105 лет со дня рождения Льва Васильевича Овсянникова (22.04.1919 – 23.05.2014), выдающегося российского ученого в области механики и математики. Результаты Л. В. Овсянникова в газовой динамике, теории движения жидкости со свободными границами, в области математического обоснования моделей механики сплошной среды стали классическими и послужили началом новых научных направлений. Разработанные им методы группового анализа дифференциальных уравнений широко применяются в различных областях математики, механики и теоретической физики. Созданная Л. В. Овсянниковым научная школа широко известна в мировой науке.

Научная конференция посвящена обсуждению актуальных проблем прикладной математики, механики и методов математического моделирования, а также их приложений для описания и прогнозирования природных и технических процессов.

Основные научные направления конференции:

- 1) аналитические методы в механике сплошной среды;
- 2) математическая теория нелинейных волновых процессов в жидкостях и газах;
- 3) модели многофазных и стратифицированных жидкостей, смесей, сложных сред;
- 4) нелинейные проблемы механики деформируемого твердого тела.

УДК 51:(531+532.5+533)
ББК 22.1:22.25

Издается в авторской редакции

ISBN 978-5-6049901-5-5

© ИГиЛ СО РАН, 2024

Программный комитет

чл.-корр. РАН П. И. Плотников — председатель (Новосибирск)
д.ф.-м.н. А. П. Чупахин — председатель (Новосибирск)
д.ф.-м.н. Е. М. Рудой — заместитель председателя (Новосибирск)
к.ф.-м.н. Д. В. Паршин — заместитель председателя (Новосибирск)
к.ф.-м.н. Г. С. Валова — секретарь (Новосибирск)
Д. В. Тихвинский — секретарь (Новосибирск)
академик РАН С. В. Алексеенко (Новосибирск)
академик РАН Б. Д. Аннин (Новосибирск)
академик РАН И. Г. Горячева (Москва)
академик РАН М. А. Гузев (Владивосток)
академик РАН Д. М. Климов (Москва)
академик РАН В. В. Козлов (Москва)
академик РАН Е. А. Кузнецов (Москва)
академик РАН А. Г. Куликовский (Москва)
академик РАН В. А. Левин (Москва)
академик РАН В. П. Матвеев (Пермь)
академик РАН Д. М. Маркович (Новосибирск)
академик РАН Н. Ф. Морозов (Санкт-Петербург)
академик РАН Р. И. Нигматулин (Москва)
академик РАН А. К. Ребров (Новосибирск)
академик РАН В. Г. Романов (Новосибирск)
академик РАН С. Т. Суржиков (Москва)
академик РАН И. А. Тайманов (Новосибирск)
академик РАН В. М. Фомин (Новосибирск)
академик РАН М. П. Федорук (Новосибирск)
академик РАН Ф. Л. Черноушко (Москва)
чл.-корр. РАН А. В. Бойко (Новосибирск)
чл.-корр. РАН Ю. В. Василевский (Москва)
чл.-корр. РАН А. М. Гайфуллин (Жуковский)
чл.-корр. РАН С. И. Кабанихин (Новосибирск)
чл.-корр. РАН Е. В. Карпов (Новосибирск)
чл.-корр. РАН А. М. Кривцов (Санкт-Петербург)
чл.-корр. РАН Г. Г. Лазарева (Москва)
чл.-корр. РАН А. Н. Павленко (Новосибирск)
чл.-корр. РАН Ю. Н. Павловский (Москва)
чл.-корр. РАН В. В. Пухначев (Новосибирск)
чл.-корр. РАН В. М. Садовский (Красноярск)
чл.-корр. РАН Ю. Л. Трахинин (Новосибирск)
чл.-корр. РАН А. И. Шафаревич (Москва)
чл.-корр. РАН С. Е. Якуш (Москва)
д.ф.-м.н. Г. В. Алексеев (Владивосток)
д.ф.-м.н. В. К. Андреев (Красноярск)
д.ф.-м.н. С. Н. Антонцев (Новосибирск)
д.ф.-м.н. А. А. Васильев (Новосибирск)
профессор С. Л. Гаврилюк (Марсель, Франция)
д.ф.-м.н. С. В. Головин (Новосибирск)
д.ф.-м.н. А. А. Давыдов (Москва)
д.ф.-м.н. Е. В. Ерманюк (Новосибирск)
д.ф.-м.н. О. В. Капцов (Красноярск)
д.ф.-м.н. В. К. Кедринский (Новосибирск)

д.ф.-м.н. А. Г. Князева (Томск)
д.ф.-м.н. С. Н. Коробейников (Новосибирск)
д.ф.-м.н. А. Н. Крайко (Москва)
д.ф.-м.н. В. Ю. Ляпидевский (Новосибирск)
д.ф.-м.н. Н. И. Макаренко (Новосибирск)
д.ф.-м.н. И. В. Марчук (Новосибирск)
профессор С. В. Мелешко (Након Ратчасима, Таиланд)
д.ф.-м.н. А. Н. Осипцов (Москва)
д.ф.-м.н. А. Л. Скубачевский (Москва)
д.ф.-м.н. С. В. Хабиров (Уфа)
д.ф.-м.н. А. М. Хлуднев (Новосибирск)
д.ф.-м.н. А. А. Чесноков (Новосибирск)
д.ф.-м.н. В. В. Шелухин (Новосибирск)

Конференция проводится при поддержке:



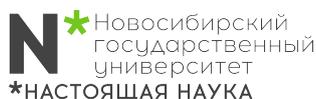
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН



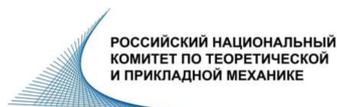
Сибирское отделение Российской академии наук



Математический центр в Академгородке
(соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2022-282)



Новосибирский государственный университет



Российский Национальный комитет по теоретической и прикладной механике

Содержание

АБРАШКИН А. А. <i>Вихревые волны на воде в лагранжевых переменных: точные решения</i>	15
АКСЕНОВ А. В., ПОЛЯНИН А. Д. <i>Симметрии и точные решения одного сильно нелинейного уравнения магнитной гидродинамики</i>	16
АЛАБУЖЕВ А. А. <i>Влияние свойств поверхности на гистерезис газового пузырька</i>	17
АЛЕКСЕЕВ Г. В., СОБОЛЕВА О., В. <i>Анализ краевых задач для обобщенной модели Буссинеска переноса тепла и масс</i>	17
АНДРЕЕВ А. И., СЕМЁНОВ А. Е., СЛАВИН Б. М., ЧАНЧИКОВ В. А. <i>Динамика прецессии волчка Томпсона</i>	18
АНДРЕЕВ В. К. <i>Групповые свойства универсального уравнения одномерных движений газа</i>	20
АННИН Б. Д., СЕНАШОВ С. И. <i>Групповые свойства уравнений с нелокальными коэффициентами</i>	20
АФАНАСЬЕВА Е. А., ЗОТЕЕВ В. Е. <i>Метод построения неполной обратимости деформации ползучести в пределах первых двух стадий</i>	21
БАНИЦКОВА И. А. <i>Кручение стержня кольцевого сечения в условиях ортотропной ползучести</i>	22
БЕКЕЖАНОВА В. Б., ГИЛЁВ Н. И., ШЕФЕР И. А. <i>Пространственная неустойчивость двухслойного течения в слабом гравитационном поле</i>	23
БЕРДНИКОВ В. С., ВИНОКУРОВ В. А., ВИНОКУРОВ В. В., КИСЛИЦЫН С. А. <i>Влияние режимов сложного сопряженного теплообмена на рост монокристаллов в методе Чохральского</i>	24
БОГДАНОВА А. П., КАМЕНСКИХ А. А., НОСОВ Ю. О. <i>Исследование поведения полимерного материала под действием вертикальных нагрузок</i>	26
БОГДАНОВА А. П., КАМЕНСКИХ А. А., НОСОВ Ю. О. <i>Исследование применения математических моделей для описания полимеров и пастообразных смазочных материалов</i>	27
БОЙКО А. В., БОРОДУЛИН В. И., ИВАНОВ А. В., КИРИЛОВСКИЙ С. В., МИЩЕНКО Д. А., ПОПЛАВСКАЯ Т. В. <i>Управление переходом к турбулентности в пограничном слое стреловидного крыла с помощью рельефа поверхности</i>	28
БОЧАРОВ Г. А., ГРЕБЕННИКОВ Д. С., САВИНКОВ Р. С. <i>Математическое моделирование лимфатической системы человека и животных</i>	29
БОЯРСКИХ К. А., ХИЩЕНКО К. В. <i>Простые уравнения состояния жидкого свинца при высоких давлениях и температурах</i>	30
БУГАЙ Ю. В., ЧЕРЕВКО А. А. <i>Оценка гемодинамических параметров различными методами машинного обучения</i>	31
БУГОЕЦ И. А., СЕМИСАЛОВ Б. В. <i>Анализ спектра решения уравнения Бюргера при наличии особой точки</i>	32
БУЛАТОВ В. В. <i>Волновая динамика стратифицированных сред со сдвиговыми течениями: точные решения, асимптотики, приложения</i>	33

ВАЛОВА Г. С., ЧЕРЕВКО А. А., БОГОМЯКОВА О. Б., ТУЛУПОВ А. А., АКУЛОВ А. Е. <i>Зависимость от параметров решений задачи многокомпонентной поропругости в приложении к моделированию гидроцефалии головного мозга</i>	35
ВАСИЛЬЕВ А. А., БОРИСКИН А. А. <i>Распад произвольного разрыва в реагирующих смесях</i>	36
ВЕДЕНЕЕВ В. В., ПОДОПРОСВЕТОВА А. Б. <i>Поведение спектра собственных частот протяжённых одномерных систем</i>	37
ВЕРЕМЕЙЧИК А. И., МИЩИРУК О. М., НЕРОДА М. В., ХОЛОДАРЬ Б. Г. <i>Влияние лазерного воздействия на механические свойства стали 40x13</i>	38
ГАВРИЛОВ А. А. <i>Модель течений неньютоновских жидкостей с твердыми частицами</i>	39
ГАЙФУЛЛИН А. М. <i>Новые результаты теории вязких струй несжимаемой жидкости</i>	40
ГАЙФУТДИНОВ Р. А., КУЯНОВА Ю. О., ПАРШИН Д. В., <i>Гемодинамика бифуркаций: эксперимент и моделирование</i>	40
ГАРЕЕВ Л. Р., ЗАЙКО Ю. С., ЭКСТЕР Н. М. <i>Локальная абсолютная неустойчивость затопленной струи</i>	42
ГЕОРГИЕВСКИЙ Д. В. <i>Моделирование “ортогональных эффектов” в экспериментальной МДТТ</i>	43
ГЛЕБОВ В. Е. <i>Изменение геометрической формы круговых сквозных концентраторов напряжений в пластинах после поверхностного упрочнения</i>	44
ГЛУЗДОВ Д. С., ГАТАПОВА Е. Я. <i>Граничные условия в микроканале для уменьшения перепада давления</i>	45
ГОЛДОВИН Д. С. <i>Гамильтонова динамика сверхактивных броуновских частиц в двух- и трехмерных потенциалах</i>	46
ГОЛИКОВ А. Е., МАКАРЕНКО Н. И. <i>Нестационарное движение цилиндра под поверхностью глубокой жидкости</i>	47
ГОЛУБ Е. С., БОЙКО А. В., ЧУПАХИН А. П. <i>Численное моделирование устойчивости течений в плоских каналах с податливыми стенками</i>	48
ГОЛЫХ Р. Н., БАРСУКОВ А. Р. <i>Моделирование влияния ультразвуковых колебаний на межфазную поверхность в длительно существующем газовом пузырьке в жидкости</i>	49
ГОНЧАРОВА О. Н. <i>Принципы классификации трёхмерных течений с испарением, изучаемых на основе точного решения</i>	50
ГОРЯЧЕВА И. Г. <i>Моделирование контактного взаимодействия деформируемых тел с учетом их макро- и микрогеометрии</i>	51
ГРЕБЕНЕВ В. Н., ГРИШКОВ А. Н. <i>Обобщенный принцип Бренье и проблема замыкания иерархии Ландгрена-Монина-Новикова для поля вихря</i>	52
ГРИГОРЬЕВ Ю. Н., КАПЦОВ Е. И., МЕЛЕШКО С. В. <i>Законы сохранения и автомодельные решения 1+1 системы уравнений колебательно возбужденного химически реагирующего газа</i>	53

ГУБАЙДУЛЛИН Д. А. Особенности волновой динамики и акустики многофазных, многокомпонентных сред	53
ГУБАЙДУЛЛИН И. М., ЯЗОВЦЕВА О. С. Моделирование слоя катализатора при выжиге многокомпонентных коксовых отложений с многостадийной кинетикой	54
ДАВЫДОВ А. А. Инварианты нормальных форм линейных уравнений второго порядка с частными производными на плоскости	56
ДЕНИСОВА И. В. Фигуры равновесия вращающейся капиллярной двухфазной жидкости	57
ДОБРОХОТОВ С. Ю. Длинные нелинейные волны, захваченные берегами, и бильярды с полужесткими стенками	58
ДУДИН Д. С., КЕЛЛЕР И. Э. Влияние напряжений на скорость взаимной диффузии в корродирующей среде	59
ЕРМАНЮК Е. В. Аттракторы внутренних и инерционных волн: волновая турбулентность в замкнутых областях	60
ЕРМИШИНА В. Е., ЧЕСНОКОВ А. А. Уединенные волны в сдвиговом течении двухслойной жидкости	61
ЗВЯГИН А. В. Начально-краевая задача, описывающая движение растворов полимеров с дробной производной в реологическом соотношении	62
ЗВЯГИН А. В., КОСТЕНКО Е. И. Исследование разрешимости одной модели нелинейно-вязкой жидкости с температурой	63
ЗЕЗЮЛИН И. В., ЧЕРНЫЙ С. Г. Трехмерная модель процесса печного производства технического углерода из углеводородного сырья	64
ИЛЬГАМОВ М. А. Л. В. Овсянников о всплытии пузыря. всплытие подводного трубопровода	65
ИЛЬГАМОВ М. А., ШАКИРЬЯНОВ М. М., ЮЛМУХАМЕТОВ А. А., АХМЕДЬЯНОВ А. В. Подъем подводного газопровода сосредоточенной силой	66
ИЛЬИЧЕВ А. Т., САВИН А. С., ШАШКОВ А. Ю. Траектории жидких частиц в поле 1:1 резонансных поверхностных волновых структур в жидкости подо льдом	67
КАДЫЙРОВ А. И. Аналитический метод решения задач о течении растворов и расплавов полимеров в каналах	68
КАЗАКОВ А. Л., СПЕВАК Л. Ф. Точные решения с нулевым фронтом для нелинейной параболической модели механики сплошных сред	69
КАЗАНЦЕВ П. Н., СМОРОДИН Б. Л. Возникновение термомагнитной конвекции стратифицированной магнитной жидкости	70
КАЙГОРОДЦЕВА А. А., ШУТОВ А. В. Моделирование накопления поврежденности жаропрочного сплава IN738LC в комбинированном режиме пластичность/ползучесть	71
КАМЕНСКИХ А. А. Анализ рабочих характеристик оптического волокна типа Panda с учетом защитного полимерного покрытия	72
КАПЦОВ О. В. Точные решения стационарных уравнений Эйлера	73
КАРАБУТ Е. А., ЖУРАВЛЕВА Е. Н. Всплывание двумерной полости под действием силы тяжести	74

КАРРА Ж.-Б., ГАВРИЛОВ Н. В., ЧЕРДАНЦЕВ А. В., ШМАКОВА Н. Д., ЕР- МАНЮК Е. В. Экспериментальное исследование влияния геометрии и скорости падения тела на захват воздуха при соударении с жидкостью	74
КАСИМОВ А. Р. Динамика газовой детонации в периодически неоднородной среде	75
КИРИЛЛОВ О. Е. Движущиеся локальные вихреобразования в несжимае- мой жидкости в цилиндрической трубке кругового сечения	76
КИСЛИЦЫН С. А., БЕРДНИКОВ В. С., ГРИШКОВ В. А., МИТИН К. А., МИ- ХАЙЛОВ А. В., ЮРОВСКИХ Е. А. Влияние тепловой гравитационно- капиллярной конвекции на поля температуры в тонких стенках	77
КЛИМЕНКО Л. С., МАРЫШЕВ Б. С. О концентрационной конвекции смеси в наклонном слое пористой среды с учетом закупорки	78
КЛЮЧАНЦЕВ В. С., ШУТОВ А. В. Нелокальный подход интегрального ти- па к накоплению повреждений в смешанном режиме нагружения	79
КНЯЗЕВА А. Г. Неравновесная термодинамика при построении модели син- теза композитов	80
КОВЫРКИНА О. А., ОСТАПЕНКО В. В. О точности разностных схем сквоз- ного счета	81
КОРОБЕЙНИКОВ С. Н. Улучшенные модели гипотупругости, основанные на использовании скоростей Олдройда тензора напряжений Кирхгофа	82
КОНДРАТЬЕВ С. А., МОШКИН Н. П. Динамика комплекса “частица-пузырёк” в вязкой жидкости в рамках лагранжеева формализма	83
КОЧАРИНА А. Р., ЧИРКОВ Д. В. Схема Годунова для численного решения уравнений движения несжимаемой жидкости	84
КРАЙКО А. Н. Расширение Вселенной при разлёте в пустоту горячей на- чальной сингулярности (HSS)	85
КРАСИЛЬНИКОВА А. А. Дробные аналоги линейных математических мо- делей вязкоупругого поведения деформируемых сред	86
КУДРЯШОВА С. А., ШМАКОВА Н. Д. Фокусировка внутренних волн, ге- нерируемых горизонтальными колебаниями сегмента тора в линейно стратифицированной жидкости	87
КУЗНЕЦОВ Д. А., КУРГУЗОВ В. Д. Разрушение эбонитовых балок при асим- метричном четырехточечном изгибе	88
КУЗНЕЦОВ Е. А., МИХАИЛОВ Е. А. Магнитные филаменты: формирова- ние, устойчивость и обратное влияние	89
КУТКИН Л. И., СЕМИСАЛОВ Б. В. Численный анализ потери устойчиво- сти осесимметричных пуазейлевских течений полимерной жидкости	89
КУЧУМОВ А. Г. Математическое моделирование в решении актуальных задач сердечно-сосудистой хирургии	90
ЛАЗАРЕВ Н. П. Задача о контакте неоднородной пластины Кирхгофа–Лява с наклонным препятствием	92
ЛАЗАРЕВА Г. Г., ОКСОГОВА И. П. Математическое моделирование удерж- жания плазмы в спиральном магнитном поле и анализ точности чис- ленного решения	93

ЛАРИЧКИН А. Ю., ЗАХАРЧЕНКО К. В. Влияние условий ползучести и последующего восстановления свойств образцов из сплава $Al-Cu-Mg$ на сопротивление усталости	94
ЛАСКОВЕЦ Е. В. Изучение влияния тепловой нагрузки на топологию течения в системе „жидкость – газ“ на основе точного решения задачи конвекции	95
ЛЕОНОВА Э. И., САЖЕНКОВ С. А. Гомогенизация модели антиплоского сдвига армированного термоупругого композита	96
ЛУРЬЕ С. А., БЕЛОВ П. А. Вариационная формулировка необратимых процессов механики сплошной среды	97
ЛЮБИМОВА Т., ЛЮБИМОВ Д., МЕРАДЖИ С., РУ Б. Резонансные колебания капли жидкости или газового пузырька в жидкости, подверженной вибрациям	98
ЛЮЛЬКО Н. А. Стабилизация к нулю за конечное время квазилинейных гиперболических систем	99
ЛЯПИДЕВСКИЙ В. Ю., ЧЕСНОКОВ А. А. Внутренние волны и перемешивание в слоистых течениях над неровным дном	100
МАЕВСКИЙ К. К. Моделирование высокоэнергетического воздействия на кальцит	101
МАКАРОВ Д. В., СЛЮНЯЕВ А. В., ПЕЛИНОВСКИЙ Е. Н. Стохастическая накачка нелинейных волн	102
МАРЧУК АН.Г., ШАДРИН М.Ю. Снижение высоты цунами подводным барьером	103
МАРЫШЕВ Б. С., КЛИМЕНКО Л. С., КОЛЧАНОВ Н. В. Неустойчивость течения при фильтрации смеси через вертикальный фильтр против силы тяжести	104
МЕГРАБОВ А. Г., ЛЕВИНА Е. А. О выражении скалярной кривизны через дифференциальные инварианты и связях между характеристиками векторного поля	105
МЕДВЕДЕВ А. Е., ГОЛЫШЕВА П. С. Моделирование теплообмена и влагообмена в бронхиальном дереве человека	106
МЕДВЕДЕВ С. Б., СЕМИСАЛОВ Б. В. Моделирование нелинейного взаимодействия волн в случайном волоконном лазере	107
МЕЛЕШКО С. В., КАПЦОВ Е. И. Групповой анализ двумерных стационарных уравнений газовой динамики в лагранжеских координатах	108
МИХАЙЛОВ А. В., БЕРДНИКОВ В. С., ГРИШКОВ В. А., КИСЛИЦЫН С. А. Зависимость формы фронтов кристаллизации в методе ГНК от интенсивности тепловой гравитационно-капиллярной конвекции	109
МОРОЗОВ Е. Г., МАКАРЕНКО Н. И., ФРЕЙ Д. И., ЗУЕВ О. А. Стратифицированные течения в глубоководных каналах Центральной Атлантики	110
НАЗАЙКИНСКИЙ В. Е. Квазиклассические асимптотики на стратифицированных многообразиях	111

НАСЫРОВА Д. А. Колебания жидкости в скважине с учетом фильтрационных процессов в призабойной зоне	112
НИКИТИН Н. В. Вторичные течения, генерируемые турбулентностью	113
НОВОСЕЛОВ А. Н., ЛЕГАН М. А. Определение прочностных характеристик стекла при вдавливании стальных шаров	114
НОВОТРСОВ В. В. Влияние плотностной стратификации на интенсивные внутренние волновые боры	115
ОКАТЬЕВ Р. С., КОЛЕСНИЧЕНКО И. В. Моделирование МГД-течений с дисперсной примесью	115
ОСИПЦОВ А. Н. "Безмашинное" энергоразделение в газовых и газокпельных потоках	116
ПАЖИН А. А., ЕРЕМИН М. О., МИРОВОЙ Ю. А., БУЯКОВА С. П. Исследование влияния структуры гетеромодульных керамик на основе карбида циркония на вязкость разрушения	118
ПАНОВ А. В., ГУЛЬ Н. А. О структуре фронта ударной волны в гетерогенной смеси вязких газов	119
ПАПИН А. А., ТОКАРЕВА М. А. О корректности краевых задач одной модели фильтрации несмешивающихся жидкостей в порупругой среде	120
ПЕСКОВА Е. Е., ЯЗОВЦЕВА О. С., МАКАРОВА Е. Ю., ТИНЬГАЕВА Н. А. О построении вычислительных алгоритмов для исследования дозвуковых реагирующих течений в присутствии лазерного излучения	121
ПЕТРЕНКО И. А., ЧЕРЕВКО А. А., ШАРИФУЛЛИНА Т. С. Анализ задачи эмболизации АВМ методами теории оптимального управления	122
ПЕТРОВ А. Г., ПОТАПОВ И. И., ЕПИХИН А. С. Об автомодельных решениях задачи донных деформаций	123
ПЕТРОВА А. Г. Асимптотический анализ моделей, релаксирующих жидкостей	124
ПЛОТНИКОВ П. И. Геометрические аспекты теории оптимизации формы	125
ПОПОВ Н. С., ПОПОВ С. В. О нелокальных интегро-дифференциальных краевых задачах для псевдопараболических уравнений	125
ПОПОВ С. В., ПОПОВА М. Н. О краевых задачах Жевре для уравнений параболического типа	126
ПОПОВА Т. С. Нелинейные задачи о сопряжении тонких анизотропных включений в двумерном упругом теле при наличии отслоения	128
ПРОСКУРИН А. В. Устойчивость течения в изогнутом канале	129
ПРОХОРОВ А. Н., ЛАРИЧКИН А. Ю., КАРПОВ Е. В. Определение квазинулевой жесткости при закритическом поведении тонких оболочек с незамкнутым сечением	130
ПУХНАЧЕВ В. В. Винтовые течения и их двумерные аналоги	131
РАДЧЕНКО П. А., РАДЧЕНКО А. В., БАТУЕВ С. П., КАКУТКИН А. В. Влияние биметаллической оболочки на взаимодействие стального ударника с металлокерамической преградой	131

- РАДЧЕНКО В. П., САУШКИН М. Н., ШИШКИН Д. М. *Метод расчета релаксации остаточных напряжений в поверхностно упрочненном призматическом образце с полукруглым надрезом в условиях ползучести* . . . 132
- РАДЧЕНКО П. А., РАДЧЕНКО А. В., БАТУЕВ С. П., КАНУТКИН А. В. *Моделирование взаимодействия космического мусора с монолитной и слоистой оболочкой* 133
- РОМАНЕНКО Е. И., БАНЩИКОВА И. А., ПЕЛЬ А. Н. *Определение разрушающей нагрузки пластин с отверстием* 134
- РОМАНОВ В. Г. *Обратные задачи для некоторых нелинейных гиперболических уравнений* 135
- РУДАЯ Я. Е., ШМАКОВА Н. Д., МАКРИДИН З. В., ЕРМАНЮК Е. В. *Исследование интегральных характеристик волновых аттракторов* 135
- РУДОЙ Е. М., САЖЕНКОВ С. А. *Осреднение динамической модели термоупругого тела, армированного тонкими волокнами* 136
- САДОВСКИЙ В. М., САДОВСКАЯ О. В. *Задача о бегущей дислокации* 137
- СЕМЕНКО Р. Е., РАУФОВ Х. Р. *Скорость стационарной детонационной волны с двухстадийной реакцией в пористой среде* 138
- СЕМЁНОВ А. Б., ГУЛЕВЦОВ П. П., ИВАНОВ А. *Исследование вязкости биологических жидкостей при изменении физических параметров* 139
- СЕМЁНОВ А. Б., РОГАЛЕВ Д. *Управление возникновением гидроакустического резонанса в течении биологической жидкости* 140
- СЕНАШОВ С. И., САВОСТЬЯНОВА И. Л. *Использование законов сохранения для решения краевых задач МДТТ* 140
- СЕРЕДКИН Н. Н., ХИЩЕНКО К. В. *Модель термодинамики системы титан—никель при высоких плотностях энергии* 141
- СИМАКОВ С. С., ИСАЕВ А. А., ДОБРОСЕРДОВА Т. К., ДАНИЛОВ А. А. *Моделирование кровотока в областях соединения сосудов с помощью физически информированных нейросетей* 142
- СИМОНОВА Е. В., ГРИСЯК А. А. *Параметрическое описание тензорных полей в окрестности вершины трещины при ползучести* 143
- СКУБАЧЕВСКИЙ А. Л. *О существовании глобальных классических решений с компактными носителями смешанной задачи для уравнений Власова-Пуассона в полупространстве* 144
- СЛЮНЯЕВ А. В. *Численное моделирование морских волн и волн-убийц в рамках уравнений Эйлера* 144
- СМОРОДИН Б. Л. *Электроосмотическое течение в микроканале под действием переменного электрического поля* 145
- СОЛДАТОВ А. П. *Интегральные представления плоской анизотропной теории упругости* 146
- СТЕПАНОВА Л. В., МУШАНКОВА К. А. *Континуальное и атомистическое описание полей у вершины трещины в анизотропных линейно упругих телах с различными видами симметрий упругих свойств* 147

СТЕПАНОВА Л. В., ЧАПЛИЙ Д. В., БЕЛОВА О. Н. <i>Конечно-элементное описание процессов накопления поврежденных у вершины трещины в условиях ползучести</i>	148
СТОЯНОВСКАЯ О. П., ТУРОВА Г. Д., ЮДИНА Н. М. <i>Групповой и дисперсионный анализ системы уравнений Бюргера — Хопфа для газодисперсной среды</i>	149
СТРИЖАК П. А., АНТОНОВ Д. В., ФЕДОРЕНКО Р. М. <i>Математические модели микро-взрывного распада двухжидкостных капель</i>	150
СУДАКОВ В. Г., ЩЕГЛОВ А. С. <i>Решение задачи распространения звукового удара с использованием мультипольного разложения</i>	151
СУРЖИКОВ С. Т. <i>Пространственные задачи сложного теплообмена межпланетных зондов</i>	152
СУХИНИН С. В. <i>Гидроудар</i>	153
ТАЛЫШЕВ А. А. <i>Об иерархии дифференциально-инвариантных решений</i> . .	154
ТАРРАФ Д., ЧЕРНЫЙ С. Г. <i>Численная модель процесса распыла и испарения жидкого углеводорода в реакторе по производству технического углерода</i>	155
ТЕРСЕНОВ АР. С. <i>Вязкие решения анизотропных параболических уравнений</i>	156
ТИМЕРГАЛИЕВ С. Н. <i>Об одном методе исследования разрешимости нелинейных краевых задач равновесия непологих оболочек типа Тимошенко с незакрепленными краями</i>	157
ТИХВИНСКИЙ Д. В., КУЯНОВА Ю. О., БЕРВИЦКИЙ А. В., СТАНКЕВИЧ Ю. А., ЧУТКОВ Д. С., ПАРШИН Д. В. <i>Динамика церебральной ангиоархитектоники в норме и при патологиях</i>	158
ТКАЧЕВ Д. Л., БИБЕРДОРФ Э. А. <i>Линейная неустойчивость состояния покоя для МГД течений полимерной жидкости в цилиндрическом канале (модель Виноградова-Покровского)</i>	159
ТКАЧЕВА Л. А. <i>Рассеяние волн кромкой ледяного покрова при наличии сдвигового течения</i>	159
ТРАХИНИН Ю. Л. <i>О корректности задачи со свободной границей в анизотропной плазме</i>	160
ТУПИЦЫНА А. Д., ЛИПОВКА А. И., ПАРШИН Д. В., МАУС М. С., КАРПЕНКО А. А. <i>Исследование механики стенки аневризмы аорты с тромбом при помощи ультразвукового измерения деформаций</i>	161
ТЮЛЬКИНА И. В., ГОЛДОВИН Д. С. <i>Синхронизация термоконцентрационных конвективных течений в смежных ячейках пористой среды</i> . .	162
ФЕДОРЕНКО Р. М., АНТОНОВ Д. В., СТРИЖАК П. А. <i>Математическая модель образования вторичных фрагментов при микро-взрывном распаде</i>	163
ФИЛЯКОВ Г. Ю., РЫМАРЕНКО К. В., СУХИНИН С. В. <i>Методы определения концентрации компонент в двухфазной расходомерии</i>	164
ФРОЛОВСКАЯ О. А. <i>Растекание слоя на вращающейся плоскости в водном растворе полимера</i>	165
ФУРЦЕВ А. И. <i>О равновесии гиперупругого тела с жестким включением и трещиной с односторонними ограничениями</i>	166

- ХАБИН М. Р., МАРЫШЕВ Б. С. Возникновение концентрационной конвекции в длинной прямоугольной области пористой среды при модуляции внешнего фильтрационного потока 166
- ХАБИРОВ С. В. Групповая классификация релаксирующих газодинамических сред 167
- ХИЩЕНКО К. В. Многофазное уравнение состояния висмута в широком диапазоне плотностей и температур 168
- ХЛУДНЕВ А. М. О равновесии двух упругих пластин с тонкой перемычкой 169
- ХУДЯКОВА А. Д., КУРЫШЕВ И. М., САПРОНОВ Д. В. Численная реализация соотношений теории пластического течения с поверхностью нагружения Хосфорда для моделирования разгонных испытаний дисков газотурбинных двигателей 170
- ЧЕРЕВКО А. А., ШАРИФУЛЛИНА Т. С., ГОРБАТЫХ А. В. Реконструкция характеристик проницаемости мелкососудистых церебральных патологий на основе интраоперационных измерений 171
- ЧЕХОНИН К. А. О динамических режимах стекания вязкой несжимаемой капли по наклонной подложке 172
- ЧИЧЕРИНА А. Д. Численное исследование механизма перехода к дивергенции крыла при его нестационарном обтекании 173
- ЧУПАХИН А. П., ПАРШИН Д. В., БЕСОВ А. С., ТИХВИНСКИЙ Д. В., ЛИПОВКА А. И., КАРПЕНКО А. А., КОПТЮГ А. В. Комплексное исследование реологии сложных сред применительно к задачам медицины и спорта 174
- ШАРГАТОВ В. А. Задача о распаде разрыва для уравнения Хопфа с невыпуклой функцией потока 175
- ШЕБЕЛЕВА А. А., ШЕБЕЛЕВ А. В., МИНАКОВ А. В. Численное моделирование разрушения капли жидкости Гершеля-Балкли 176
- ШЕЛУХИН В. В. Суспензии частиц несферической формы: термодинамика и микроструктура 178
- ШИФРИН Е. И. Применение элементов теории обобщенных функций к задачам идентификации трещин в стержнях по собственным частотам колебаний 179
- ШМАКОВА Н. Д., ЧЕРЕВКО А. А. Исследование течения пены в ячейке Хеле-Шоу при наличии препятствия 180
- ШУТОВ А. В., УФИМЦЕВ К. П. Эрзац модель для геометрически нелинейного моделирования деформирования и разрушения представительного объёмного элемента 181
- ШУКУРОВ Г. Н. Стационарные течения полимерной жидкости с переменным расходом в плоском канале с перфорированными стенками 182
- ЯВОРСКИЙ Н. И. О новом классе конических течений магнитной гидродинамики. Точные решения 182
- ЯЗОВЦЕВА О. С., ИНШАКОВА А. С., ГУБАЙДУЛЛИН И. М. Численное исследование волновых процессов в неподвижном слое катализатора 184

ЯКУШ С. Е., СИВАКОВ Н. С. <i>Механизм взрывной фрагментации капли расплава в объеме холодной жидкости</i>	186
ЯРОШЕНКО А. А., МАЛЕНКО Ж. В. <i>Волны в ледяном покрове от движущихся возмущений переменной интенсивности</i>	187
ADEYEMO O. D., KHALIQUE C. M. <i>Abundant solutions and the conservation laws of a new (3+1)-dimensional fifth-order nonlinear wazwaz equation with the third-order dispersion terms</i>	188
ANTONTSEV S. N., KUZNETSOV I. V. <i>The impulsive Kelvin-Voigt equations for homogeneous incompressible fluids</i>	188
DORODNITSYN V. A. <i>Large symmetries and conservation laws for differential equations, difference equations and second-order delay ODEs</i>	189
KHALIQUE C. M. <i>Conservation laws and solutions of the Zakharov-Kuznetsov equation with dual power-law nonlinearity</i>	190
LAVRENTIEV M. M., LYSAKOV K. F., OBLAUKHOV K. K. <i>Comparing software tools to compute maximum tsunami wave heights</i>	190
LITVINOV V. L., LITVINOVA K. V. <i>Pseudocomponent method for modeling component-fraction composition of a fluid during oil and gas production</i>	191
MODISAWATSONA L. L., MAGALAKWE G., MOTSEPA T. <i>Solution of injection driven flow and heat transfer inside an inclined chamber: symmetry analysis approach</i>	192
NKWANAZANA D. M., MOITSHEKI R. J. <i>Preliminary group classification of nonlinear reaction-diffusion equation</i>	193
SAZHIN S. S., ANTONOV D. V., STRIZHAK P. A. <i>Puffing and micro-explosion in composite multi-component droplets: new approaches to modelling the processes</i>	193
SAZHIN S. S., ANTONOV D. V., STARINSKAYA E. M., TEREKHOV V. V., STARINSKIY S. V. <i>Heating and evaporation of sessile droplets: new approaches to modelling the processes</i>	194
SHAFAREVICH A. L. <i>Short-wave asymptotic solutions of strictly hyperbolic systems with abruptly varying coefficients</i>	195
ZHANG L., WANG Y. <i>Dynamical analysis of the ionic flows through ion channels via Poisson-Nernst-Planck model equations</i>	196

**ВИХРЕВЫЕ ВОЛНЫ НА ВОДЕ В ЛАГРАНЖЕВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ:
ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ****А. А. Абрашкин***Национальный Исследовательский Университет Высшая Школа Экономики,
Нижний Новгород**Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН,
Нижний Новгород*

Доклад посвящен неустановившимся движениям идеальной жидкости со свободной границей. Этому направлению, начиная с середины 1960-х годов, Л.В. Овсянников уделял много внимания. В частности, им получено точное описание динамики жидкого деформирующегося эллипсоида вращения [1]. Примечательно, что для решения задачи Лев Васильевич воспользовался лагранжевым подходом, который также лежит в основе данного сообщения.

Предлагается обзор точных решений для поверхностных гравитационных волн в гидродинамике и геофизике. Основополагающей моделью выступает волна Герстнера – стационарная волна с трохойдальным профилем на глубокой воде. Это единственное точное решение системы уравнений идеальной жидкости для гравитационных волн на воде. Рассмотрены различные обобщения волн Герстнера:

а) волны при неоднородном и нестационарном распределении давления на свободной поверхности. Изучены осциллирующий солитон на спокойной воде и на фоне волны Герстнера, обрушение бризера, нестационарные волны Герстнера, волна-убийца на однородном герстнеровском волнении, нестационарные краевые волны над берегом с постоянным уклоном. Для этих типов волн предложено общее название – обобщенные волны Герстнера [2];

б) поверхностные волны во вращающемся океане в приближении f – плоскости [3];

в) захваченные волны в приэкваториальной области в приближении β – плоскости [4].

Для каждого типа волн найдены выражения для инвариантов Коши [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л.В. *Общие уравнения и примеры*. В сб.: Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1967. С. 5-75.
2. Абрашкин А. А., Пелиновский Е. Ф. *Волны Герстнера в гидродинамике и геофизике*. УФН, 2022. Т. 192. № 5. С. 491–506.
3. Pollard R. T. *Surface waves with rotation: An exact solution*. J. Geophys. Res. 75, 5895 (1970)
4. Constantin A. *An exact solution for equatorially trapped waves*. J. Geophys. Res. Oceans 117, C 05029 (2012)
5. Абрашкин А. А., Пелиновский Е. Ф. *Инварианты Коши и точные решения нелинейных уравнений гидродинамики*. ТМФ, 2023. Т. 215. № 2. С. 165–175.

СИММЕТРИИ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

А. В. Аксенов¹, А. Д. Полянин²

¹Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

²Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлinskого РАН, Москва

Точные решения уравнений математической физики играют огромную роль в формировании правильного понимания качественных особенностей многих явлений и процессов в различных областях естествознания. Точные решения нелинейных уравнений наглядно демонстрируют и позволяют лучше понять механизмы таких сложных нелинейных эффектов, как пространственная локализация процессов переноса, множественность или отсутствие стационарных состояний при определенных условиях, существование режимов с обострением и др.

Исследуется параболическое уравнение Монжа – Ампера с тремя независимыми переменными

$$u_t = u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2, \quad (1)$$

которое встречается в электронной магнитной гидродинамике [1].

Проведен групповой анализ [2] уравнения (1). Найдено одиннадцатипараметрическое преобразование, сохраняющее вид уравнения. Получена формула, дающая возможность строить многопараметрические семейства решений, исходя из более простых решений. Описаны некоторые инвариантные решения, зависящие от одного или двух свободных параметров.

Для поиска неинвариантных точных решений уравнения (1) использованы различные модификации метода обобщенного разделения переменных и приведенные в [3] точные решения более простых, чем исходное, промежуточных редуцированных уравнений с меньшим числом независимых переменных. Особое внимание уделяется построению простых точных решений, которые выражаются через элементарные функции [4]. Такие решения удобно использовать в качестве тестовых задач для оценки точности и проверки адекватности численных методов решения сильно нелинейных уравнений с частными производными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zaburdaev V. Yu., Smirnov V. V., Chukbar K. V. *Nonlinear dynamics of electron vortex lattices*. Plasma Physics Reports. 2014. V. 30. № 3. Pp. 214–217.
2. Овсянников Л. В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений*. М.: Наука, 1978.
3. Polyanin A. D., Zaitsev V. F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed.* Boca Raton: CRC Press, 2012.
4. Аксенов А. В., Полянин А. Д. *Обзор методов построения точных решений уравнений математической физики, основанных на использовании более простых решений*. Теоретическая и математическая физика. 2022. Т. 211. № 2. С. 567–594.

ВЛИЯНИЕ СВОЙСТВ ПОВЕРХНОСТИ НА ГИСТЕРЕЗИС ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА

А. А. Алабужев

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

Пермский государственный национальный исследовательский университет

Исследуется динамика зажатого газового пузырька в пульсационном поле давления с учётом гистерезиса краевого угла смачивания. Пузырек зажат между двумя параллельными между собой твёрдыми пластинами и окружён несжимаемой жидкостью конечного объёма со свободной внешней поверхностью. Линия контакта может двигаться, если отклонение краевого угла превышает некоторое критическое значение [1]. Свойства поверхностей пластин отличаются друг от друга [2].

Получены амплитудно-частотные характеристики для разных параметров задачи. Ввиду диссипативного характера используемого эффективного краевого условия существует устойчивый режим нелинейных колебаний. Показано, что с увеличением критического значения краевого угла область движения уменьшается. Показано существование двойного резонанса - частота радиальных колебаний близка к частоте одной из гармоник колебаний формы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 24-21-00379).

ЛИТЕРАТУРА

1. Hocking L. M. *Waves produced by a vertically oscillating plate*. J. Fluid Mech. 1987. V. 179 P. 267–281.
2. Alabuzhev A. A. *Forced axisymmetric oscillations of a drop, which is clamped between different surfaces*. Microgravity Science and Technology. 2020. V. 32. P. 545–553.

АНАЛИЗ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ БУССИНЕСКА ПЕРЕНОСА ТЕПЛА И МАСС

Г. В. Алексеев, О. В. Соболева

Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток

Дальневосточный федеральный университет, Владивосток

В 1959 году Л.В. Овсянников опубликовал работу [1] о групповых свойствах дифференциальных уравнений нелинейной теплопроводности. После публикации данной работы стало развиваться направление, связанное с изучением качественных свойств решений уравнений тепломассопереноса с переменными коэффициентами, зависящими от температуры и/или концентрации растворенного вещества (см., например, [2, 3]). Работы [4, 5] посвящены исследованию разрешимости краевых задач для уравнений переноса тепла или масс с переменными коэффициентами, рассматриваемых при граничных условиях Дирихле для всех переменных.

В настоящей работе исследуются краевые задачи для обобщенной модели Буссинеска тепломассопереноса

$$-\operatorname{div}(\nu \nabla \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} + (\beta_C C - \beta_T T) \mathbf{G}, \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega, \quad (1)$$

$$-\operatorname{div}(k\nabla T + (\mathbf{u} \cdot \nabla)T) = f_T \text{ в } \Omega, \quad (2)$$

$$-\operatorname{div}(\lambda\nabla C) + \mathbf{u} \cdot \nabla C = f_C \text{ в } \Omega, \quad (3)$$

рассматриваемой в ограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^3$ при неоднородных условиях Дирихле для скорости и температуры и смешанных граничных условиях для концентрации. Модель (1), (2), (3) описывает течение бинарной теплопроводящей жидкости, в которой коэффициенты вязкости ν , теплопроводности k и диффузии λ так же, как и коэффициенты β_T , β_C , могут зависеть от температуры T и/или концентрации C .

Нашей целью является разработка математического аппарата исследования краевых задач для модели (1)–(3). Основываясь на этом аппарате, мы установим достаточные условия на исходные данные, обеспечивающие глобальную разрешимость и локальную единственность решений рассматриваемых краевых задач.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН (№ 075-00459-24-00).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ovsyannikov L. V. *Group properties of the equation of nonlinear heat conductivity*. Doklady Academy Nauk SSSR. 1959. V. 125. № 3. P. 492–495.
2. Pukhnachev V. V. *Multidimensional exact solution of the equations of nonlinear diffusion*. J. Appl. Mech. Tech. Phys. 1995. V. 36. № 2. P. 23–31.
3. Stepanova I. V. *Group analysis of variable coefficients heat and mass transfer equations with power non-linearity of thermal diffusivity*. Appl. Math. Comput. 2019. V. 343. P. 57–66.
4. Lorca S. A., Boldrini J. L. *Stationary solutions for generalized Boussinesq models*. J. Diff. Eq. 1996. V. 124. P. 389–406.
5. Alekseev G. V., Soboleva O. V. *Inhomogeneous boundary value problems for the generalized Boussinesq model of mass transfer*. Mathematics. 2024. V. 12. P. 391.

ДИНАМИКА ПРЕЦЕССИИ ВОЛЧКА ТОМПСОНА

А. И. Андреев, А. Е. Семёнов, Б. М. Славин, В. А. Чанчиков

Астраханский государственный технический университет

Современные работы в области движения и динамики волчка Томпсона при его прецессии показывают, что на волчок, помимо силы тяжести и реакции опорной плоскости, действуют силы сухого трения (включая силы трения скольжения, верчения, качения) и наложена односторонняя голономная связь: скорость наинизшей точки шара имеет неотрицательную проекцию на вектор восходящей вертикали (возможны подскоки волчка над опорной плоскостью) [1].

Подобный подход критикуется в ряде работ, например, в работе [2]. Детальное рассмотрение процесса показывает, что полная механическая энергия убывает на движения без проскальзывания значительно медленнее, чем на движениях с проскальзыванием. Это также подтверждается в работах А. В. Карапетяна, М. А. Муницына, которые показывают динамику волчка Томпсона при вязком трении, в которой

предполагается что со стороны плоскости на шар действует сила трения скольжения, пропорциональная скорости точки контакта с плоскостью.

Исследование изменения угловой скорости при прецессии показывает, что угловая скорость изменяется нелинейно по закону близкому к экспоненциальному. Полная энергия с учётом скольжения может быть представлена, как сумма потенциальной и кинетической энергии вращательного движения с учётом потерь на трение.

$$dF == \frac{1}{2} J \omega_0 e^{-2Ct\xi} + mg \frac{dh}{dt} + P_{mp}, \quad (1)$$

где P_{mp} - потери на трение, h – положение центра тяжести, ω_0 – начальная угловая скорость, t – время прецессии, ξ – коэффициент трения, C – коэффициент пропорциональности.

Известная зависимость момента и силы трения от окружной скорости $u == \omega\rho$, скорости скольжения v , получена Журавлёвым В.Ф. в аппроксимации Паде:

$$M == -M_0 \frac{u}{|u| + \alpha|v|}, F = -F_0 \frac{v}{|v| + \beta|u|}, u^2 + v^2 \neq 0 \quad (2)$$

с учётом закономерностей изменения угловой скорости, показывают, что в общем виде свойственна голономная постановка задачи.

Однако исследования показывают, что с увеличением скорости проскальзывания и с уменьшением коэффициента шероховатости поверхностей трения, скорость изменения угловой скорости существенно меняется. Так при движении по гладкой поверхности существенно возрастает скорость проскальзывания, с одновременным уменьшением угловой скорости, это заставляет поднять вопрос о влиянии и ряда других факторов, например, таких как влияние моментов инерции и возможности перехода к более сложной постановки задачи

ЛИТЕРАТУРА

1. Зобова А. А. *Нестационарные движения двусферического китайского волчка*. Вестник Нижегородского университета им. НИ Лобачевского. 2011. №. 4–2, С. 143–144.
2. Коронатов В. А. *О сухом трении при непоступательном скольжении тела и критика теории Контенсу-Журавлева*. Системы. Методы. Технологии. 2019. №. 1, С. 21–28.

ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА УНИВЕРСАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ГАЗА

В. К. Андреев

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

Квазилинейное уравнение

$$y_r \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{y_t}{y_r} \right) - \frac{y_t}{y_r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{y_t}{y_r} \right) \right] = r^\nu g(r^{-\nu} y_r, s(y)) \quad (1)$$

используется для описания движения с плоскими волнами ($\nu = 0$), цилиндрическими волнами ($\nu = 1$), сферическими волнами ($\nu = 2$). Плотность газа равна $\rho = r^{-\nu} y_r$, скорость $u = -y_t/y_r$; $s(y)$ есть энтропия, а $p = g(\rho, s)$ задаёт уравнение состояния газа. Уравнения (1) названо в [1] универсальным — оно описывает всевозможные лагранжевы переменные, которые можно ввести на каком либо непрерывном движении газа.

В докладе решается задача групповой классификации относительно функции $f(\rho, y) = g(\rho, s(y))$ и размерности области течения газа ν . Основная алгебра Ли образована операторами $\partial_t, \partial_r, t\partial_r$ при $\nu = 0$; ∂_t — при $\nu = 1, 2$.

Найдены все специализации уравнения состояния (функции $f(\rho, y)$), когда происходит расширение основной алгебры Ли. Таковых специализаций оказалось 28. Например, при $\nu = 0$ может быть $f(\rho, y) = \rho^5 + \sigma y$, $\sigma = 0, \pm 1$; при $\nu = 1$, $f(\rho, y) = \ln \rho + y$, а при $\nu = 2$, $f(\rho, y) = \rho^\delta \pm y^{2-2\delta}$, $\delta \neq 0, 1$ с дополнительными операторами $(\partial_y, t^2\partial_t + (tr - \sigma t^3/2)\partial_r, (r + \sigma t^2/2)\partial_r + 2y\partial_y, t\partial_t - \sigma t^2\partial_r - y\partial_y)$, $(\partial_y, t\partial_t + 2r\partial_r + 2y\partial_y)$, $(\delta t\partial_t + r\partial_r + y\partial_y)$.

Построены некоторые новые точные решения уравнения (1), описывающие нестационарные одномерные течения газа.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2023-912).

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. *Лекции по основам газовой динамики*. М.: Наука, 1981.

ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА УРАВНЕНИЙ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Б. Д. Аннин¹, С. И. Сенашов²

¹*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск*

²*Сибирский государственный университет науки и технологий им. М. Ф. Решетнева, Красноярск*

1. Рассмотрим уравнение

$$u_{tt} + Du_{xxxx} = \phi^2 \left(\int_0^l u_x^2 dx \right) u_{xx}. \quad (1)$$

Это уравнение при $D = 0$ впервые рассмотрено в [1]. При этом же условии уравнение (1), с точностью до обозначений, совпадает с уравнением С.А. Чаплыгина [2], групповая классификация которого решена Л.В. Овсянниковым [3, 4].

2. Обобщение уравнения (1) рассмотрено в [5], оно имеет вид

$$u_{tt} + D\Delta\Delta u = \phi^2 \left(\int_0^l \int_0^l (\nabla u)^2 dx dy \right) \Delta u, \quad (2)$$

где D - изгибная жесткость пластины, Δ - оператор Лапласа по переменным x, y . Уравнения (1) - (2) используются для описания напряженно-деформированного состояния при интенсивных вибрациях панелей обшивки самолетов и ракет, возбуждаемых набегающим потоком воздуха.

В работе решена задача групповой классификации уравнений (1) - (2). Приведены точные решения этих уравнений, которые могут использоваться как тестовые при численном решении этих уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Берштейн С. Н. *Об одном классе функциональных уравнений с частными производными*. Изв. АН. СССР. 1940. Т. 4, № 1. С. 17–20.
2. Чаплыгин С. А. *О газовых струях*. Москва: Учёные записки Московского университета, 1902.
3. Овсянников Л. В. *Групповые свойства дифференциальных уравнений*. Новосибирск, 1962.
4. Овсянников Л. В. *Групповые свойства уравнения С.А. Чаплыгина*. ПМТФ. 1960. № 3. С. 126–145.
5. Веденеев В. В., Шитов С. В. *Флаттер периодически подкрепленной упругой полосы в потоке газа с малой сверхзвуковой скоростью*. Изв. РАН. МТТ. 2015. № 3. С. 105–126.

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛИ НЕПОЛНОЙ ОБРАТИМОСТИ ДЕФОРМАЦИИ ПОЛЗУЧЕСТИ В ПРЕДЕЛАХ ПЕРВЫХ ДВУХ СТАДИЙ

Е. А. Афанасьева, В. Е. Зотеев

Самарский государственный технический университет

Характеристики ползучести и длительной прочности являются важными параметрами, которые определяют поведение материалов и конструкций в условиях высоких температур, внешних нагрузок и продолжительной эксплуатации. Поэтому построение теорий ползучести и методы идентификации их параметров является одной из ключевых проблем механики неупругого деформирования. Одной из немногих теорий, описывающих обратимую компоненту реологической деформации в пределах первых двух стадий, является модель неполной обратимости деформации ползучести Ю. П. Самарина [1]. Однако методика идентификации ее параметров имеет ряд

недостатков: требование выпуклости и монотонности экспериментальной зависимости для деформации ползучести, что не всегда наблюдается на практике [2].

Отсутствие алгоритмов статистической обработки экспериментальных данных и статистического анализа результатов вычислений не позволяет строго оценить адекватность построенных моделей ползучести и достоверность оценок ее параметров. В связи с этим целью данной работы является разработка метода идентификации параметров модели [1, 2], который принципиально устраняет отмеченные недостатки.

Разработан численный метод, в основе которого лежит переход от нелинейной по своим параметрам модели ползучести к линейно-параметрической дискретной модели в форме разностных уравнений, описывающих результаты наблюдений, полученные в ходе эксперимента. Установлены соотношения, описывающие связь между параметрами исходной модели и коэффициентами линейно-параметрической дискретной модели, и предложена итерационная процедура среднеквадратичного оценивания параметров линейно-параметрической модели.

Выполнена проверка адекватности разработанного метода экспериментальным данным для сплава ЭИ736 при температуре 500 °С, ЭИ696 при температуре 750 °С, ЭИ437А при температуре 700 °С, и ВЖ98 при температуре 900 °С, которая показала справедливость соотношений и эффективность метода.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FSSE-2023-0003) в рамках государственного задания Самарского государственного технического университета.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарин Ю. П. *Уравнения состояния материалов со сложными реологическими свойствами*. Куйбышев.: КГУ, 1979.
2. Самарин Ю. П. *Построение экспоненциальных аппроксимаций для кривых ползучести методом последовательного выделения экспоненциальных слагаемых*. Проблемы прочности. 1974. № 9. С. 24–27.

КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЯ КОЛЬЦЕВОГО СЕЧЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ОРТОТРОПНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ

И. А. Банщикова

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Для получения параметров на сдвиг изотропных и ортотропных материалов применяются различные способы: метод Иосипеску; кручение в плоскости пластины при малых прогибах; испытания на растяжение под углом 45° к основным направлениям; испытания на кручение тонкостенных и сплошных цилиндрических образцов и другие. В случае ортотропного материала при кручении стержней возникает деформация поперечного сечения, т.е. его искривление из плоскости, при этом изолинии напряжений представляют не концентрические окружности, а имеют более сложное распределение [1 - 3]. Как следствие возникает вопрос о возможности определения параметров на сдвиг из таких испытаний.

Решения, полученные для задачи кручения постоянным моментом стержня сплошного круглого сечения из ортотропного при ползучести материала, обобщены на случай стержня кольцевого сечения. Для расчета напряжено-деформированного состояния рассмотрено несколько методов: Бхатнагара–Гупты (метод 1); оценки, полученные на основе принципов минимума полной мощности (метод 2) и дополнительного рассеяния (метод 3); метод конечных элементов программы ANSYS (метод 4). Для ортотропных стержней кольцевого сечения показана возможность оценки напряженно деформированного состояния методом характеристических параметров (skeletal point stresses method). Напряжение в окрестности характеристических точек практически не изменяется с течением времени в процессе перераспределения от упругого до состояния установившейся ползучести. Показано, что в случае ортотропного материала характеристические точки располагаются на том же расстоянии вдоль радиуса, что и для изотропного материала, но под углами 45° к главным осям ортотропии. Выведенные на основе методов 1 и 3 аналитические зависимости для угловой скорости закручивания можно применять для определения и оценки сдвиговых параметров модели ортотропной ползучести Хилла из испытаний на кручение или для их уточнения, если эти параметры найдены иными способами, например, методом Соснина из испытаний на растяжение под углом 45° к основным направлениям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Банщикова И.А. *Исследование с использованием метода характеристических параметров ползучести ортотропного стержня при кручении* // ПМТФ. 2023. № 1. С. 1-16.
2. Банщикова И. А. *Кручение стержня кольцевого сечения из ортотропного материала в условиях ползучести* // Краевые задачи и математическое моделирование: темат. сб. науч. ст. [текстов. электрон. изд.] / под общ. ред. Е. А. Вячкиной. Новокузнецк: КГПИ КемГУ, 2023. С. 15-19.
3. Банщикова И.А. *К определению сдвиговых параметров при испытании материала на кручение в условиях ортотропной ползучести* // XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Сборник тезисов докладов: в 4 т., Том. 3. Санкт-Петербург: Политех-Пресс, 2023. С. 227-230.

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ДВУХСЛОЙНОГО ТЕЧЕНИЯ В СЛАБОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

В. Б. Бекежанова¹, Н. И. Гилёв^{1,2}, И. А. Шефер¹

¹Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

²Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Рассматривается задача о совместном течении испаряющейся жидкости и парогазового потока в плоском горизонтальном канале. Для описания стационарных режимов используется частично-инвариантное точное решение ранга 1 дефекта 3 уравнений термоконцентрационной конвекции, полученное в рамках двумерной постановки [1]. Решение позволяет корректно учесть диффузионное испарение на межфазной границе и влияние термодиффузионных эффектов в газовой фазе, возникающих за

счёт присутствия испаряемого компонента [2]. Предполагается, что перенос массы через границу раздела жидкость – газ вызван совместным действием сдвиговых напряжений, индуцируемых газовым потоком, и тепловой нагрузки, распределённой по линейному относительно продольной координаты закону и приложенной на стенках канала.

Исследуется устойчивость режимов испарительной конвекции, возникающих при пониженной гравитации. Методом нормальных мод получены нейтральные поверхности, определяющие критические характеристики устойчивости. Показано, что в системе с недеформируемой границей раздела наиболее опасными являются пространственные возмущения. Деформация поверхности раздела оказывает стабилизирующее влияние; при этом с увеличением толщины жидкого слоя происходит смена главной моды — при потере устойчивости сначала реализуются двумерные возмущения, вызывающие формирование поперечных валов, дрейфующих в направлении основного потока.

В случае конечно-амплитудных возмущений, периодических по пространственным координатам, рассчитаны вторичные режимы, возникающие при потере устойчивости течения в системе с недеформируемой границей. Установлено, что тепловые возмущения приводят к жёсткому возбуждению режимов валиковой конвекции, при которых в жидкости формируются характерные упорядоченные продольные структуры, вдоль которых частицы перемещаются по винтообразным траекториям со сложной симметрией.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 22-11-00243, <https://rscf.ru/project/22-11-00243/>).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бекежанова В.Б., Гончарова О.Н. *Задачи испарительной конвекции (обзор)*. ПММ. 2018. Т. 82. С. 219–260.
2. Bekezhanova V.B., Goncharova O.N. *Comparative characteristics of evaporative convection regimes in different statements of boundary value problem for convection equations*. J. Math. Sci. 2022. V. 267(4). P. 444–456.

ВЛИЯНИЕ РЕЖИМОВ СЛОЖНОГО СОПРЯЖЕННОГО ТЕПЛООБМЕНА НА РОСТ МОНОКРИСТАЛЛОВ В МЕТОДЕ ЧОХРАЛЬСКОГО

В. С. Бердников, В. А. Винокуров, В. В. Винокуров, С. А. Кислицын

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

Метод Чохральского - основной метод получения монокристаллов различного назначения. Этим методом кристаллы вытягиваются со свободной поверхности расплавов [1, 2, 3]. Поэтому на свободной поверхности расплавов есть радиальный градиент температуры из-за перепада температуры между стенками тигля и холодным фронтом кристаллизации (ФК). В режиме естественной конвекции природа течения расплава тепловая гравитационно-капиллярная. На кромку кристалла вдоль свободной

поверхности от стенки тигля набегают поток нагретого расплава и подплавляет периферию ФК. Для оттеснения от кромки ФК натекающего потока расплава и, как способ управления конвективным теплообменом, применяется подбор скорости вращения кристалла [2, 3]. Рост кристаллов происходит в режимах смешанной конвекции. Плохо изученные проблемы – влияние падения уровня расплава на конвективный теплообмен и влияние радиационно-конвективной теплоотдачи от кристаллов по мере увеличения его длины на поля температуры в кристалле. Численно исследовано влияние высоты слоя расплава на гидродинамику и конвективный теплообмен в диапазоне относительных высот слоя гептадекана $0,1 \leq H/R_T \leq 2,0$ с шагом через 0,1. Расчеты выполнены методом конечных разностей при фиксированной скорости вращения кристалла, соответствующей числу Рейнольдса $Re = 95$, при значениях чисел Грасгофа, Марангони и Прандтля $Gr = 1215$, $Ma = 2930$, $Pr = 40,35$, при отношении радиуса тигля к радиусу кристалла $R_T/R_K = 1,94$. Исследовано влияние скорости вращения ФК на гидродинамику и конвективный теплообмен при относительной высоте слоя расплава $H/R_T = 1,0$, в диапазоне чисел Рейнольдса $0 \leq Re \leq 125$. Экспериментально исследовано влияние скорости вращения ФК на поля скорости, пространственные формы течения и на формы фронта кристаллизации. Численно методом конечных элементов исследован нестационарный сопряженный конвективный теплообмен при кристаллизации гептадекана и воды на охлаждаемом неподвижном и равномерно вращающемся диске. При кристаллизации воды учитывалась инверсная зависимость плотности от температуры. Расчеты проведены при фиксированной геометрии $H/R_T = 1$, $R_T/R_K = 2,5$ при дискретном наборе скорости вращения и перепадов температуры между поверхностью диска и внешней стороной стенок тигля. В режимах радиационно-конвективной теплоотдачи от кристаллов в окружающую среду исследовано влияние длины и скорости вращения кристаллов кремния на поля температуры. Полученные результаты могут быть полезны при выращивании монокристаллов из расплавов оксидов и эвтектик с инверсными зависимостями плотности расплавов от температуры, например, кадмий-ртуть-теллур

ЛИТЕРАТУРА

1. Мильвидский М. Г. *Полупроводниковые материалы в современной электронике*. М.: Наука, 1986.
2. Kislitsyn S. A., Berdnikov V. S. *Numerical studies of the effect of the temperature drop in the crucible - melt - cooled disk system on the shapes of crystallization fronts*. Journal of Physics: Conference Series. 2021. Т. 2119. № 012084.
3. Berdnikov V. S., Vinokurov V. A., Vinokurov V. V. *Features of convective heat transfer in mixed convection modes in the Czochralski method with different effects of buoyancy forces and thermocapillary effect*. Journal of Physics: Conference Series. 2019. Т. 1382. № 012003.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ПОЛИМЕРНОГО МАТЕРИАЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВЕРТИКАЛЬНЫХ НАГРУЗОК

А. П. Богданова, А. А. Каменских, Ю. О. Носов

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

Исследования конструкций с многофакторным учетом различного рода воздействий на них или их ответственные элементы являются актуальными. Такие исследования имеют высокую ценность при прогнозировании работы конструкции и расчета её долговечности в рамках компьютерного инжиниринга. В настоящее время существует большое разнообразие работ, рассматривающих поведение полимеров и композитов с учетом малого количества факторов, влияющих на их работу. Однако с развитием вычислительных мощностей суперкомпьютеров и информационных технологий, повышаются возможности и качество решений численных процедур. При расчете долговечности конструкции необходимо учитывать вязкоупругоупругоэластические свойства материалов. В данной работе рассматривается материал распространенный в различных сферах промышленности - гамма модифицированный фторопласт. Этот материал применяется в качестве слоя скольжения, защитного покрытия. Свойства материала были получены экспериментально [1]. На их основе были построены численные процедуры идентификации вязкоупругого поведения материала как тело Максвелла с последующим применением модели Прони [2]. Рассмотрено поведение полимерного материала, работающего в рамках механики деформируемого твердого тела, в качестве слоя скольжения в ответственном элементе конструкции, представляющей собой узел трения. Проведен анализ влияния учета вязкости материала как при единократном так и при динамическом нагружениях. На модель действует распределенное вертикальное усилие 1000кН. Данный анализ проводился для нескольких вариантов толщины слоя скольжения. Его стандартная толщина 4 мм. Однако, основываясь на предположении об увеличении безремонтного срока службы конструкции за счет увеличения толщины полимерного слоя (вплоть до 12 мм). При сравнительном анализе решений полученных для упругоупругоэластической и вязкоупругой моделей поведения выявлено, что при учете вязкости материала под воздействием однократной нагрузки толщина слоя скольжения не оказывает влияния на максимальные значения контактных параметров. А параметры напряженно-деформированного состояния у такой модели в несколько раз ниже.

Исследования выполнены при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSNM-2023-0007).

ЛИТЕРАТУРА

1. Adamov A. A., Kamenskikh A. A., Nosov Yu. O. *Comparative Analysis of the Polymeric Materials Deformation Behavior under Squeezed and Free Compression*. IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng. 2020. Vol. 731. Art. 012007.
2. Kamenskikh A. A., Nosov Y. O., Bogdanova A. P. *The Study Influence Analysis of the Mathematical Model Choice for Describing Polymer Behavior*. Polymers. 2023. Vol. 15. Art. 3630.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИМЕНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ПОЛИМЕРОВ И ПАСТООБРАЗНЫХ СМАЗОЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ

А. П. Богданова, А. А. Каменских, Ю. О. Носов

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

Активное развитие вычислительной техники позволяет оценивать работу конструкций в рамках численных экспериментов при различных внешних и внутренних условиях. Для минимизации отклонения поведения численной модели и реальной конструкции, необходимо основательно подходить к описанию математических моделей поведения используемых материалов. Например, в работе [1] авторы рассматривают применение моделей в численных экспериментах с различными граничными условиями: статический расчет, динамический расчет и т.д. В работе [2] проведено исследование описания математической модели поведения пастообразного смазочного материала в динамической постановке. Также, в настоящее время активно разрабатываются современные полимерные и композиционные материалы, которые позволяют выдерживать не только большие нагрузки, перегрузки и т.д., но и работать в агрессивных средах. Численное моделирование позволяет прогнозировать работу исследуемого материала в конструкции, что в свою очередь снижает экономические и временные затраты на внедрение разработки.

В данной работе рассмотрен ряд математических моделей для описания поведения полимеров и пастообразных смазочных материалов на основе экспериментальных данных. Такие типы материалов характерно описывать в рамках механики деформируемого твердого тела, что позволяет проводить численное моделирование задачи при помощи метода конечных элементов. При описании поведения материалов вязкоупругой моделью и реализации задачи в статической постановке, тело ведет себя как абсолютно упругое. При использовании математической модели билинейного изотропного упрочнения, в рамках решения задачи в динамической постановке, возникает значительная погрешность между экспериментальными и численными данными. Отсюда, внесены ряд предположений о применении математических моделей при решении задач в различных постановках: в статической постановке, достаточно использовать билинейные модели; в динамической постановке, необходимо использовать модели с возможностью описания ползучести, релаксации и т.д.

Исследования выполнены при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSNM-2023-0007).

ЛИТЕРАТУРА

1. Kamenskikh A. A., Nosov Y. O., Bogdanova, A. P. *The Study Influence Analysis of the Mathematical Model Choice for Describing Polymer Behavior*. Polymers. 2023. Vol. 15. Art. 3630.
2. Nosov Y. O., Kamenskikh A. A. *Experimental Study of the Rheology of Grease by the Example of CIATIM-221 and Identification of Its Behavior Model*. Lubricants. 2023. Vol. 11. Art. 295.

УПРАВЛЕНИЕ ПЕРЕХОДОМ К ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ СТРЕЛОВИДНОГО КРЫЛА С ПОМОЩЬЮ РЕЛЬЕФА ПОВЕРХНОСТИ

А. В. Бойко, В. И. Бородулин, А. В. Иванов, С. В. Кириловский, Д. А. Мищенко, Т. В. Поплавская

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича
СО РАН, Новосибирск*

Рассматривается пассивный метод задержки перехода к турбулентности в пограничном слое стреловидного крыла при помощи структурированного рельефа поверхности, состоящего из прямоугольных полос, расположенных параллельно передней кромке. Эксперименты проводились в рабочей части малотурбулентной аэродинамической трубы Т-324 ИТПМ СО РАН. Использовалась экспериментальная модель стреловидного крыла, как в работе [1]. Тепловизионные измерения проводились на верхней стороне модели при угле атаки $\alpha = -5^\circ$. Скорость набегающего потока изменялась в диапазоне $20 \div 42$ м/с. Для обнаружения перехода к турбулентности использовалась методика, описанная в [2].

Соответствующая расчетная область представляет собой параллелепипед с помещенным в него стреловидным крылом. Расчетная область и форма крыла соответствуют экспериментальным. Расчеты проводились по методике, описанной в [3].

Использовались рельефы, состоящие из одной или нескольких длинных полос прямоугольного сечения, расположенных вдоль передней кромки. Оказалось, что в расчетах и эксперименте рельефы смещают положения начала перехода и турбулентности вниз по течению до $10 \div 12\%$ длины хорды крыла. С увеличением числа полос, эффект задержки перехода увеличивается.

Таким образом, полученные данные демонстрируют эффективность использованного структурированного рельефа поверхности как пассивного метода ослабления неустойчивости поперечного течения и затягивания перехода к турбулентности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 23-19-00644).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ivanov A. V., Mischenko D. A. *Delay of laminar-turbulent transition on swept-wing with help of sweeping surface relief*. AIP Conf. Proc. 2019, V. 2125. N. 030041. P. 1–6.
2. Boiko A. V., Ivanov A. V., Borodulin V. I., Mischenko D. A. *Quantification technique of transition to turbulence in boundary layers using infrared thermography*. Int. J. Heat Mass Transf. 2022, V. 183. N. 122065. P. 1–11.
3. Boiko A. V., Demyanko K. V., Kirilovskiy S. V., Nechepurenko Y. M., Poplavskaya T. V. *Modeling of transonic transitional three-dimensional flows for aerodynamic applications*. AIAA J. 2021, V. 59, P. 3598–3610.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИМФАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЧЕЛОВЕКА И ЖИВОТНЫХ

Г. А. Бочаров, Д. С. Гребенников, Р. С. Савинков

*Институт вычислительной математики им. Г. И. Марчука РАН, Москва
Первый Московский государственный медицинский университет имени
И. М. Сеченова*

Лимфатическая система (ЛС) представляет собой сеть лимфатических сосудов и лимфоидных органов (таких как селезенка, лимфатические узлы и др.) неравномерно распределенных по всему телу. ЛС выполняет две основные функции: а) транспорт жидкости из тканей в кровеносную систему для поддержания гомеостаза жидкости и б) транспорт антигенов и иммунных клеток в лимфатические узлы, где происходят иммунные реакции. В отличие от кровеносной системы, структурно-функциональные характеристики и биомеханические свойства ЛС и формирующих её отдельных органов изучены недостаточно. Разработка расчетных моделей ЛС является одним из актуальных направлений современной математической иммунологии, что обусловлено необходимостью изучения пространственно-временных механизмов регуляции иммунного ответа, изучения возможностей компенсации последствий лимфаденэктомии, системной коррекции иммунного ответа при аутоиммунных и онкологических заболеваниях и др. [1]. В докладе представлены подходы к моделированию сетевой структуры ЛС человека [2] и экспериментальных животных [3]. Рассмотрены геометрические модели лимфатических узлов и селезенки и задачи интеграции моделей индивидуальной клеточной миграции в трехмерные структуры лимфоидных органов для описания процессов иммунного реагирования на вирусные инфекции [4]. Изложены исследования по построению, численной реализации и калибровке математических моделей вирусных инфекций, описывающих пространственно-временную динамику компонент иммунной системы в лимфоидных органах, включая тканеспецифические особенности рециркуляции иммунных клеток.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 23-11-00116).

ЛИТЕРАТУРА

1. Bocharov G.Ā., Grebennikov D.Š., Savinkov R.Š. *Mathematical immunology: from phenomenological to multiphysics modelling*. Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2020. V.35. №.4. P.203–213.
2. Savinkov R., Grebennikov D., Puchkova D., Chereshev V., Sazonov I., Bocharov G. *Graph Theory for Modeling and Analysis of the Human Lymphatic System*. Mathematics. 2020. V.8. №12 P.2236.
3. Grebennikov D., Savinkov R., Zelenova E., Lobov G., Bocharov G.. *Network Modeling of Murine Lymphatic System*. Algorithms. 2023. V.16. №3 P.168.
4. Bocharov G.Ā., Grebennikov D.Š., Savinkov R.Š. *Multiphysics modelling of immune processes using distributed parameter systems*. Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2023. V.38, №.5. PP279–292

ПРОСТЫЕ УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ЖИДКОГО СВИНЦА ПРИ ВЫСОКИХ ДАВЛЕНИЯХ И ТЕМПЕРАТУРАХ

К. А. Боярских^{1,2}, К. В. Хищенко^{1,2,3}

¹Объединенный институт высоких температур РАН, Москва

²Московский физико-технический институт, Долгопрудный

³Южно-Уральский государственный университет, Челябинск

Применение жидкого свинца в качестве теплоносителя для ядерных энергетических установок обуславливает важность знания его свойств в широком диапазоне удельных объемов и температур. В связи с этим в настоящей работе предложены простые уравнения состояния этого металла на основе пяти различных моделей. Также рассчитана фазовая диаграмма для жидких и газообразных состояний свинца и оценены параметры критической точки фазового перехода жидкость—газ.

Модели, в рамках которых строятся уравнения состояния в этой работе, представлены функциями давления от удельного объема и температуры. Первая модель — это уравнение Ван-дер-Ваальса [1]. Вторая — описывает поведение заряженных твердых сфер [2]. Третья — получена при рассмотрении взаимодействующих точечных центров [3], она позволяет учесть соотношение сил притяжения и отталкивания между частицами вещества благодаря введению дополнительного параметра. Четвертая — обобщает первые две в результате параметризации степени удельного объема в упругой компоненте уравнения состояния. Наконец, авторы пятой модели [4, 5] предприняли попытку оптимизировать функциональную зависимость для фактора сжимаемости, в результате чего сумели улучшить описательные способности уравнения состояния.

Параметры уравнений состояния определялись с помощью данных из опытов по тепловому расширению жидкого свинца в изобарических условиях. Также в каждую модель была введена дополнительная константа, имеющая смысл постоянной удельной изохорной теплоемкости. Это позволило получить термодинамически полные уравнения состояния, а также произвести расчет ударных адиабат и определить область применимости каждой модели, основываясь на сравнении результатов расчетов с опытными данными при высоких давлениях и температурах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Van der Waals J. D. *On the Continuity of the Gaseous and Liquid States*. Leiden, 1873.
2. Ликальтер А. А. *Критические точки конденсации в кулоновских системах*. УФН. 2000. Т. 170. № 8. С. 831—854.
3. Петрик Г. Г., Гаджиева З. Р. *Однопараметрическое семейство уравнений состояния на основе модели точечных центров и его связь с однопараметрическим законом соответственных состояний*. Мониторинг. Наука и технологии. 2010. № 1. С. 67—78.
4. Каплун А. Б., Мешалкин А. Б. *О термодинамическом обосновании формы единого уравнения состояния жидкости и газа*. ТВТ. 2003. Т. 41. № 3. С. 373—380.
5. Kupershtokh A. L., Medvedev D. A., Karpov D. I. *On equations of state in a lattice Boltzmann method*. Computers and Mathematics with Applications. 2009. V. 58. P. 965—974.

ОЦЕНКА ГЕМОДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ РАЗЛИЧНЫМИ МЕТОДАМИ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ

Ю. В. Бугай¹, А. А. Черевко^{1,2}

¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

²Новосибирский государственный университет

При проведении сосудистых операций очень важным является проведение гемодинамического мониторинга для отслеживания параметров кровотока в реальном времени с целью раннего обнаружения возможных осложнений. Их прогнозирование является актуальной задачей как с практической, так и с научной точек зрения. Для получения интраоперационного прогноза, неинвазивной диагностики и планирования сложных операций необходима модель гемодинамики, отличающаяся высокой скоростью работы.

Данная модель должна быть разработана на основе клинических данных о параметрах кровотока. Однако, получение таких данных, их подготовка и анализ зачастую являются затруднительными. Вместе с этим, различные методы вычислительной гемодинамики могут требовать массивы данных большого объема. Например, качество прогноза нейросетевых моделей, отличающихся большим быстродействием, зачастую зависит от количества данных, используемых при их обучении. Напротив, модели, основанные на решении уравнений Навье-Стокса в упругих трубках, не нуждаются в таком большом количестве данных для верификации, но являются вычислительно затратными. По этой причине, наиболее оптимальным является подход, при котором для обучения нейросетей используется большое количество данных компьютерного моделирования, полученных на основе клинических данных.

Разработана модель нейронной сети с управляемым рекуррентным блоком, позволяющая производить оценку значений внутрисосудистого давления по данным скорости пульсовой волны. Обучение модели производилось с использованием двух различных баз данных о кровотоке [1], [2], полученных при помощи компьютерного моделирования с использованием клинических данных. Проведён сравнительный анализ данной модели с различными методами машинного обучения.

Полученные результаты представляют быстродействующий метод оценки внутрисосудистого давления по информации о внутрисосудистом кровотоке, который может быть использован в качестве дополнения к интраоперационному гемодинамическому мониторингу.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФ №22-11-00264

ЛИТЕРАТУРА

1. Charlton P. H. et al. *Modeling Arterial Pulse Waves In Healthy Aging: A Database For In Silico Evaluation Of Hemodynamics And Pulse Wave Indexes*. American journal of physiology. Heart and circulatory physiology. 2019. V. 317. H1062–H1085.
2. Jones G. et al. *A Physiologically Realistic Virtual Patient Database For The Study Of Arterial Haemodynamics*. International journal for numerical methods in biomedical engineering. 2021. V. 37. e3497.

АНАЛИЗ СПЕКТРА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА ПРИ НАЛИЧИИ ОСОБОЙ ТОЧКИ

И. А. Бугоец, Б. В. Семисалов

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет*

Проблема существования во времени гладких решений уравнений динамики вязкой жидкости, как и задача их высокоточного вычисления, связаны с анализом движения особых точек (полюсов, точек ветвления и т. п.) аналитических продолжений этих решений в комплексную плоскость \mathbb{C} , см., например, [1]. С течением времени t такие точки могут возникать и исчезать, двигаться по сложным траекториям в \mathbb{C} и выходить в область переменных, где ищется решение. Последнее зачастую означает, что классическое решение перестает существовать.

Обзор методов локализации особых точек в нелинейных моделях физики дан в [2]. Один из наиболее эффективных методов основан на анализе асимптотики коэффициентов ряда Фурье. Его приложение к исследованию уравнений гидродинамики (в частности, уравнения Бюргера, УБ) впервые реализовано в [3]. Здесь в предположении, что решение уравнения $u(z, t)$ имеет изолированную точку ветвления $z^*(t) = x^*(t) + i\varepsilon(t) \in \mathbb{C}$ порядка $\alpha(t) \in \mathbb{R}$: $u(z, t) = O((z - z^*(t))^{\alpha(t)})$ при $z \rightarrow z^*(t)$, использовано следующее представление его k -го коэффициента Фурье:

$$\hat{u}_k(t) = O(k^{-(1+\alpha(t))} \exp(-\varepsilon(t)k) \exp(ikx^*(t))) \text{ при } k \rightarrow \infty. \quad (1)$$

С применением итерационных методов авторам [3] удалось найти $\hat{u}_k(t)$ при больших k и $t > 0$; анализируя скорость убывания $\hat{u}_k(t)$ с ростом k , оценить параметры $\alpha(t)$, $\varepsilon(t)$, $x^*(t)$; и в итоге найти траекторию движения и порядок особой точки. Однако развить аналитические методы в рамках такого подхода до сих пор не удалось.

В работе с применением нового численного метода получены приближения решения УБ частичными суммами рядов Фурье: $\Phi_N(u)$ и $\Phi_K(u)$, состоящими из N и K слагаемых, где $K \gg N$ и точность $\Phi_K(u)$ близка к точности арифметики ЭВМ, т. е. $\Phi_K(u)$ – аналог точного решения. Далее найдена функция $b(z, t) = \Phi_K(u) - \Phi_N(u)$. Показано, что при больших N и $k > N$ для $\hat{b}_k(t)$ реализуется (1) и, что более важно, при $0 \leq k \leq N$ модули и аргументы \hat{b}_k имеют регулярную структуру.

В докладе рассматриваются различные способы приближения зависимостей $|\hat{b}_k|$ и $\arg(\hat{b}_k)$ от k при $0 \leq k \leq K$ и больших K и обсуждаются возможности применения этих приближений и асимптотических методов для вывода дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию особых точек решения УБ в \mathbb{C} .

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования РФ № 075-15-2022-281.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dyachenko A. I. et al. *Dynamics of Poles in 2D Hydrodynamics with Free Surface: New Constants of Motion*. J. Fluid Mech. 2019. V. 874. P. 891–925.
2. Caffisch R. E., Gargano F., Sammartino M., Sciacca V. *Complex singularities and PDEs*. Riv. Math. Univ. Parma. 2015. V. 6. № 1. P. 69–133.
3. Sulem C., Sulem P.-L., Frish U. *Tracing complex singularities with spectral methods*. J. of Comp. Phys. 1983. V. 50. P. 138–161.

ВОЛНОВАЯ ДИНАМИКА СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ СРЕД СО СДВИГОВЫМИ ТЕЧЕНИЯМИ: ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ, АСИМПТОТИКИ, ПРИЛОЖЕНИЯ

В. В. Булатов

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва

В реальных океанических условиях вертикальная и горизонтальная динамика фоновых сдвиговых течений в значительной степени связана с внутренними гравитационными волнами (ВГВ). В океане такие течения могут проявляться, например, в области сезонного термоклина и оказывать заметное влияние на динамику ВГВ. Обычно предполагается, что фоновые течения с вертикальным сдвигом скорости слабо зависят от времени и горизонтальных координат. Если масштаб изменения течений по горизонтали много больше длин ВГВ, а масштаб временной изменчивости много больше периодов ВГВ, то такие течения можно рассматривать как стационарные и горизонтально однородные. В общей постановке описание динамики ВГВ в стратифицированной среде с фоновыми полями сдвиговых течений является весьма сложной задачей уже в линейном приближении. В этом случае задача сводится к анализу системы уравнений в частных производных, и при одновременном учете вертикальной и горизонтальной неоднородности эта система уравнений не допускает разделение переменных. Используя различные приближения можно построить аналитические решения для модельных распределений частоты плавучести и сдвиговых течений. Синтез численных, аналитических и асимптотических результатов может дать первоначальное качественное и количественные представления о волновых процессах с учетом фоновых сдвиговых течений. Для исследования механизма взаимовлияния течений и ВГВ можно рассматривать различные модельные представления для стратификации и сдвиговых течений. В результате получают аналитические выражения, описывающие дисперсионные зависимости, которые выражаются через модифицированную функцию Бесселя мнимого индекса. При выполнении условия устойчивости Майлса-Ховарда и больших числах Ричардсона для построения аналитических решений используются дебаевские асимптотики модифицированной функции Бесселя мнимого индекса. Полученные результаты показывают значительную зависимость фазовой структуры возбуждаемых волновых полей от соотношения амплитуд придонного и приповерхностного течений для различных гидрологических моделей. В океане ВГВ могут обмениваться энергией со средними течениями. Если вертикальный градиент скорости течений велик, то средние течения могут отдавать энергию волнам, то есть соответствующие колебания могут быть неустойчивыми. В реальных океанических условиях может существовать горизонт, где скорость сдвигового течения совпадает с фазовой скоростью ВГВ: на этой глубине происходит поглощение волновой энергии, то есть передача части энергии волны средним течениям. Тогда этот уровень называется критическим. Поле ВГВ вблизи критического уровня можно представить в виде суммы двух слагаемых, первое из которых соответствует волне, переносящей энергию снизу вверх, а второе волне, переносящей энергию сверху вниз. Каждая из этих волн при пересечении критического уровня скачком убывает по амплитуде. Этот факт означает поглощение энергии ВГВ на критическом уровне, то есть передачу энергии средним течениям части энергии

ВГВ. Поведение пакетов ВГВ, приближающихся к критическому уровню обычно рассматривается в ВКБ-приближении при предположении, что сдвиговое течение и частота плавучести медленно меняются на периоде осцилляций рассматриваемого волнового поля. Однако вопрос о том, в каких именно физических задачах могут возникать такие пакеты, как правило, не рассматривается. В работе рассмотрены вопросы, связанные с постановкой задач описания динамики ВГВ в стратифицированных средах с горизонтальными сдвиговыми течениями и обсуждены физические постановки задач, в которых могут возникать критические уровни. Можно предположить, что существуют собственные колебания с критическими уровнями. Однако при выполненном условии Майлса-Ховарда и строго монотонной функции, описывающей течение, таких собственных функций не существует. Поэтому для поля с заданным волновым числом все собственные частоты оказываются такими, чтобы не было критического уровня. Этот результат допускает простую физическую интерпретацию: волновая энергия любого собственного колебания должна сохраняться, а при наличии критического уровня часть энергии ВГВ поглощается, переходя в энергию средних течений. Поэтому критические уровни могут возникать только для вынужденных колебаний с некоторой заданной частотой. Поэтому технически проще рассматривать ВГВ, возбуждаемые не источниками, а колебаниями границы. Имеется также еще один класс задач, в которых могут возникать критические уровни – это задачи о подветренных течениях. Рассмотрим поток стратифицированной среды, набегающей на какое-либо препятствие – уступ дна, локальное возвышение дна. За этим препятствием возникает уходящая от него волна, которая может возбуждать ВГВ. Можно искать решение, зависящее от времени, единственность которого обеспечивается условием излучения и далее искать предельный переход решения. В такой постановке задачи особенность поля ВГВ на критическом уровне формируется вдали от обтекаемого препятствия. Таким образом, использование различных модельных представлений для основных гидрологических характеристик (частоты плавучести и фоновых сдвиговых течений) позволят редуцировать основную задачу к более простой, а также исследовать эту упрощенную задачу аналитически. Аналитические и численные результаты показывают, что асимптотические конструкции, использующие модельные представления частоты плавучести и фоновых сдвиговых скоростей качественно верно могут описывать амплитудно-фазовую структуру ВГВ. Помимо фундаментального интереса построенные математические модели представляют значительную ценность для практики, поскольку позволяют решать задачи моделирования волновых гидрофизических полей в широком классе приложений. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ проект 23-21-00194.

ЛИТЕРАТУРА

1. Булатов В.В. *Аналитические свойства функции Грина уравнения внутренних гравитационных волн в стратифицированной среде со сдвиговыми течениями*. ТМФ. 2022. Т. 211. № 2. С. 200-215.
2. Булатов В.В. *Аналитические свойства решений уравнения внутренних гравитационных волн с течениями для критических режимов волновой генерации*. Труды МИАН. 2023. Т. 322. С. 71-82.

ЗАВИСИМОСТЬ ОТ ПАРАМЕТРОВ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ПОРОУПРУГОСТИ В ПРИЛОЖЕНИИ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ГИДРОЦЕФАЛИИ ГОЛОВНОГО МОЗГА

Г. С. Валова¹, А. А. Черевко¹, О. Б. Богомякова², А. А. Тулупов²,
А. Е. Акулов³

¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

²Международный томографический центр СО РАН, Новосибирск

³Институт цитологии и генетики СО РАН, Новосибирск

Одним из специфических для головного мозга явлений является течение цереброспинальной жидкости (ЦСЖ). В основе некоторых неврологических патологий лежит нарушение циркуляции ЦСЖ, избыток которой приводит к увеличению внутричерепного давления. Важным примером такой патологии является гидроцефалия, при которой желудочки головного мозга увеличиваются, что в свою очередь приводит к патологическим изменениям головного мозга.

В работе изучается влияние взаимодействия жидких сред головного мозга на смещение стенки желудочков и давление на ней с помощью стационарной математической модели многокомпонентной пороупругой фильтрации для вещества головного мозга [1, 2]. Математическое моделирование было выполнено на основании МРТ данных добровольцев (МТЦ СО РАН) и МРТ данных лабораторных мышей (ИЦиГ СО РАН) в двумерном приближении.

Взаимодействие жидких сред в данной математической модели задается набором из четырех числовых коэффициентов взаимодействия. На основе результатов численных расчетов качественно и количественно описан характер влияния коэффициентов взаимодействия на среднее смещение стенки желудочков и давление на ней. На этой основе высказана гипотеза о механизме возникновения гидроцефалии. Также показано, что в случае применения математической модели для описания гемодинамики головного мозга мышей наблюдаются качественно те же закономерности, что в случае применения модели для описания головного мозга людей, что позволяет проверить предсказания модели экспериментально.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №22-11-00264, <https://rscf.ru/project/22-11-00264/>.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tully B., Ventikos Y. *Cerebral water transport using multiple-network poroelastic theory: application to normal pressure hydrocephalus*. J. Fluid Mech. 2011.6677: 188—215.
2. Valova B., Bogomyakova O., Tulupov A., Cherevko A. *Influence of interaction of cerebral fluids on ventricular deformation: A mathematical approach*. Plos one. 2022.17: e0264395. С. 24–31.

РАСПАД ПРОИЗВОЛЬНОГО РАЗРЫВА В РЕАГИРУЮЩИХ СМЕСЯХ

А. А. Васильев¹, А. А. Борискин²

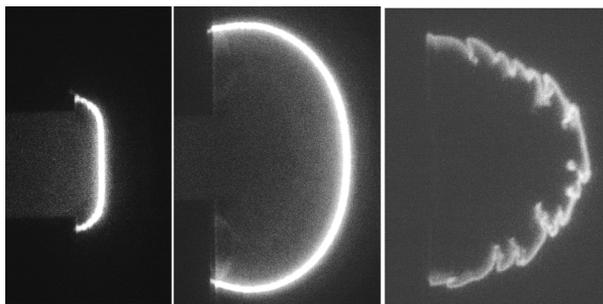
¹Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

²Новосибирский государственный университет

Решение задачи об одномерном распаде произвольного разрыва на границе двух нереагирующих газов и метод аналитического и графического ее решения с помощью (P-U)-диаграмм подробно описаны в знаменитой книге Л.В.Овсянников «Лекции по газовой динамике»: ударная волна уходит в область пониженного давления, а волна разрежения – в область повышенного давления. Непрерывность течения обеспечивается «сшивкой» решений на контактной границе. Подобным образом оценивается характер одномерного течения и для произвольного разрыва для реагирующих газов в случае, когда все характерные времена и размеры зон индукции и химической реакции считаются нулевыми. Решение на (P-U)-диаграмме представляется точкой пересечения ударной адиабаты исходной горючей смеси с низким давлением (чаще всего покоящейся $U=0$) и адиабаты разгрузки продуктов химической реакции из исходного состояния, соответствующего давлению и массовой скорости продуктов. Отметим, что вышесказанное справедливо только в случае одномерных течений (типа течений в трубе или канале постоянного сечения).

В случае переменной геометрии канала задача существенно усложняется даже для нереагирующих систем, и тем более в случае ненулевых зон индукции и реакции. Более того, в реальности детонационная волна в силу неустойчивости газодинамического комплекса ударная волна + зона индукции + зона реакции существенно отличается от своих идеализированных моделей с гладкими фронтами. Следствием этого является появление в структуре фронта детонации новых элементов – поперечных волн, траектории которых вычерчивают при своем движении ромбовидную сетку, делаая поток продуктов детонации существенно неоднородным по пространству и времени, с неоднозначностью (дисперсией) скорости звука. Это накладывает определенные ограничения на использование подходов для ударных волн при моделировании детонационных течений, особенно касающихся фронта пламени.

Ниже представлены мгновенные фотоснимки свечения фронта пламени для случая перехода ДВ из узкого канала в широкий и трансформации квазиплоского фронта (Слева на рисунке) в цилиндрически расходящийся фронт ДВ (На рисунке по центру) для случая сохранения детонационного характера распространения волн и в случае распада ДВ, когда головная УВ и фронт пламени разделяются и фронт пламени приобретает сложную трудно моделируемую форму (Справа на рисунке).



ПОВЕДЕНИЕ СПЕКТРА СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ПРОТЯЖЁННЫХ ОДНОМЕРНЫХ СИСТЕМ

В. В. Веденеев, А. Б. Подопрсветова

НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва

Известно [1], что комплексные собственные частоты одномерных систем большой протяжённости концентрируются вокруг асимптотической кривой в комплексной плоскости, определяемой дисперсионным уравнением системы. В случае, если часть такой кривой лежит в верхней полуплоскости комплексной плоскости, то система достаточно большой длины неустойчива; такая неустойчивость называется глобальной. Глобальная неустойчивость исследовалась в физических системах самой разной природы: течение Пуазейля в трубе конечной длины, термокапиллярная конвекция, струйные течения жидкости, упругие пластины в потоке несжимаемой жидкости, спиральные волны, устойчивость пламени, течение Куэтта магнитной жидкости, вибрации труб с движущейся внутри жидкостью, флаттер панелей обшивки сверхзвуковых летательных аппаратов, течения над углублениями и др. [2, 3].

В настоящей работе уравнение кривой, служащей аттрактором собственных значений при больших размерах системы, обобщается на случай произвольных собственных частот (ранее оно было получено лишь для участков, расположенных наиболее высоко в комплексной плоскости, т.е. соответствующих наиболее быстро растущим модам). Проведен анализ локальной топологии таких кривых и её устойчивости по отношению к малому изменению параметров задачи. Доказано, что устойчивыми являются регулярная точка кривой, точка разветвления кривой и конец кривой — точка ветвления функции $k(\omega)$. Рассмотрены случаи распада неустойчивой локальной топологии на устойчивые при изменении параметров задачи, проведена классификация возможных бифуркаций кривой. Изучены наиболее характерные устойчивые конфигурации кривой в окрестности мнимой оси.

Полученные результаты продемонстрированы на двух задачах: флаттер пластины в сверхзвуковом потоке газа [4] и колебания мягкой эластичной трубки, содержащей текущую жидкость [5]. В обоих случаях численно прослежено, как удлинение системы приводит к движению и взаимодействию собственных частот в комплексной плоскости и их концентрации около асимптотических кривых.

Исследование В.В. Веденеева выполнено за счет гранта РФФ № 20-19-00404.

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликовский А.Г. *Об устойчивости однородных состояний*. ПММ. 1966. Т. 30. № 1. С. 148–153.
2. Doaré O., de Langre E. *The role of boundary conditions in the instability of one-dimensional systems*. Eur. J. Mech. B/Fluids. 2006. V. 25. № 6. P. 948–959.
3. В. В. Веденеев. *О применении асимптотического метода глобальной неустойчивости в задачах аэроупругости*. Труды МИАН. 2016. Т. 295. С. 292–320.
4. В. В. Веденеев. *Флаттер пластины, имеющей форму широкой полосы, в сверхзвуковом потоке газа*. Изв. РАН. МЖГ. 2005. № 5. С. 155–169.
5. A. Podoprosvetova, V. Vedeneev. *Axisymmetric instability of elastic tubes conveying power-law fluids*. J. Fluid Mech. 2022. Vol. 941. A61.

ВЛИЯНИЕ ЛАЗЕРНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СТАЛИ 40Х13

А. И. Веремейчик, О. М. Мицирук, М. В. Нерода, Б. Г. Холодарь

Брестский государственный технический университет

Для исследования влияния лазерной обработки на свойства стали 40Х13 использовались плоские образцы размерами 7х20х200 мм. Воздействие осуществлялось по нескольким линиям (дорожкам) на противоположных широких гранях образцов при различных режимах нагружения. Исследование влияния режимов обработки проведено путем испытаний образцов на растяжение и на распределение микротвердости по глубине материала. Испытания на статическое растяжение проводились на разрывной машине ИР 5145-500-11. Измерения микротвердости образцов в закаленной зоне выполнялись на цифровом микротвердомере LM-700AT и твердомере ПМТ-3 по шкале Виккерса для серий 1–3 образцов.

Для серии 2 ($V=700$ мм/мин) измерения проведены под нагрузкой в твердомере $P=200$ гр., для серий 1 и 3 ($V=500$ и 1000 мм/мин) – под нагрузками 200 и 100 гр. Получены зависимости микротвердости от глубины. Непосредственно под поверхностью следа в нескольких случаях проводились испытания по ширине дорожки в 3-4 точках при приемлемом относительном разбросе результатов, причем измерения в этих случаях могли показать не самые высокие уровни микротвердости сравнительно с нижележащими по глубине точками.

В целом при одинаковой мощности потока лазерного излучения твердость коррелирует со скоростью перемещения пятна нагрева – с ростом скорости твердость падает. Наиболее выраженное падение твердости от приповерхностной происходит на глубине до 0,6-0,8 мм при $V=700$ мм/мин и $V=1000$ мм/мин и до 1,0-1,2 мм при скорости $V=500$ мм/мин.

На исходных образцах, не подвергавшихся лазерной обработке, твердость составила 155 HV. Результаты измерений показали, что в приповерхностных слоях обработанных образцов микротвердость достигает значений 600-650 HV и падает далее до 170-200 HV на глубине 1,0-1,5 мм. Микротвердость сердцевины сечения образцов составила 175-184 HV при измерениях на цифровом микротвердомере LM-700AT и 170-230 HV при измерениях микротвердомером ПМТ-3, поэтому из проведенных измерений следует, что твердость средней зоны (сердцевины) образцов, подвергавшихся воздействию лазера, также увеличилась.

Разбросы данных между дорожками могут свидетельствовать о влиянии уровня общего прогрева образца в процессе его обработки, а отличие в твердости сердцевины обработанных и необработанных образцов можно связать, по нашему мнению, также с продолжающейся трансформацией структуры при пониженных температурах в процессе последующего остывания и хранения образцов (проявление низкотемпературного отпуска материала).

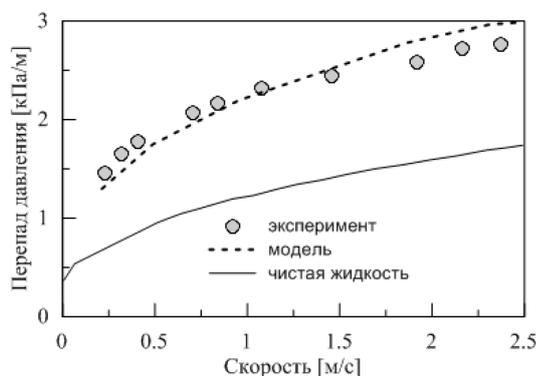
МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЙ НЕНЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ С ТВЕРДЫМИ ЧАСТИЦАМИ

А. А. Гаврилов

Сибирский федеральный университет, Красноярск

Развитие математических моделей течения суспензии неньютоновской жидкости, подчиняющейся реологическому закону Гершеля-Балкли, требует дополнительных исследований и учёта нескольких существенных явлений. Разработанная ранее математическая модель течения высококонцентрированной суспензии [1] обобщена на случай течений неньютоновских жидкостей с твёрдыми частицами с учётом особенностей, возникающих на мезоскопическом уровне описания течения жидкости с твёрдыми частицами. При моделировании течения смеси неньютоновской жидкости с твёрдыми частицами, необходимо учесть эффект локализации скорости сдвига между частицами и неоднородным распределением локальной эффективной вязкости на масштабах порядка размеров частиц.

Для тестирования модели выполнено численное моделирование установившихся ламинарных течений двухфазных систем в горизонтальной круглой трубе с высокой степенью загрузки потока [2]. Результаты моделирования демонстрирует хорошую



предсказательную способность модели как в отношении распределений частиц по сечению канала, так и в отношении зависимости перепада давления от скорости потока. Учёт эффекта концентрации скорости сдвига между частицами позволяет существенно улучшить предсказание пространственного распределения частиц в неоднородных режимах течения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 23-79-30022).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гаврилов А. А., Шебелев А. В. *Одножидкостная модель смеси для ламинарных течений высококонцентрированных суспензий*. Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2018. № 2. С. 84–98.
2. Graham L. J., Pullum L. *An investigation of complex hybrid suspension flows by magnetic resonance imaging*. Can. J. Chem. Eng. 2002. Vol. 80. P. 200–207.

НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРИИ ВЯЗКИХ СТРУЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А. М. Гайфуллин

*Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского,
Жуковский*

Созданию теории ламинарных струй несжимаемой жидкости посвящено достаточно много работ. Среди исследователей, внесших основополагающий вклад в создание этой теории, следует назвать: Г. Шлихтинга, Л.Д. Ландау, Н.А. Слезкина, В.И. Яценева, М.А. Гольдштика, Н.И. Яворского, Л.Г. Лойцянского, Ю.Б. Румера, Г. Сквайра, В. Шнайдера, Н.И. Акатнова, М.Б. Глауэрта и многих других. Вместе с тем, эта область гидродинамики, как возможно никакая другая, изобилует ошибочными утверждениями, многие из которых по прошествии лет воспринимаются научным сообществом как истинные утверждения. Ситуация усугубляется тем, что ошибки по данной тематике присутствуют и в известных монографиях, и в широко цитируемых статьях. Обнаружение этих ошибочных результатов и замена их на верные утверждения – главная цель доклада.

В докладе будут рассмотрены три задачи. Первая задача об осесимметричной струе, вытекающей из круглого отверстия конечного радиуса с конечной скоростью. Известно асимптотическое поведение характеристик струи в ее дальнем поле. В докладе будет установлена связь данного асимптотического решения с профилем скорости в начальном сечении струи.

Вторая задача об осесимметричной закрученной струе. Известно, что уравнения Навье-Стокса допускают два вида закрученных струй: с сохранением момента количества движения, либо с сохранением циркуляции по контуру вокруг струи. В докладе обсуждается вопрос о возможности создания таких струй.

Третья задача о трехмерной пристенной струе. Решение в дальнем поле струи выходит на автомодельный режим: толщина струи вдоль продольной координаты x растет как $x^{4/3}$, продольная скорость затухает как $x^{-5/3}$. Линии тока поперечного течения устроены следующим образом: имеется предельная линия тока, которая делит всю область течения на две подобласти. В обеих областях линии тока направлены к предельной линии тока, во внутренней подобласти из-за торможения струи, а во внешней из-за подсосывающего действия струи.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-11-00210, <https://rscf.ru/project/23-11-00210/>.

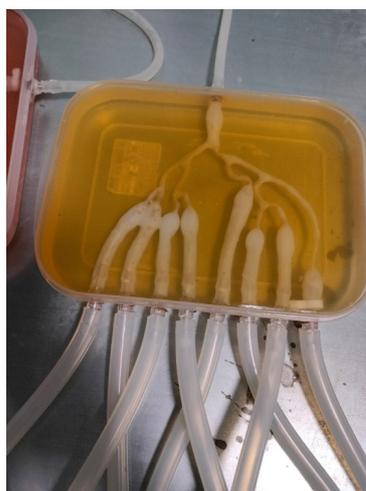
ГЕМОДИНАМИКА БИФУРКАЦИЙ: ЭКСПЕРИМЕНТ И МОДЕЛИРОВАНИЕ

Р. А. Гайфутдинов, Ю. О. Куянова, Д. В. Паршин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Сосудистые бифуркации являются основной областью пристального внимания не только сосудистых хирургов, но и специалистов в области медицинской физики. Согласно статистике [1] наибольший процент сосудистых аномалий приходится на зоны сосудистых бифуркаций, а их аномальное строение (трифуркации) нередко также

являются предвестниками различных заболеваний. С точки зрения механики бифуркация является нетривиальным объектом и на данный момент не существует точных решений, описывающих течение крови через сосудистую бифуркацию, а существующие численные решения изобилуют множеством предположений: о распределении потоков, давлений на выходах и прочих. Эти предположения в существенной мере обуславливают характер течения через бифуркацию. Существующие предположения, к примеру закон Мюррея [2], который довольно часто используется в задачах о течении через сосудистую бифуркацию в довольно слабой степени соответствует реально картине течения, особенно в случае наличия сосудистых патологий: аневризма аорты, стеноз коронарной артерии итп [3, 4].



Цель настоящей работы - выполнить экспериментальное исследование течения моделирующей кровь жидкости через различные варианты модельных сосудистых бифуркаций, а также через анатомические фантомы артерий. В результате ожидается получить уточняющие параметры распределения потока на бифуркациях в зависимости от диаметра материнской и дочерних ветвей, а также углов их отхождения. Подобные исследования крайне необходимы для верификации численных расчетов и оправданного задания в них краевых условий. Работа выполнена при поддержке гранта РФФ 20-71-10034, (<http://rscf.ru/Project/20-71-10034>).

ЛИТЕРАТУРА

1. Louvard, Y., Medina, A. *Definitions and classifications of bifurcation lesions and treatment* EuroIntervention. 2015. V. 11, Issue V, Pp. V23–V26).
2. Painter P.R., Ed'en P., Bengtsson H.U. *Pulsatile blood flow, shear force, energy dissipation and Murray's Law*. Theor. Biol. Med. Model. 2006. v. 3, Issue 31.
3. Tikhvinskii D.V., Merzhoeva, L.R., Chupakhin, A.P., Karpenko, A.A., Parshin, D.V. *Computational analysis of the impact of aortic bifurcation geometry to AAA haemodynamics* Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2022. V. 37, Issue 5, Pp. 311–329.
4. Gaifutdinov R.A., Kuyanov Yu.O., Khelimsky D.A., Krestyaninov O.V., Tulupov A.A., Parshin D.V. *Towards effects from stent implantation into coronary bifurcation stenosis: experiment and simulation*. Siberian Scientific Medical Journal. 2024. V. 44, Issue 1, Pp. 23–31.

ЛОКАЛЬНАЯ АБСОЛЮТНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЗАТОПЛЕННОЙ СТРУИ

Л. Р. Гареев, Ю. С. Зайко, Н. М. Экстер

НИИ механики МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва

Целью является анализ длины L участка локальной абсолютной неустойчивости в затопленной струе (H — ширина струи). Начальный профиль скорости определяется двумя параметрами ξ, ζ , как это сделано в [1]. Проводится численный анализ эволюции струи в покоящейся окружающей жидкости. После чего выполняется анализ неустойчивости локальных профилей скорости полученной струи с некоторым шагом вдоль оси z , направленной вниз по потоку. По поведению линий уровня $\text{Im}\omega = 0$ (ω — частота) на комплексной плоскости волнового числа α определяется, является профиль абсолютно или конвективно неустойчивым (см. фиг. 1а). Для 600 различных начальных профилей скорости (задаваемых параметрами ξ, ζ) определена длина участка локальной абсолютной неустойчивости (фиг. 1б). На следующем этапе, используя алгоритм, описанный в [2], ищется геометрия устройства, формирующего струю с начальным профилем из области с наиболее длинным участком локальной абсолютной неустойчивости (жёлтая область на фиг. 1б). Экспериментальный анализ такой струи является предметом дальнейших исследований. Предполагается, что достаточно длинная область локальной абсолютной неустойчивости струи позволит обнаружить абсолютную неустойчивость экспериментально, так как достаточно протяженная вниз по потоку область локальной абсолютной неустойчивости приводит к глобальной неустойчивости течения [3]. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 20-19-00404-П).

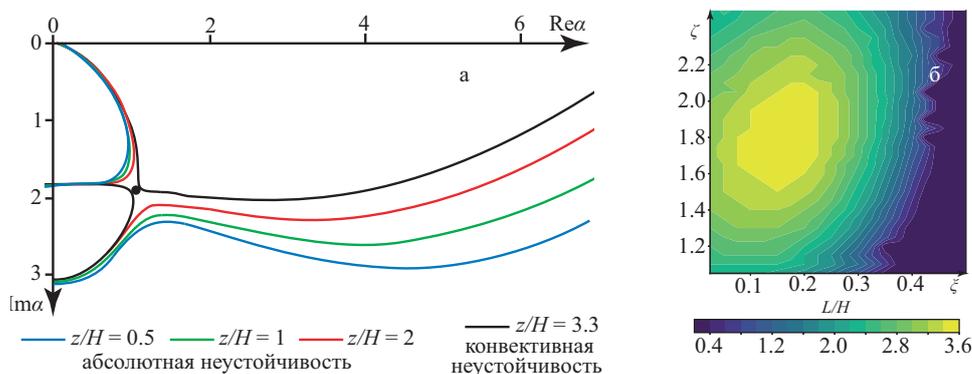


Рис. 1: (а) Линии уровня $\text{Im}\omega = 0$ на плоскости $\alpha \in \mathbb{C}$ для профилей скорости на различных удалениях от начала струи; чёрный круг отмечает окрестность седловой точки. (б) Заливкой на плоскости (ξ, ζ) показана длина участка локальной абсолютной неустойчивости для струи с соответствующим начальным профилем скорости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vedeneev V., Nikitin N. *Absolute instability of plane incompressible jets*. J. Fluid Mech. 2023. V. 962. A4.
2. Спасова А. А., Зайко Ю. С. *Разработка алгоритма формирования затопленной струи с заданными характеристиками профиля скорости*. ПМТФ. 2023. Т. 64. № 4. С. 67–75.
3. Le Dizes S., Huerre P., Chomaz J.M., Monkewitz P.A. *Linear global modes in spatially developing media*. Philos. Trans. R. Soc. London A. 1996. V. 354. № 1705. P. 169–212.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ “ОРТОГОНАЛЬНЫХ ЭФФЕКТОВ”
В ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ МДТТ****Д. В. Георгиевский**

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
Научный центр мирового уровня “Сверхзвук – МГУ”, Москва*

Некоторые эффекты напряжённо-деформированного состояния, такие как виброползучесть [1], ускорение ползучести [2] и ретчеттинг [3], наблюдаемые и изучаемые в экспериментальной механике деформируемого твёрдого тела, предлагается моделировать на основе определяющих соотношений, реализуемых в тензорно нелинейных вязкоупругих моделях максвелловского типа [4]. Привлекается аппарат нелинейных изотропных тензор-функций, зависящих от двух симметричных тензорных аргументов [5], [6], [7], [8]. Приводятся примеры сложного напряжённного состояния в трубчатом образце, когда имеет место существенный непропорциональный рост во времени осевой компоненты деформации при совместном действии постоянной осевой и колебательной сдвиговой нагрузок по сравнению со случаем действия только осевой нагрузки. Вводятся понятия обобщённого и комбинированного ретчеттинга в условиях сложного напряжённного состояния [9].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 24-21-20008).

ЛИТЕРАТУРА

1. Локощенко А. М. *Виброползучесть металлов при одноосном и сложном напряжённных состояниях*. Изв. РАН. МТТ. 2014 №. 4. С. 111–120.
2. Анисимов А. Б. *Об эффекте “ускорения ползучести” в теории вязкоупругости*. Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2007. № 1 С. 57–61.
3. Васин Р. А., Быля О. И., Чистяков П. В. *О некоторых тенденциях в исследовании ретчеттинга*. Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2021. № 2 С. 57–60.
4. Ильюшин А. А., Победря Б. Е. *Основы математической теории термовязкоупругости*. М.: Наука, 1970.
5. Лохин В. В., Седов Л. И. *Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов*. ПММ. 1963. Т. 27 Вып. 3 С. 393–417.

6. Spencer A. J. M. *Theory of Invariants*. Continuum Physics. N.-Y.: London. 1971. V 1 Part III P. 239–353.
7. Георгиевский Д. В. *Избранные задачи механики сплошной среды*. М.: ЛЕНАНД, 2018.
8. Георгиевский Д. В. *Нелинейные тензор-функции двух аргументов и некоторые “ортогональные эффекты” напряжённо-деформированного состояния*. Изв. РАН. МТТ. 2020. № 5 С. 21–26.
9. Георгиевский Д. В. *Тензорно нелинейные вязкоупругие модели максвелловского типа: виброползучесть и ретчеттинг*. Изв. РАН. МТТ. 2024. № 2.

ИЗМЕНЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ КРУГОВЫХ СКВОЗНЫХ КОНЦЕНТРАТОРОВ НАПРЯЖЕНИЙ В ПЛАСТИНАХ ПОСЛЕ ПОВЕРХНОСТНОГО УПРОЧНЕНИЯ

В. Е. Глебов

Самарский государственный технический университет

Вопрос об изменении геометрических параметров концентраторов напряжений типа круговых сквозных отверстий в деталях вследствие их поверхностного пластического упрочнения является важным с технологических позиций промышленных производств. В работе данный вопрос изучен для двух модельных задач. В первой определено изменение формы кругового сквозного отверстия, вырезанного в подвергшейся опережающему поверхностному пластическому деформированию прямоугольной пластине; во второй — изменение геометрии вырезанного в круговой цилиндрической пластине концентратора напряжений, поверхность которого подверглась упрочнению.

Для реконструкции напряжённо-деформированного состояния в пластинах использовались феноменологические подходы [1, 2]. Для решения поставленных задач применялся метод расчёта по первоначальным деформациям. Этот подход позволил свести обратные краевые задачи восстановления напряжённо-деформированного состояния в пластинах по частично известным экспериментальным данным к корректным задачам фиктивной термоупругости, которые затем решались численным методом на основе метода конечных элементов.

Анализ результатов модельных расчётов для прямоугольных плит из сплава ЭП742 размерами $100 \times 100 \times H$ мм и радиусом концентратора 10 мм, где $H = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ мм, и круговых цилиндрических пластин из сплава ЭИ698 высотой 50 мм, внешним радиусом $R_1 = 50$ мм и радиусом концентратора $R = \{5, 7.5, 10\}$ мм подтвердил адекватность используемых методов. Получены смещения образующих концентраторов относительно их первоначального положения. В случае опережающего поверхностного пластического упрочнения верхней грани прямоугольной пластины, опертой шарнирно, величина смещения образующей возрастает с увеличением высоты H пластины. В случае упрочнения поверхности кругового концентратора цилиндрической пластины при её шарнирном опирании и жесткой заделке, смещение образующей убывает с увеличением радиуса концентратора.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 23–29–00434).

ЛИТЕРАТУРА

1. Радченко В. П., Афанасьева О. С., Глебов В. Е. *Исследование влияния остаточных напряжений на геометрические параметры поверхностно упрочненного бруса* // Изв. Саратов. ун-та. Новая серия: Математика. Механика. Информатика, 2019. Т. 19, № 4. С. 464–478.
2. Радченко В. П., Саушкин М. Н. *Ползучесть и релаксация остаточных напряжений в упрочненных конструкциях*. М.: Машиностроение–1, 2005. 226 с.

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ В МИКРОКАНАЛЕ ДЛЯ УМЕНЬШЕНИЯ ПЕРЕПАДА ДАВЛЕНИЯ**Д. С. Глуздов, Е. Я. Гатапова***Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет*

Микроканалы применяются во многих областях на передовом уровне инженерии. Например для подачи охлаждающего газа в газотурбинных лопатках или для транспортировки и смешения жидкости в лабораториях на чипе. Высокое соотношение площади поверхности границ микроканала к объему может быть полезно в случае охлаждения микроэлектроники, но приводит к высокому перепаду давления, что усложняет работу с микроканалами.

Перепад давления возможно уменьшить при помощи граничных условий. Ранее нами был проведен литературный обзор, содержащий перспективные граничные условия для уменьшения перепада давления [1]. Большое количество работ показывают возможность существенного уменьшения перепада давления в микроканалах. В результате нами был выбран и исследован один из наиболее перспективных вариантов граничных условий.

Исследования были проведены при помощи численных методов, которые были верифицированы и валидированы [2]. Для исследований был реализован параметрический расчет с использованием различных параметров граничных условий. В частности написаны UDF скрипты для реализации условий Навье в Fluent.

В формуле (1) показан метод дискретизации граничного условия Навье в неявном виде.

$$u_f = \frac{b/n}{1 + b/n} u_c, \quad (1)$$

где u_f - скорость на границе, u_c - скорость в соседней ячейке, b - длина проскальзывания, n - расстояние нормали от центра ячейки к границе.

Для структурированных граничных условий на границе сравнение результатов расчетов проведено с экспериментальными данными из статьи [3]. Исследования проведены с помощью параметрического расчета для различных параметров геометрии микроканала.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 20-19-00722, <https://rscf.ru/project/20-19-00722/>.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gluzdov D.S., Gatapova E.Ya. *Microchannel surface structures for drag reduction*. Journal of Engineering Thermophysics. 2023. Т. 32. № 2. С. 214–241.
2. Gluzdov D.S., Gatapova E.Ya. *Friction reduction by inlet temperature variation in microchannel flow*. Physics of Fluids. 2021. Т. 33. № 6.
3. Karatay E., Haase A., Visser C., et al. *Control of slippage with tunable bubble mattresses*. Proceedings of the National Academy of Sciences. 2013. Т. 110. № 21. С. 8422–8426.

**ГАМИЛЬТОНОВА ДИНАМИКА СВЕРХАКТИВНЫХ
БРОУНОВСКИХ ЧАСТИЦ В ДВУХ- И ТРЕХМЕРНЫХ
ПОТЕНЦИАЛАХ****Д. С. Голдобин**

*Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь
Пермский государственный национальный исследовательский университет
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского*

Динамика броуновских частиц в жидкостях и газах является сильно диссипативной, поскольку размеры частиц велики по сравнению с размерами отдельных молекул, для которых величина тепловых флуктуаций кинетической энергии сопоставима с работой эффективных вязких сил. Для активных частиц (каталитические моторы – Янус-частицы и капли – и т.п.) типично возникновение достаточно большой силы самодвижения, баланс которой с вязкими напряжениями вызывает движение с почти постоянной по модулю скоростью, направлением которой можно манипулировать с помощью макроскопических сил или неоднородностей параметров среды. Для таких частиц предел большой диссипации (при наличии большой силы самодвижения) оказывается снова консервативным, влияние тепловых флуктуаций также мало. Этот предел принято назвать приближением «сверхактивной» броуновской частицы. Динамика такой частицы в поле макроскопических потенциальных сил оказывается гамильтоновой, но в противоположность привычным в классической механике уравнениям для движения точечных масс, здесь значение Гамильтониана H не параметризует множество траекторий – физический смысл имеют только траектории с $H = 0$ [1, 2]. Данный пример гамильтонова формализма не является уникальным в физике – он полностью подобен гамильтонову формализму для геометрической оптики, с потенциалом вместо неоднородного поля коэффициента преломления света.

В работе исследуется детерминированная динамика сверхактивных броуновских частиц в двух- и трехмерных потенциалах. Приводятся интегралы движения для непрерывных вращательных симметрий. Охарактеризованы и сопоставлены между собой случаи двумерного, осесимметричного и неосесимметричного трехмерного потенциалов. Обнаружено сильное влияние интегралов вращательной симметрии движения на хаотические и квазипериодические орбиты. Получено сечение рассеяния для центрально-симметричных потенциальных ям и препятствий гауссовой формы в зависимости от скорости самодвижения.

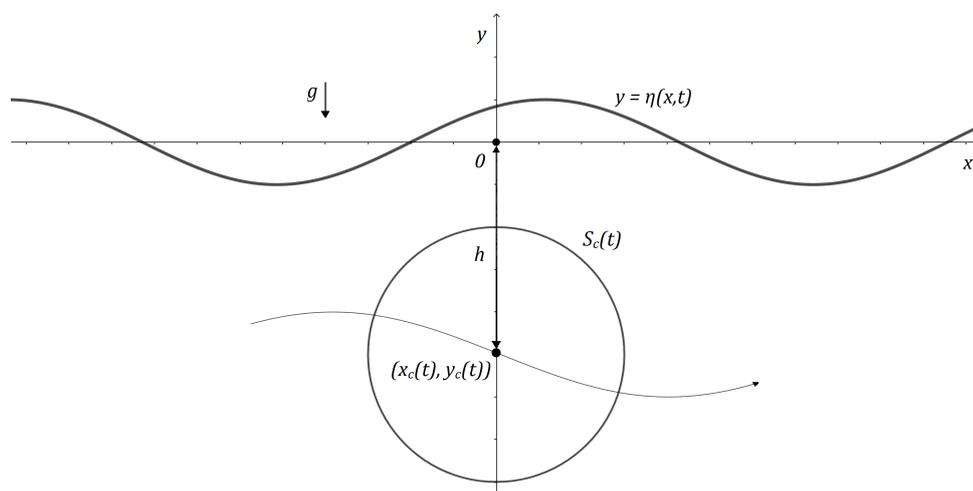
Работа выполнена при поддержке РФФ (грант № 23-12-00180).

ЛИТЕРАТУРА

1. Aranson S., Pikovsky A. *Confinement and Collective Escape of Active Particles* Physical Review Letters. 2022. V. 128. P. 108001.
2. Pikovsky A. *Deterministic active particles in the overactive limit* Chaos. 2023. V. 33. P. 113114.

**НЕСТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЦИЛИНДРА ПОД
ПОВЕРХНОСТЬЮ ГЛУБОКОЙ ЖИДКОСТИ****А. Е. Голиков, Н. И. Макаренко***Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск*

Рассматривается нелинейная задача о свободном и вынужденном движении кругового цилиндра под поверхностью бесконечно глубокой идеальной жидкости. Используется предложенный Л.В. Овсянниковым [1] метод редукции начально краевой задачи для уравнений Эйлера к эквивалентной системе граничных интегродифференциальных уравнений на свободной поверхности. При наличии погруженного тела дополнительно используется преобразование Милн-Томсона граничных интегральных операторов, позволяющее получить замкнутую систему уравнений на свободной поверхности [2]. В случае движения незакрепленного цилиндра также учитывается действие на него возникающих гидродинамических нагрузок [3].



Построена начальная по времени асимптотика решения, описывающего всплытие и погружение цилиндра с плавучестью, отличной от нейтральной, из состояния покоя. Проведен сравнительный анализ с асимптотическим решением, описывающим начальную стадию неустановившегося течения жидкости при заданном движении цилиндра [4].

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 21-71-20039).

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др. *Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн*. Новосибирск: Наука, 1985.
2. Makarenko N. I. *Nonlinear interaction of submerged cylinder with free surface*. J. Offshore Mech. Arctic Engng. 2003. V.125, № 1. P. 72-75.
3. Голиков А. Е., Макаренко Н. И. *Гидродинамические нагрузки при разгоне цилиндра под свободной поверхностью*. ПМТФ, 2022, Т. 63, № 5, С. 89-99.
4. Kostikov V. K., Makarenko N. I. *Unsteady free surface flow above the moving circular cylinder*. J. Engng Math., 2018, V. 112, P. 1-16.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЙ В ПЛОСКИХ КАНАЛАХ С ПОДАТЛИВЫМИ СТЕНКАМИ

Е. С. Голуб^{1,2}, А. В. Бойко³, А. П. Чупахин^{1,2}

¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

²Новосибирский государственный университет

³Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск

Исследование влияния вязкоупругих свойств стенок канала на устойчивость течения является важной задачей фундаментальной гидродинамики и имеет практическое применение. Результаты исследования могут быть использованы в медицине при описании течения крови в сосудах, в промышленности при описании движения жидкостей в трубопроводах. Основной задачей является контроль ламинарно-турбулентного перехода путём варьирования податливости стенок. Ламинаризация потока может значительно снижать трение о стенки, а турбулизация позволяет ускорить теплообмен в жидкости.

В работе проводится численное исследование устойчивости течения Пуазейля вязкой несжимаемой жидкости в канале с податливыми стенками, выполненными из различных модельных вязкоупругих материалов. Ранее эта задача была решена для течений жидкости над многослойным податливым покрытием [1]. Распространение трёхмерных возмущений в потоке описывается уравнениями Навье-Стокса, сами возмущения разделяются на симметричные и антисимметричные по отношению к оси канала. Особенностью работы является использование модели объёмного типа на основе уравнений Навье для описания малых колебаний покрытий. Вязкоупругие свойства материалов покрытий описываются при помощи модели Кельвина-Фойгта. Численный расчёт основан на методе коллокаций. Проведено численное моделирование зависимости критического числа Рейнольдса от свойств материалов стенок и различных толщин покрытий. Исследовано влияние податливых и упругих свойств материалов на устойчивость течения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Даржаин А. Э., Бойко А. В., Кулик В. М., Чупахин А. П. *Анализ устойчивости пограничного слоя плоской пластины над двухслойным податливым покрытием конечной толщины*. ПМТФ. 2019. Т. 60. № 4. С. 35–46.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ КОЛЕБАНИЙ НА МЕЖФАЗНУЮ ПОВЕРХНОСТЬ В ДЛИТЕЛЬНО СУЩЕСТВУЮЩЕМ ГАЗОВОМ ПУЗЫРЬКЕ В ЖИДКОСТИ

Р. Н. Голых, А. Р. Барсуков

Бийский технологический институт (филиал) АлтГТУ, Бийск

Один из наиболее эффективных способов увеличения межфазной поверхности «газ-жидкость» — создание ультразвуковой кавитации в сплошной жидкой фазе, которая позволяет возбуждать поверхностные волны на стабильно существующих газовых пузырьках, образуемых в рамках барботажного процесса. Предложена диффузионно-термодинамическая модель эволюции размеров сферического газового пузырька в сферическом приближении. Построена замкнутая система уравнений эволюции размера пузырька, распределения концентраций газовых компонентов в нём и распределения температуры.

На основании предложенного представления с использованием свойств равномерной сходимости интегралов получены приближённые уравнения, описывающие эволюцию концентраций газовых компонент и температуры вблизи границы пузырька вместе с радиусом последнего с использованием аппарата дробной производной по времени. Численное решение предложенных уравнений позволило найти диапазоны режимов ультразвукового воздействия, обеспечивающих стабильное существование барботажного пузырька без схлопывания, в зависимости от его размеров и начального содержания газовых компонент.

Далее, найдя условия стабильного существования барботажного пузырька, был проведён анализ формирования капиллярных волн. Построено уравнение для формирования волны фиксированной длины на поверхности пузырька на основании точного решения уравнения Лапласа для потенциала скорости окружающей жидкости с граничными условиями «капиллярного скачка». На основании построенного уравнения в частных производных выведено уравнение формирования волн произвольного профиля, но малой амплитуды, на всей оболочке пузырька с использованием аппарата дробных производных по времени.

Выявлены собственные частоты колебаний пузырька. Установлены закономерности влияния микроударных волн, образованных при схлопывании кавитационных микропузырьков, на колебания сферической поверхности стабильно существующего барботажного пузырька. Предложен математический подход, позволяющий учесть влияние кривизны сферической поверхности на искажение капиллярных волн.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-12-00278, <https://rscf.ru/project/23-12-00278/>

ПРИНЦИПЫ КЛАССИФИКАЦИИ ТРЁХМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ С ИСПАРЕНИЕМ, ИЗУЧАЕМЫХ НА ОСНОВЕ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ

О. Н. Гончарова

Алтайский государственный университет, Барнаул

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

Трёхмерное обобщение решения Остроумова–Бириха классических уравнений конвекции, записанных с учётом взаимообратных эффектов термодиффузии, описывает установившиеся поступательно-вращательные течения жидкости и газопаровой смеси в бесконечном канале. Данное решение имеет групповую природу и является частично инвариантным решением ранга 2 дефекта 3. Характерная его особенность состоит в том, что функция температуры содержит постоянный параметр A , который трактуется как температурный градиент на поверхности раздела жидкость–газ, и его наличие хорошо согласуется с явлением испарения жидкости под действием спутного потока газа. Структура решения позволяет осуществить редукцию исходной трёхмерной задачи к цепочке численно решаемых двумерных. При выборе значений параметров для проведения численных исследований учитываются режимные параметры эксперимента, допускаемые экспериментальной установкой (толщины слоёв рабочих сред, скорость прокачки газа и рабочая температура), и имеющиеся экспериментальные данные — значения продольных градиентов A на межфазной поверхности, полученные на основе экспериментальных термограмм. Такой выбор входных данных позволяет максимально точно учесть условия, при которых в физических экспериментах реализуются режимы испарительной конвекции.

Изучены виды возникающих течений, условия формирования валиковой конвекции, приповерхностных горячих и холодных плёнок, режимов с деформированными тепловыми структурами в жидкости и тепловыми плюмами в парогазовом слое, условия деформации и/или расщепления продольных валов под действием гравитационных и термокапиллярных сил. Разработаны принципы классификации трёхмерных течений с испарением (конденсацией) на основе выделения топологически разных классов течений и анализа структуры теплового поля.

На примере систем этанол–воздух и HFE7100–воздух выполнен анализ температурных и гидродинамических характеристик, параметров массопереноса и паросодержания. С помощью точного решения описаны изменения основных характеристик конвективных течений в двухслойной системе, вызванные вариацией рабочих параметров эксперимента, в рамках различных постановок краевых задач. Обсуждаются границы применимости математической модели и изучаемого точного решения на основе сравнения с экспериментальными результатами.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 22-11-00243, <https://rscf.ru/project/22-11-00243/>).

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ С УЧЕТОМ ИХ МАКРО- И МИКРОГЕОМЕТРИИ

И. Г. Горячева

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлinskого РАН, Москва

При контактном взаимодействии реальных тел область контактного взаимодействия, как правило, дискретна в силу шероховатости поверхностей. Для изучения влияния топографии поверхности на контактные характеристики (сближение тел при нагружении, распределение номинальных (осредненных) и фактических давлений на отдельных пятнах контакта, номинальной и фактической области контакта), а также на напряженно-деформированное состояние приповерхностных слоев контактирующих тел необходимо решать задачу дискретного контакта, т.е. задачу со смешанными граничными условиями для системы пятен контакта.

Для решения задач этого класса предложен метод, основанный на моделировании контактного взаимодействия на двух масштабных уровнях. Макромасштаб связан с характерным размером R_a номинальной области контакта, а микромасштаб - с характерным размером неровностей и расстоянием между ними l_a . При $l_a \ll R_a$ и заданных характеристиках микрогеометрии (средний радиус кривизны неровностей, расстояние между ними и высотное распределение) взаимодействующих тел решается задача о сближении двух полупространств, одно из которых жесткое, обладающее соответствующим микрорельефом, а второе – деформируемое. На основании построенного решения, в частности, определяется зависимость сближения полупространств от действующего номинального давления. Эта зависимость используется затем для построения интегрального уравнения контактной задачи о сближении деформируемых тел с заданными макроформой и микрогеометрией (макромасштаб).

В качестве примера рассматриваются контактные задачи о внедрении цилиндрического шероховатого штампа в упругий слой [1] и в тонкий вязкоупругий слой [2] на жестком основании, а также осесимметричного шероховатого штампа в двухслойное упругое основание.

Разработанные модели позволяют не только рассчитывать напряжения в контакте упругих тел, обладающих поверхностным микрорельефом, но и разрабатывать методы управления параметрами микрогеометрии поверхностей для достижения требуемых характеристик контактного взаимодействия (распределения давлений, внутренних напряжений и т.д.).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-49-02010).

ЛИТЕРАТУРА

1. Горячева И. Г. *Механика фрикционного взаимодействия*. М.: Наука, 2001.
2. Горячева И. Г., Яковенко А. А. *Внедрение в тонкий вязкоупругий слой жесткого цилиндра с плоским шероховатым основанием*. ПМТФ. 2021. Т. 62. № 5. С. 22–37.

ОБОБЩЕННЫЙ ПРИНЦИП БРЕНЬЕ И ПРОБЛЕМА ЗАМЫКАНИЯ ИЕРАРХИИ ЛАНДГРЕНА-МОНИНА-НОВИКОВА ДЛЯ ПОЛЯ ВИХРЯ

В. Н. Гребенев¹, А. Н. Гришков²

¹ *Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий, Новосибирск*

² *Институт математики и статистики, Университет Сан Пауло, Сан Пауло, Бразилия*

Концепция Бренье – представление решения уравнений идеальной несжимаемой гидродинамики в терминах вероятностных мер на множестве лагранжевых траекторий в случае их стохастичности, является обобщением принципа наименьшего действия Арнольда построения гладких решений уравнений Эйлера. В настоящей работе вариационный обобщенный принцип Бренье (Brenier, J. Am. Math. Soc. 1989) применяется для замыкания бесконечной цепочки уравнений Ландгрена–Монина–Новикова на n -точечные функции плотности распределения вероятности f_n поля вихря двумерных турбулентных потоков. Кроме того, в рамках статистического подхода предложена аппроксимация вариационной задачи с условиями на концах поставленная Шнирельманом (Матем. сб. 1985) для уравнения Эйлера.

Цель исследования – применить вариационный принцип Бренье для замыкания иерархии ЛМН на n -точечные ФПРВ поля вихря. т.е. эйлерову ФПРВ f_n^E . Вариационный принцип Бренье (ВПБ) является обобщением принципа наименьшего действия Арнольда построения гладких решений уравнений Эйлера. ВПБ описывает решения уравнений Эйлера в терминах вероятностных мер (обобщенных потоков) на множестве лагранжевых траекторий. Понятие обобщенных потоков является естественным для описания лагранжевых траекторий гидродинамической турбулентности в терминах случайных процессов. Будет дана интерпретация обобщенного потока в рамках статистического описания гидродинамической турбулентности. В качестве основной величины движения берется случайное поле завихренности и эволюция f_n^E определяется иерархией ЛМН в эйлеровой формулировке, которая выводится из статистической формы уравнений Эйлера с использованием закона Био–Савара. Переход к лагранжевой формулировке осуществляется эквивалентной записью ЛМН иерархии в виде уравнений вдоль характеристик (лагранжевы траектории) ЛМН иерархии. Статистическая форма ВПБ выводится с использованием уравнений характеристик и минимизация функционала выполняется по вариационной переменной f_{n+1}^E . При этом, согласно ВПБ два крайних условия, начальное и конечное распределение ФПРВ f_{n+1}^E вдоль характеристик должны быть заданы. Как результат, f_{n+1}^E определенная из вариационного принципа (оптимальный статистический ансамбль реализаций) позволяет замкнуть f_n^E -уравнение ЛМН иерархии. При этом статистическая форма ВПБ совпадает с вариационным принципом Арнольда (ВПА) (рассматривая формально предел при $n \rightarrow \infty$) для краевой задачи о геодезической соединяющей две заданные конфигурации жидкости. Постановка такой задачи впервые предложена Шнирельманом А.И. в Матем. сб. 1985 и изучена с привлечением дискретного аналога группы диффеоморфизмов для идеальной несжимаемой жидкости, которая не является классической в гидродинамике. В настоящей работе предложена другая аппроксимация этой задачи основанная на статистической версии уравнения Эйлера

т.е. ЛМН иерархии, которая более ориентирована на численные эксперименты, что представляет отдельную тему исследования.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00287, <https://rscf.ru/project/22-11-00287/>. А.Н. Гришков поддержан FAPESP (Brazil) проект 2021/09845-0.

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ 1+1 СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАТЕЛЬНО ВОЗБУЖДЕННОГО ХИМИЧЕСКИ РЕАГИРУЮЩЕГО ГАЗА

Ю. Н. Григорьев¹, Е. И. Капцов², С. В. Мелешко²

¹*Институт вычислительных технологий, Новосибирск*

²*Суранари технологический университет, Накхон Ратчасима, Таиланд*

В докладе рассмотрена система нестационарных одномерных уравнений газодинамики с учетом термохимической неравновесности как математическая модель теории точечного взрыва. В неравновесные процессы включены колебательное возбуждение молекул, диссоциация вблизи химического равновесия, эндотермическая реакция произвольного распада. Исследованы математические свойства системы. В частности, для нее найдены законы сохранения в дифференциальной (дивергентной) и интегральной формах. В рамках группового анализа системы для допустимой подгруппы Ли всех растяжений получено определяющее уравнение. Рассмотрено его частное решение, которое соответствует учитываемым неравновесным процессам. Найдены инварианты построенного оператора и представление соответствующих инвариантных (автомодельных) решений, для которых получена фактор-система уравнений. В качестве примера приложения фактор-системы численно решена задача о сильном взрыве линейного заряда («взрывающейся проволочки») для двух моделей химических реакций. Выполнено сравнение результатов расчетов с известным решением данной задачи в рамках классической газодинамики идеального газа. Сравнение показывает, что рассматриваемая система адекватно описывает эффекты термохимической неравновесности в ближней зоне за сильной ударной волной. Полученные результаты являются дальнейшим развитием теории точечного взрыва.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-11-00027, <https://rscf.ru/project/23-11-00027/>.

ОСОБЕННОСТИ ВОЛНОВОЙ ДИНАМИКИ И АКУСТИКИ МНОГОФАЗНЫХ, МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СРЕД

Д. А. Губайдуллин

ОСП Институт механики и машиностроения ФИЦ Казанский научный центр РАН

Представлены некоторые результаты изучения волновой динамики и акустики многофазных сред. Дано сравнение теоретических и экспериментальных данных, рассмотрены приложения.

Изучено распространение акустических возмущений в парогазовых полидисперсных (с произвольной функцией распределения включений по размерам) и дискретных многофракционных капельных и пузырьковых (с оболочкой вокруг пузырька) средах, а также в смесях жидкости с полидисперсными частицами разного сорта и пузырьками газа. Представлены математические модели, получены наиболее общие дисперсионные соотношения, исследованы высоко- и низкочастотные асимптотики коэффициента затухания, обсуждаются области применимости развитых теорий. Выведено уравнение радиальных колебаний пузырька, покрытого вязкоупругой оболочкой в вязкоупругой жидкости. Установлено существенное влияние оболочки вокруг пузырька газа на распространение волн в пузырьковых жидкостях. Выявлено хорошее согласие представленных результатов с опубликованными экспериментальными данными других авторов.

Исследовано распространение импульсных волн давления в жидкости, содержащей многослойные преграды разного сорта. Проведены расчеты по искажению акустического сигнала при диагностике многослойного образца, содержащего слой жидкости с полидисперсными пузырьками. На основе полученных результатов отражения звукового сигнала от слоя конечной толщины, содержащей аэрозоль или пузырьковую жидкость, выведены соотношения между длиной волны и толщиной слоя, при которых коэффициент отражения принимает экстремальные значения. Проиллюстрировано согласие теоретических и экспериментальных данных.

Теоретически и экспериментально изучены нелинейные колебания аэрозолей и поведение частиц в трубах в ударно- и безударно волновом режимах. Установлена немонотонная зависимость времени осаждения табачного дыма от степени заполнения закрытой трубы при резонансных частотах колебания поршня. Представлены результаты численных расчетов распространения ударных волн в газовзвесах и ударно-волновой разлет газозвеси в двухкомпонентный газ. Проиллюстрировано влияние сорта газа на динамику процесса. Показано хорошее согласие теории и опытных данных.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЯ КАТАЛИЗАТОРА ПРИ ВЫЖИГЕ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ КОКСОВЫХ ОТЛОЖЕНИЙ С МНОГОСТАДИЙНОЙ КИНЕТИКОЙ

И. М. Губайдуллин^{1,2}, О. С. Язовцева³

¹ Уфимский государственный нефтяной технический университет

² Институт нефтехимии и катализа УФИЦ РАН, Уфа

³ Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва

Моделирование выжига коксовых отложений из слоя катализатора – актуальная проблема современной физической химии [1]. Осаждение кокса в порах зерна существенно снижает каталитическую активность. Относительно простым и недорогим способом восстановления каталитической активности является окислительная регенерация – выжиг коксовых отложений с поверхности и из пор зерна катализатора кислород-содержащим газом. Цель окислительной регенерации заключается в максимальном удалении кокса с катализатора [2].

Основные проблемы, возникающие в процессе регенерации, связаны с воздействием высоких температур и окислительной среды [3]: порча катализатора, недостаточная степень выжига кокса, графитизация кокса при недостатке кислорода, изменение структуры катализатора, повышение хрупкости катализатора. Это приводит к необходимости прогнозирования течения процесса при различных технологических условиях, что может быть успешно реализовано с использованием математического моделирования [4].

Несмотря на разнообразие видов катализатора и особенности коксовых отложений, в окислительной регенерации можно выделить следующие общие закономерности: в первую очередь происходит выжиг легкогорючей части кокса при 250-300°C, далее следует выжиг устойчивой части кокса при 400-600°C [5]. Наиболее простым вариантом является выжиг отложений, состоящих из углерода и водорода, но при этом кокс может включать в себя, например, серу. Это вносит свои коррективы в технологию регенерации, поскольку выжиг легкогорючих сульфидов начинается уже при 200°C [6].

Настоящая работа посвящена численному исследованию процесса окислительной регенерации цилиндрического зерна алюмокобальтмолибденового катализатора с детальным описанием гетерогенной кинетики.

В качестве кинетической модели принята модель из работы [2]. Здесь представлена математическая модель слоя сферического катализатора без учета теплопроводности скелета. Упрощение модели в части теплопроводности, а также расчет сферического зерна вместо цилиндрического связаны с нехваткой вычислительных мощностей на момент проведения исследования – при переходе к цилиндрическому зерну задача сводится к осесимметричной постановке, что существенно увеличивает сложность вычислительного алгоритма [7] в сравнении с аналогичной задачей для сферического зерна [8].

Вычислительный алгоритм построен на основе явного интегро-интерполяционного метода [9] с использованием принципа расщепления по физическим процессам [10] – кинетические уравнения решены отдельно трехстадийным методом Рунге-Кутты пятого порядка точности [11].

Работа выполнена в рамках государственного задания Института нефтехимии и катализа УФИЦ РАН (тема No FMRS-2022-0078).

ЛИТЕРАТУРА

1. Reshetnikov S.I., Petrov R., Zazhigalov S., Zagoruiko A.N. *Mathematical modeling of regeneration of coked Cr-Mg catalyst in fixed bed reactors*. Chemical Engineering Journal. 2020. N 380.
2. Масагутов Р.М., Морозов Б.Ф., Кутепов Б.И. *Регенерация катализаторов в нефтепереработке и нефтехимии*. М.: Химия, 1987. 144 с.
3. Хрисониди В.А., Басманова В.Р. *Современные методы регенерации катализаторов, используемых в нефтегазовом синтезе* // The Scientific Heritage. 2020. №50-3.
4. Боресков Г.К., Слинько М.Г. *Моделирование химических реакторов*. Теоретические основы химической технологии. 1967. Т. 1. № 1. С. 5-16.
5. И.П. Мухленов, Е.И. Добкина, В.И. Дерюжкина. *Технология катализаторов*. Л.: Химия, 1979.
6. Патент № 2691078 С2 Российская Федерация, МПК В01J 38/62, В01J 38/52, В01J 38/56. Способ подготовки катализаторов гидрогенизационных процессов к окис-

- лительной регенерации : № 2017136879 : заявл. 20.10.2017 : опубл. 10.06.2019 / А. А. Пимерзин, П. А. Никульшин, Н. Н. Томина [и др.] ; заявитель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Самарский государственный технический университет».
7. Yazovtseva O.S., Gubaydullin I.M., Peskova E.E., Sukharev L.A., Zagoruiko A.N. *Computer Simulation of Coke Sediments Burning from the Whole Cylindrical Catalyst Grain*. Mathematics. 2023. Vol. 11, No. 3. P. 669. DOI: 10.3390/math11030669.
 8. Gubaydullin I.M., Peskova E.E., Yazovtseva O.S., Zagoruiko A.N. *Numerical Simulation of Oxidative Regeneration of a Spherical Catalyst Grain*. Mathematical Models and Computer Simulations. 2023. V. 15. P. 485–495. DOI: 10.1134/S2070048223030079.
 9. Самарский А.А. *Введение в теорию разностных схем*. М.: Наука, 1971.
 10. Марчук Г.И. *Методы расщепления*. М.: Наука, 1988. 263 с.
 11. E. Hairer, G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations II*. Springer-Verlag, 1996.

ИНВАРИАНТЫ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ НА ПЛОСКОСТИ

А. А. Давыдов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Полная классификация главных символов ростков типичных линейных уравнений 2-го порядка с частными производными на плоскости была получена в [1]. Помимо волнового уравнения, уравнения Лапласа и уравнения Трикоми-Чибрарио она включает и новые формы, в которые входит действительный параметр - инвариант гладких замен координат. В прикладных исследованиях последние формы встречались и ранее [2]. Недавно были найдены нормальные формы и для ряда параметрических случаев (см., например, [3], [4]).

В 2007 году была доказана структурная устойчивость сети характеристик для широкого класса таких уравнений [5], что естественно подводит к вопросу о нелокальных инвариантах и подходящих модельных формах этих уравнений (см., например, [6]), также встречавшимися ранее в приложениях [7].

Доклад посвящен теории нормальных форм уравнений в частных производных смешанного типа на плоскости и связанным с ними вопросам. Исследования проводятся при поддержке Программы развития МГУ, соглашение № 23-Ш05-25.

ЛИТЕРАТУРА

1. Давыдов А. А., Росалес-Гонсалес Э. *Полная классификация типичных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными на плоскости*. Докл. РАН. 1996. Т. 350. № 2. С. 151 – 154.
2. Пилия А. Д., Федоров В.И. *Особенности поля электромагнитной волны в холодной анизотропной плазме с двумерной неоднородностью*. ЖЭТФ. 1971. Т. 60. № 1. С. 389-400.

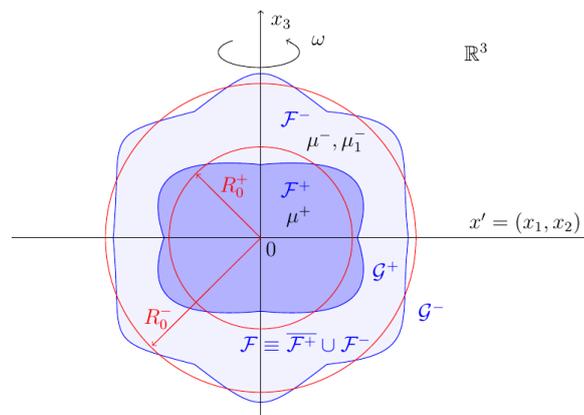
3. Давыдов А. А., Чинь Тхи Зиен Л. *Нормальные формы семейств линейных уравнений смешанного типа вблизи резонансных сложенных особых точек.* УМН. 2010. Т. 65. № 5(395). С. 189–190.
4. Богаевский И., А. *Неявные обыкновенные дифференциальные уравнения: перестройки и усиление эквивалентности.* Изв. РАН. Сер. матем.. 2014. Т. 78. № 6. С. 5 – 20.
5. Гришина Ю. А., Давыдов А. А. *Структурная устойчивость простейших динамических неравенств.* Динамические системы и оптимизация, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения академика Дмитрия Викторовича Аносова. Тр. МИАН. 2007. Т. 256. Наука, М.. С. 89 – 101.
6. Kasten J. A., *Solvability of the Boundary Value Problem for a Tricomi Type Equation in the Exterior of a Disk.* Journal of Mathematical Sciences. 2013. Т. 188. № 3. С. 268-272.
7. Бакиевич Н. И., *Задача Дирихле в кольце для уравнения смешанного типа.* Изв. вузов. Матем.. 1968. № 7. С. 3 – 9.

ФИГУРЫ РАВНОВЕСИЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ КАПИЛЛЯРНОЙ ДВУХФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ

И. В. Денисова

Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург

Мы ищем решение стационарной задачи с неизвестными границами для уравнений Навье–Стокса, соответствующих медленному жёсткому вращению вязкой двухфазной капли, состоящей из сжимаемой и несжимаемой жидкостей. При этом внутренней является несжимаемая жидкость. Она ограничена замкнутой неизвестной поверхностью, не пересекающейся с внешней границей. Сжимаемая жидкость баротропна. На границах действуют силы поверхностного натяжения. Доказано существование фигур равновесия \mathcal{F}^+ , \mathcal{F} , близких к вложенным шарам $B_{R_0^\pm}$ соответствующего радиуса ($R_0^+ < R_0^-$); $|\mathcal{F}^+| = |B_{R_0^+}|$. Предполагается, что скорость жидкости мала, а её плотность ρ совпадает с $\rho^+ > 0$ для несжимаемой части и мало отличается от постоянной $\rho^- > 0$ для сжимаемой части среды. \mathcal{G}^+ , \mathcal{G}^- – поверхности областей \mathcal{F}^+ и \mathcal{F} . Доказательство проводится с помощью теоремы о неявной функции.



Ранее существование поверхностей равновесия для конечных объёмов несжимаемой и сжимаемой двухслойных жидкостей, вращающихся вокруг неподвижной оси, было доказано в [1] и [2] соответственно.

Исследование проведено в случае отсутствия силы тяжести, т. е. наше двухфазное тело можно рассматривать, например, как планету с газовой атмосферой.

Работа выполнена по теме государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ для ИПМаш РАН (тема гос. задания № 124040800009-8).

ЛИТЕРАТУРА

1. Солонников В. А., *Задача о нестационарном движении двух вязких несжимаемых жидкостей*, Проб. мат. анализа. 2006. Т. 34. С. 103–121.
2. Denisova I. V., Solonnikov V. A. *Equilibrium Figures for a Rotating Compressible Capillary Two-Layer Liquid.*, Mathematics. 2024, Т. 12. № 1, 94.

ДЛИННЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ, ЗАХВАЧЕННЫЕ БЕРЕГАМИ, И БИЛЬЯРДЫ С ПОЛУЖЕСТКИМИ СТЕНКАМИ

С. Ю. Доброхотов

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлунского РАН, Москва

Под бильярдами с полужёсткими стенками мы понимаем динамические (гамильтоновы) системы, задаваемые на двумерной плоскости (x_1, x_2) гамильтонианами $H = D(x_1, x_2)(p_1^2 + p_2^2)$, где $D(x)$ - гладкая функция, обращающаяся в ноль на некоторой гладкой замкнутой кривой G , причем $grad G$ не обращается в ноль на G . Такие бильярды возникают в теории волн на воде в ограниченных и неограниченных бассейнах, функция D описывает дно бассейна и внутри бассейна принимает положительные значения. Кривая G - береговая линия. В работе [1] при условии интегрируемости гамильтоновой системы с гамильтонианом H были построены периодические по времени решения нелинейной системы уравнений мелкой воды в бассейнах с пологими берегами, локализованные в окрестности береговой линии. Соответствующие траектории гамильтоновой системы образуют некомпактные («нестандартные») торы Лиувилля, их проекции на плоскости (x_1, x_2) заматают кольцевую область и отражаются от некоторой простой каустики, находящейся внутри бассейна, и береговой линии, которая представляет собой «нестандартную» каустику. Дефект построенных в [1] решений состоит в требовании интегрируемости введенной гамильтоновой системы, которое практически не может быть выполнено в реальных ситуациях. Мы также рассматриваем вырожденные ситуации [2], когда «стандартная» каустика сильно приближается к береговой линии («нестандартной» каустике). Требование интегрируемости тогда исчезает и всегда возможно построение эффективных асимптотических волновых решений, имеющих небольшое число осцилляций по нормали к берегу (являющихся аналогами волн Стокса и Урселла). Соответствующие траектории сильно локализованы в узкой окрестности берега, при этом они всегда входят в береговую линию и отражаются от нее под углом 90 градусов. Таким образом мы имеем асимптотические решения похожие на известные в акустике решения типа

«шепчущей галереи», но при этом для их существования за счет «вырожденной» стенки (береговой линии) не требуется выпуклости двумерной области, в которой расположен бассейн, то есть области на двумерной плоскости (x_1, x_2) , в которых $D(x_1, x_2) > 0$. Рассмотрены примеры, в которых изучена связь локальных амплитуд береговых вол с углом наклона берега и с кривизной береговой линии.

Доклад основан на совместных исследованиях с М.М.Вотьяковой, Д.С.Миненковым, В.Е.Назайкинским и А.В.Цветковой, частично поддержанных Российским научным фондом, (проект Проект 24-11-00213).

ЛИТЕРАТУРА

1. Доброхотов С. Ю., Назайкинский В. Е., Цветкова А.В. *Нелинейные эффекты и заплеск береговых волн, порожденных бильярдами с полужесткими стенками, в рамках теории мелкой воды*. Труды МИАН, 2023. Т. 322. С. 1–13
2. Dobrokhotov S. Yu., Minenkov D. S., Votyakova M. M. *Asymptotics of Long Nonlinear Coastal Waves in Basins with Gentle Shores*. Russian Journal of Mathematical Physics. V. 31, No. 1, P. 79-93.

ВЛИЯНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ НА СКОРОСТЬ ВЗАИМНОЙ ДИФФУЗИИ В КОРРОДИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ

Д. С. Дудин, И. Э. Келлер

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

Изменение химического состава приповерхностных слоёв металлических материалов в условиях агрессивной окружающей среды, вызванное взаимной диффузией коррозионных веществ и компонентов сплава, проходит в напряжённом теле при работе лопаток в газотурбинных двигателях. Диффундирующие компоненты вызывают объёмные деформации среды, что порождает напряжения, градиент которых в свою очередь приводит к бародиффузии. Для описания таких процессов требуется связанная модель механодиффузии.

При написании связанной модели исследователь сталкивается с неоднозначностью определения скорости материальных объёмов. Уравнения диффузии компонент записываются относительно некоторой характеристической скорости [1], которая в общем случае не совпадает с конвективной, вводимой в механических уравнениях. Поэтому вводится гипотеза равенства характеристической и конвективной скорости. Для анализа влияния выбора типа характеристической скорости строятся две связанные модели взаимной диффузии и вязкоупругого деформирования, базирующиеся на барицентрической [2] и маркерной [3] скорости. Конститутивные уравнения модели удовлетворяют второму закону термодинамики, а тензора напряжений и деформаций записываются для смеси в целом.

Для оценки скорости протекания взаимной диффузии в связанной модели выведены коэффициенты взаимной диффузии в трёхкомпонентной среде Ni-Cr-Fe, определяющие релаксацию переменных состава в одномерной модельной задаче. Получены качественные различия коэффициентов при использовании разных моделей.

В модели на основе маркерной скорости обнаружена быстрая взаимная диффузия, определяемая вязкоупругими свойствами среды. Быстрый коэффициент взаимной диффузии составляется последовательным соединением диффузионных элементов, которое также встречается в коэффициенте взаимной диффузии Даркена [4], не учитывающего упруговязкость среды. Полученные результаты могут служить опорой для выбора характеристической скорости при описания механодиффузионных процессов в корродирующем материале.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дудин Д. С. *Обзор подходов к формулировке связанных уравнений взаимной диффузии в вязкоупругом теле*. Химическая физика и мезоскопия. 2022. Т. 24. № 3. С. 296–311.
2. Князева А. Г. *Нелинейные модели деформируемых сред с диффузией*. Физическая мезомеханика. 2011. Т. 14, № 6 С. 35–51.
3. Brassart L., Liu Q., Suo Z. *Mixing by shear, dilation, swap, and diffusion*. J. Mech. Phys. Solids. 2018. Vol. 112. С. 253–272.
4. Mehrer H. *Diffusion in Solids*. Springer, 2007.

АТТРАКТОРЫ ВНУТРЕННИХ И ИНЕРЦИОННЫХ ВОЛН: ВОЛНОВАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ В ЗАМКНУТЫХ ОБЛАСТЯХ

Е. В. Ерманюк

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Исследование волновых процессов во вращающейся и стратифицированной жидкости является важной частью гео- и астрофизической гидродинамики [1]. Внутренние и инерционные волны удовлетворяют специфическому дисперсионному соотношению, в которое входит частота возмущающего воздействия и направление распространения волн, но не входит масштаб длины. С этим обстоятельством связано большое разнообразие форм волновых движений (моды, пучки), явление фокусировки при отражении от наклонной стенки, существование нетривиальных замкнутых конфигураций волновых пучков (волновых аттракторов) в замкнутых областях [2, 3], ряд ключевых особенностей развития неустойчивости волн по механизму триадного резонанса [4]. В докладе рассмотрен обзор современного состояния исследований развития волновой турбулентности в замкнутых областях, заполненных стратифицированной или вращающейся жидкостью. Особое внимание уделено постановкам задач, допускающим существование волновых аттракторов, в которых возможно наблюдение каскадов триадных волновых взаимодействий [5, 6], нетривиальных крупномасштабных азимутальных структур и зональных течений [7, 8].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 23-41-00090).

ЛИТЕРАТУРА

1. Davidson P. A. *Turbulence in Rotating, Stratified and Electrically Conducting Fluids*. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

2. Maas L., R.M., Benielli D., Sommeria J., Lam F., P.A. *Observations of an internal wave attractor in a confined stably stratified fluid*. Nature. 1997. V.388. P. 557-561.
3. Rieutord M., Georgeot B., Valdetaro L. *Wave Attractors in Rotating Fluids: A Paradigm for Ill-Posed Cauchy Problems*. Phys. Rev. Lett. 2000. V.85. 4277.
4. Dauxois T., Joubaud S., Odier P., Venaille A. *Instabilities of Internal Gravity Wave Beams*. Annu. Rev. Fluid Mech. 2018. V. 50. P. 131-156.
5. Scolan H., Ermanyuk E., Dauxois T. *Nonlinear fate of internal waves attractors*. Phys. Rev. Lett. 2013 . V.110. 234501.
6. Brouzet C., Ermanyuk E., Joubaud S., Subgatullin I., Dauxois T. *Energy cascade in internal wave attractors*. Europhys. Lett. 2016. V.113. 44001.
7. Subbotin S., Shmakova N., Ermanyuk E., Kozlov V. *Stewartson layer instability and triadic resonances in rotating sphere with oscillating inner core*. Phys. Fluids. 2022. V.34. 064103.
8. Subbotin S., Shmakova N., Kozlov V., Ermanyuk E. *Nonlinear regims of internal wave attractors generated by a precessing lid: zonal flows and Rossby waves*. Phys. Fluids. 2023. V.35. 074110.

УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ В СДВИГОВОМ ТЕЧЕНИИ ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ

В. Е. Ермишина, А. А. Чесноков

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Уединенные внутренние волны часто встречаются в прибрежных и океанических течениях. Характерная особенность внутренних волн, обуславливающая интерес к их исследованию, состоит в том, что амплитуда уединенной волны может существенно превышать начальную толщину одного из слоев, вдоль границы которых распространяется волна. Проведено исследование условий существования решения в форме уединенной волны для уравнений динамики длинных волн для двухслойного стратифицированного течения в приближении Буссинеска. Рассмотрена три модели: с негидростатически распределенным давлением обоих слоев, с негидростатическим распределением давления в одном из слоев и модель, в которой были линеаризованы слагаемые со старшими производными. В терминах условий гиперболичности модели без учета негидростатической поправки давления сформулированы ограничения на сдвиг скорости в слоях. Далее получены ОДУ, определяющие профиль уединенной волны в зависимости от двух безразмерных параметров (чисел Фруда), связанных со скоростью волны и сдвигом скорости в слоях для невозмущенного потока. В плоскости чисел Фруда определена область параметров, для которой возможно построение решения в форме уединенной волны. Выполнен анализ характерных особенностей уединенных волн в рамках данных моделей. Показано, что при числах Фруда близких к внешней границе и удаленных от внутренней границы области существования решения амплитуда волн является наибольшей. В этом случае наблюдаются существенные различия между полностью негидростатической моделью и более простыми моделями, учитывающими негидростатичность давления только в одном из слоев. Если параметры потока на бесконечности таковы, что числа Фруда близки

к внутренней границе области существования нетривиального решения, то соответствующая волна пологая и имеет сравнительно небольшую амплитуду. В этом случае рассматриваемые модели дают близкие результаты.

Полученные условия существования можно распространить на случай трехслойного течения, симметричного относительно средней линии, тогда модель будет применима для описания симметричных волн второй моды.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 21-71-20039).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ermishina V. E., Chesnokov A. A. *Finite-amplitude internal solitary waves in a shear flow of a two-layer fluid* Interfacial Phenomena and Heat Transfer. 2024. № 1. P. 12.

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА, ОПИСЫВАЮЩАЯ ДВИЖЕНИЕ РАСТВОРОВ ПОЛИМЕРОВ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В РЕОЛОГИЧЕСКОМ СООТНОШЕНИИ

А. В. Звягин

Воронежский государственный университет

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, на отрезке времени $[0, T]$, $T > 0$, рассматривается следующая начально–краевая задача:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu \Delta v - \kappa \frac{\partial \Delta v}{\partial t} - 2\kappa \operatorname{Div} \left(\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_i} \right) - \\ & - \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\beta)} \operatorname{Div} \int_0^t (t-s)^{-\beta} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds + \operatorname{grad} p = f; \\ & z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s; t, x)) ds, \quad t, \tau \in [0, T], \quad x \in \Omega, \end{aligned}$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad (t, x) \in (0, T) \times \Omega; v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \Omega; \quad v|_{\partial\Omega \times [0, T]} = 0.$$

Здесь v – вектор–функция скорости, p – функция давление среды, f – плотность внешних сил, $z(\tau; t, x)$ – траектория частицы среды, указывающая в момент времени τ расположение частицы среды, находящейся в момент времени t в точке x , $\alpha > 0$ – скалярный параметр, $\mu_0 > 0$, $\mu_1 \geq 0$, $0 < \beta < 1$ – некоторые константы. $\Gamma(\beta)$ – гамма–функция Эйлера, $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ij}(v))$, $\mathcal{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$, $i, j = \overline{1, n}$ – тензор скоростей деформации, $\operatorname{Div} A$ – дивергенция тензора A , то есть вектор $\operatorname{Div} A = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{1j}(t, x)}{\partial x_j}, \dots, \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{nj}(t, x)}{\partial x_j} \right)$.

Начально–краевая задача описывает движение слабо концентрированных водных растворов полимеров с памятью вдоль траектории движения частиц среды (см. [1]–[3]). Данная модель основана на реологическом соотношении Кельвина–Фойгта с дробной производной Капуто. В докладе описывается изучаемая задача и доказываются существование слабой разрешимости начально–краевой задачи.

Теорема 1. Пусть $f \in L_2(0, T; V^{-1})$ и $v_0 \in V^1$. Тогда начально–краевая задача имеет хотя бы одно слабое решение $v \in W := \{v : v \in L_\infty(0, T; V^1), v' \in L_2(0, T; V^{-1})\}$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда No 23–71–10026.

ЛИТЕРАТУРА

1. Звягин А. В. *Задача оптимального управления с обратной связью для математической модели движения слабо концентрированных водных полимерных растворов с объективной производной.* Сиб. матем. журн. 2013. Т. 54. № 4. С. 807–825.
2. Звягин А. В. *О слабой разрешимости и сходимости решений дробной альфа-модели Фойгта движения вязкоупругой среды.* УМН. 2019. Т. 74. № 3. С. 189–190.
3. Звягин А. В. *Исследование слабой разрешимости дробной альфа-модели Фойгта.* Изв. РАН. Сер. матем. 2021. Т. 85. № 1. С. 66–97.

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНО–ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ С ТЕМПЕРАТУРОЙ

А. В. Звягин, Е. И. Костенко

Воронежский государственный университет

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^2 . В $Q_T = [0, T] \times \Omega$, где $T \geq 0$ рассматривается начально–краевая задача:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - 2\text{Div} [\nu_0(I_2(v))\mathcal{E}(v)] - 2\text{Div} [\nu(\theta)\mathcal{E}(v)] - \varkappa \frac{\partial \Delta v}{\partial t} + \nabla p = f;$$

$$\text{div } v(t, x) = 0; \quad v(t, x) |_{t=0} = v_0; \quad v(t, x) |_{[0, T] \times \partial\Omega} = 0;$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \chi \Delta \theta = [2\nu(I_2(v))\mathcal{E}(v) + 2\nu(\theta)\mathcal{E}(v) + \varkappa \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial t}] : \mathcal{E}(v) + g;$$

$$\theta |_{t=0} = \theta_0; \quad \theta |_{[0, T] \times \partial\Omega} = 0.$$

Здесь $v(t, x)$, $\theta(t, x)$ и $p(t, x)$ — вектор–функция скорости, функции температуры и давления среды соответственно, $\mathcal{E}(v) = \{\mathcal{E}_{ij}\}_{i,j=1}^n$ — тензор скоростей деформации с компонентами $\mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$, функция I_2 определяется равенством: $I_2^2 = \sum_{i,j=1}^n \mathcal{E}_{ij}^2(v)$, f — плотность внешних сил, g — источник внешнего тепла, $\varkappa > 0$ — время ретардации (запаздывания), $\chi > 0$ — коэффициент теплопроводности, ν_0 — начальная нелинейная вязкость жидкости, ν — вязкость жидкости, $0 < C_1 \leq \nu_0 < \nu \leq C_2$.

Начальная вязкость среды ν_0 задается непрерывно дифференцируемой скалярной функцией, для которой предполагаются следующие ограничения: а) $|s\nu'_0(s)| \leq C_3$, $s \in [0, \infty)$; б) $-s\nu'_0(s) \leq \nu_0(s)$ при $\nu'_0(s) < 0$.

Начально–краевая задача описывает движение жидкости типа Фойгта с начальной нелинейной вязкостью и с вязкостью, зависящей от температуры (см. [1]–[4]).

Теорема 1. Пусть функция $\nu(s) \in C^2(-\infty, +\infty)$, $0 < C_1 \leq \nu_0 < \nu \leq C_2$, ν_0 — удовлетворяет условиям *a*) и *b*), $f \in L_2(0, T; V^*)$, $g \in L_1(0, T; H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega))$, $v_0 \in V$, $\theta_0 \in W_p^{1-2/p}(\Omega)$. Тогда в случае $n = 2$ при $1 < p < 4/3$ и в случае $n = 3$ для $1 < p < 5/4$ существует слабое решение рассматриваемой начально–краевой задачи.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда No 23–71–10026.

ЛИТЕРАТУРА

1. Звягин А. В., Орлов В. П. *Разрешимость задачи термовязкоупругости для одной модели Осколкова*. Изв. вузов. Матем. 2014. № 9. С. 69–74.
2. Звягин А. В., Орлов В. П. *Исследование разрешимости задачи термовязкоупругости для линейно упруго–запаздывающей жидкости Фойгта*. Мат. заметки. 2015. Т. 97. № 5. С. 681–698.
3. Звягин А. В. *Оптимальное управление с обратной связью для термовязкоупругой модели движения жидкости Фойгта*. ДАН. 2016. № 468. С. 251–253.
4. Звягин А. В. *Разрешимость задачи термовязкоупругости для альфа–модели Лере*. Изв. вузов. Матем. 2016. № 10. С. 70–75.

ТРЕХМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ПЕЧНОГО ПРОИЗВОДСТВА ТЕХНИЧЕСКОГО УГЛЕРОДА ИЗ УГЛЕВОДОРОДНОГО СЫРЬЯ

И. В. Зезюлин¹, С. Г. Черный²

¹Новосибирский государственный университет

²Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

Технический углерод — востребованный продукт, используемый преимущественно при производстве шин [1]. Получается в результате пиролиза углеводородного сырья в печных реакторах. Из-за сложности экспериментального изучения процессов, происходящих внутри реактора, ключевую роль в повышении качества конечного продукта с заданными дисперсностью и структурностью играет математическое моделирование. В работах [2, 3] предложена трехмерная математическая модель распыла и испарения сырья в потоке газа–теплоносителя как первый шаг на пути описания всего процесса. В настоящей работе представлен следующий шаг к намеченной цели — предлагается модель выхода технического углерода. К уравнениям Навье–Стокса добавлены два конвективно–диффузионных уравнения, описывающие перенос массовой доли и концентрации частиц технического углерода со скоростью несущей фазы. Источниковыми членами в данных уравнениях являются скорость образования массы и изменения числа частиц технического углерода соответственно. Учтены нуклеация (образование частиц за счет конденсации углерода из пара сырья), коагуляция (сцепление мелких частиц с образованием более крупных), поверхностный рост (присоединение отдельных атомов и радикалов к поверхности крупных частиц) и окисление (реакции с кислородом и ОН–радикалами). Проведено сравнение решений задачи, полученных без модели выхода технического углерода и с ней. Найденные распределения массы и числа частиц технического углерода позволяют оценивать дисперсность

и структурность конечного продукта. Проведен анализ чувствительности массы и числа частиц технического углерода ко входным параметрам построенной модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гульмисарян Т. Г., Капустин В. М., Левенберг И. П. *Технический углерод: морфология, свойства, производство*. М.: Каучук и Резина, 2017.
2. Аксёнов А. А., Жлуктов С. В., Каширин В. С., Сазонова М. Л., Чёрный С. Г., Дроздова Е. А., Роде А. А. *Численное моделирование в ПК FlowVision распыла и испарения сырья в потоке газа-теплоносителя при печном производстве технического углерода*. КИМ. 2023. Т. 15. № 4. С. 921–939.
3. Aksenov A. A., Zhluktov S. V., Kashirin V. S., Sazonova M. L., Cherny S. G., Zeziulin I. V., Drozdova E. A., Rode A. A. *Numerical modelling of raw materials atomization and vaporization in a heat carrier gas flow in technical carbon production based on the Euler approach* E3S WoS. 2023. V. 459. 04019

Л. В. ОВСЯННИКОВ О ВСПЛЫТИИ ПУЗЫРЯ. ВСПЛЫТИЕ ПОДВОДНОГО ТРУБОПРОВОДА

М. А. Ильгамов

Институт механики и машиностроения КНЦ РАН, Казань
Институт механики УФИЦ РАН, Уфа

При всплытии газового пузыря после подводного взрыва существенными являются архимедова сила, инерционные силы, внешнее обтекание водой, изменение объема и его формы [1]. В отличие от этого всплытие и изгиб участка газового трубопровода происходит медленно и без изменения объема и формы, инерционные силы и поперечное обтекание не играют заметной роли [2, 3].

Всплытие подводного трубопровода сопровождается изгибом его некоторой части. Такое равновесное положение сооружения является недопустимым для его безопасной эксплуатации. Подъем более тяжелого трубопровода, чем подъемная сила воды, вызывается температурным удлинением при сезонном нагреве воды, изменением температуры перекачиваемого газа, большим внутренним давлением, начальным подъемом трубопровода, отсутствием возможности изгибаться по дну водоема для компенсации указанного удлинения, изменением рельефа дна (подъем, опускание, сдвиги), донных течений и т.д. Наибольшая вероятность всплытия наступает при одновременной реализации указанных факторов. В качестве примера можно привести всплытие двух обетонированных газопроводов «Бованенково – Ухта-2», проложенных рядом с другими трубопроводами и находящихся в одинаковых условиях с ними в Байдарацкой бухте (залив Карского моря, глубина 20 м, внутренний диаметр стальной трубы 1.20 м, рабочее давление газа 12 МПа, лето 2021 года).

При моделировании всплытия предполагается, что изогнутая часть является пологой кривой, угол поворота поперечного сечения мал по сравнению с единицей, оно остается круговым и перпендикулярным к осевой линии. Жесткости растяжения-сжатия и изгиба определяются суммой жёсткостей трех слоев с соответствующими модулями упругости стали и бетона [2, 3]. Допускается частичное перемещение трубы

по концам пролета при его изгибе. Учитывается изменение давления окружающей воды и газа с подъемом трубопровода, а также продольной деформации трубы за счет ее кольцевой деформации из-за перепада давления. Полученное уравнение позволяет анализировать широкий спектр вопросов: линейный изгиб и устойчивость положения, нелинейный сверхкритический изгиб, влияние на изгиб всех входных параметров, в том числе давления газа и глубины водоема. Определяется критерий всплытия.

В прямой задаче предполагаются заданными все входные параметры трубопровода и его длина, подвергнутая подъему (размеры поперечного сечения, плотности и упругости всех слоев, внутреннее давление в трубе, свойства окружающей среды, граничные условия). При этом определяется прогиб трубы (подъем). В обратной задаче могут быть определены длина поднятой части, внутреннее давление в трубе, условия опирания на концах пролета трубопровода.

Работа выполнена в рамках госзаданий ИММ КНЦ РАН и ИМех УФИЦ РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. *О всплытии пузыря*. Некоторые проблемы математики и механики. К 70-летию М. А. Лаврентьева. М.: Наука. 1970. С. 209–222..
2. Ильгамов М. А. *Модель всплытия подводного трубопровода*. ДАН. Физика, Технические науки. 2022. Т. 504. С. 12–16.
3. Ильгамов М. А. *Всплытие подводного газового трубопровода*. Изв. РАН. МТТ. 2023. №. 2. С. 147–159.

ПОДЪЕМ ПОДВОДНОГО ГАЗОПРОВОДА СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛОЙ

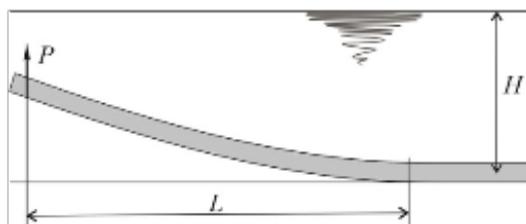
М. А. Ильгамов¹, М. М. Шакирьянов¹, А. А. Юлмухаметов¹,
А. В. Ахмедьянов²

¹Институт механики УФИЦ РАН, Уфа

²Уфимский университет науки и технологий

Рассматривается подъем затопленного трубопровода полубесконечной длины, находящегося на дне водоема. Внешняя подъемная сила прикладывается у свободного конца трубы (рисунок). Подобная постановка задачи возникает также при укладке трубопровода [1, 2]. В [2] учитываются нелинейные свойства бетона в случае обетонированного трубопровода. Кроме собственных весов трубы и воды внутри нее, архимедовой силы, возникающих упругих сил при изгибе, учитываются поперечные распределенные силы, обусловленные взаимодействием среднего давления на стенки трубы и кривизной ее осевой линии.

Соблюдаются обычные допущения, применяемые при анализе малого изгиба трубы. Изгибная жесткость трубы определяется суммой жесткостей двух концентрических стальных труб и бетонного слоя между ними. Она получена в предположении поворота сечения трубы, остающегося плоским при изгибе. Рассматривается подъем, в предположении что угол поворота сечения трубы остается малым по сравнению с единицей и используются линейные соотношения. Если предполагается подъем свободного конца трубы до поверхности водоема, то такой анализ приемлем только для



случая малой глубины. Как частный случай рассматривается также подъем трубы без контакта с жидкостью.

Для анализа применяется вариационный метод Релея-Ритца, причем аппроксимирующая функция прогиба принимается, как в известной задаче изгиба консольной балки сосредоточенной силой [3, 4]. Прямая задача состоит в определении подъема при заданных размерах трубы, длине поднятой части (пролета). В обратной задаче при заданном подъеме свободного конца трубы до поверхности водоема определяется длина поднятой части. Устанавливается связь между входными параметрами задачи и сосредоточенной подъемной силой.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00106, <https://rscf.ru/project/24-21-00106/>

ЛИТЕРАТУРА

1. Зиновьева Т. В. *Анализ напряженно-деформированного состояния трубопровода при укладке на морское дно*. Нефтегазовое дело. 2011. № 1. С. 220–236.
2. Елисеев В. В., Зиновьева Т. В. *Нелинейно-упругая деформация подводного трубопровода в процессе укладки*. ВМСС. 2012. № 1. С. 70–78.
3. Ильгамов М. А. *Модель всплытия подводного трубопровода*. ДАН. Физика, Технические науки. 2022. Т 504. С. 12–16.
4. Ильгамов М. А. *Всплытие подводного газового трубопровода* Изв. РАН. МТТ. 2023. № 2. С. 147–159.

ТРАЕКТОРИИ ЖИДКИХ ЧАСТИЦ В ПОЛЕ 1:1 РЕЗОНАНСНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛНОВЫХ СТРУКТУР В ЖИДКОСТИ ПОДО ЛЬДОМ

А. Т. Ильичев^{1,2}, А. С. Савин², А. Ю. Шашков²

¹Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва

²Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

Рассматривается слой жидкости конечной глубины, описываемый двумерными уравнениями Эйлера. Ледяной покров моделируется геометрически нелинейной упругой пластиной Кирхгоффа-Лява. Траектории частиц жидкости под ледяным покровом находятся в поле нелинейных поверхностных бегущих волн малой, но конечной амплитуды. Эти волны свидетельствуют либо о фокусирующих, либо о дефокусирующих свойствах данной среды. А именно, рассматриваются либо уединенный волновой пакет (монохроматическая волна под огибающей, скорость которой равна скорости этой огибающей), либо так называемый темный солитон (бегущая волна, являющаяся нелинейным продуктом боры и периодической волны). В анализе используются

явные асимптотические выражения для решений, описывающих волновые структуры на границе раздела вода-лед, такие как уединенный волновой пакет и темный солитон, а также асимптотические решения для поля скоростей в толще жидкости, генерируемого этими волнами [1, 2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильичев А.Т., Савин А.С., Шашков А.Ю. *Траектории жидких частиц в поле темного солитона в жидкости под ледяным покровом*. Изв. РАН. МЖГ. 2023, № 6. С. 110–120.
2. Ильичев А.Т., Савин А.С., Шашков А.Ю. *Движение частиц в поле нелинейных волновых пакетов в слое жидкости под ледяным покровом*. ТМФ. 2024. Т. 218. № 3.

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О ТЕЧЕНИИ РАСТВОРОВ И РАСПЛАВОВ ПОЛИМЕРОВ В КАНАЛАХ

А. И. Кадыров

Институт энергетики и перспективных технологий ФИЦ Казанский научный центр РАН, Казань

Растворы и расплавы полимеров обладают вязкоупругими свойствами, реологические свойства которых характеризуются наличием как изменяющейся вязкости со скоростью сдвига, так и нормальными напряжениями. Наиболее широкое распространение получили дифференциальные реологические модели, например модели Гиезекуса [1], Фан-Тьен-Таннера [2] и eXtended Pom-Pom [3]. Обычно, параметры данных моделей находятся путем аппроксимации сдвиговой вязкости или вязкости при растяжении. Последний подход используется для моделирования одноосных и двухосных течений. Точность аппроксимации зависит от количества мод реологического уравнения и колеблется от одной до четырех, в редких случаях исследователи используют большее количество мод. Указанные реологические уравнения характеризуются сильными нелинейными эффектами, поэтому аналитические решения с их использованием могут быть получены для частных случаев: ламинарное течение в круглой трубе [4] или в плоской щели. В настоящей работе в качестве аналитического метода предлагается использовать параметрический метод. В отличие от работы [5], в настоящей работе рассмотрены двух и четырех модальные формы указанных выше реологических моделей. Получено хорошее согласование с литературными данными, а также с собственными экспериментальными данными о течении полимерных растворов в круглой трубе. Аналитическая форма позволяет исследовать отклонения фактического профиля осевой скорости в сужающихся-расширяющихся каналах от установившегося, а также подтвердить адекватность экспериментальных данных.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00166, <https://rscf.ru/project/23-21-00166/>

ЛИТЕРАТУРА

1. Giesekus H. *A simple constitutive equation for polymer fluids based on the concept of deformation-dependent tensorial mobility*. J. Non-Newton. Fluid Mech. 1982. V. 11. № 1-2. P. 69–109.
2. Phan-Thien N., Tanner R. I. *A new constitutive equation derived from network theory*. J. Non-Newton. Fluid Mech. 1977. V. 2. № 4. P. 353–365.
3. Verbeeten W. M. H., Peters G. W. M., Baaijens F. P. T. *Viscoelastic analysis of complex polymer melt flows using the eXtended Pom-Pom model*. J. Non-Newton. Fluid Mech. 2002. V. 108. № 1-3. P. 301–326.
4. Семисалов Б. В. *О точных решениях Пуазейлевского типа для течений вязкоупругой полимерной жидкости в цилиндрическом канале*. ПМТФ. 2023. Т. 64. № 4. P. 139–151.
5. Dapra I., Scarpi G. *Analytical solution for channel flow of a Giesekus fluid with non-zero solvent viscosity*. J. Non-Newton. Fluid Mech. 2023. V. 322. P. 105152.

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ С НУЛЕВЫМ ФРОНТОМ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

А. Л. Казаков¹, Л. Ф. Спевак²

¹Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН, Иркутск

²Институт машиноведения имени Э. С. Горкунова УрО РАН, Екатеринбург

Рассматривается нелинейное эволюционное параболическое уравнение

$$U_t = \Delta \Psi_1(U) + \Psi_2(U), \quad (1)$$

где t — время, Δ — лапласиан по пространственным переменным x_1, x_2, \dots, x_N ; U — искомая функция. Известные функции $\Psi_1(U), \Psi_2(U)$ предполагаются достаточно гладкими. Иногда дополнительно требуется, чтобы $\Psi_1'(U) \geq 0$.

Уравнение (1) описывает распространение тепла (фильтрацию, диффузию) в случае, когда коэффициент теплопроводности (фильтрации, диффузии) зависит от температуры (плотности, концентрации). Наиболее известной разновидностью уравнения (1) является нелинейное уравнение теплопроводности (фильтрации; the porous medium equation) [1, 2], которое соответствует случаю $\Psi_1(U) = U^m, m > 1, \Psi_2(U) \equiv 0$. Групповой анализ такого уравнения (в плоскосимметричном случае) был впервые проведен Л. В. Овсянниковым [3]. Если $\Psi_2(U) \not\equiv 0$, то это слагаемое моделирует приток (сток) энергии (вещества).

В докладе, который продолжает выполненные ранее работы авторов [4], рассматриваются точные решения уравнения (1), имеющие тип диффузионной (тепловой) волны, т.е. неотрицательные, удовлетворяющие условию

$$u|_{f(t, x_1, \dots, x_N)=0} = 0, \quad (2)$$

где многообразие $f(t, x_1, \dots, x_N) = 0$ именуется нулевым (тепловым, диффузионным, фильтрационным) фронтом [1]. Решения уравнения (1) с такими свойствами возникают, если $\Psi_1'(0) = 0, \Psi_2(0) = 0$. В этом случае (1) удовлетворяет функция $U \equiv 0$, т.е. на нулевом фронте возникает особенность и нарушается единственность.

В качестве новой независимой переменной принимаются различные комбинации переменных t, x_1, x_2, \dots, x_N . Выполняется редукция (1) к ОДУ, наследующим особенность у исходной постановки. Исследование свойств решений проводится численными и аналитическими методами, включая методы качественного анализа ОДУ. Проводится интерпретация результатов с точки зрения свойств решений задачи (1), (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Сидоров А. Ф. *Избранные труды. Математика. Механика*. М.: Физматлит, 2001.
2. Vazquez J. *The porous medium equation: mathematical theory*. Oxford: Clarendon Press, 2007.
3. Овсянников Л. В. *Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности*. Доклады Академии наук СССР. 1959. Т. 125, № 3. С. 492–495.
4. Казаков А. Л., Спевак Л. Ф. *О точных и приближенных решениях задачи с особенностью для уравнения конвекции-диффузии*. ПМТФ. 2021. Т. 62. № 1. С. 22–31.

ВОЗНИКНОВЕНИЕ ТЕРМОМАГНИТНОЙ КОНВЕКЦИИ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ

П. Н. Казанцев, Б. Л. Смородин

Пермский государственный национальный исследовательский университет

Неоднородное распределение магнитных частиц в коллоидных суспензиях (феррожидкостях) может быть сформировано благодаря магнетофорезу в неоднородном магнитном поле [1] или эффекту термодиффузии [2] при наличии градиента температуры.

Изучено возникновение конвекции в суспензии магнитных наночастиц с магнитным моментом m , заполняющей ячейку Хеле-Шоу высотой h , помещенную в неоднородное магнитное поле $\mathbf{H} = Gz\mathbf{k}$ и тепловое поле с градиентом $\nabla T = -\Theta\mathbf{k}$ (Θ – разность температур на узких гранях ячейки).

Эволюцию возмущений и возникновение течения можно реализовать в различных экспериментальных условиях: 1) градиент температуры и неоднородное поле прикладываются к однородной магнитной жидкости; 2) неоднородное магнитное поле включается после того как под действием градиента температуры формируется линейное термодиффузионное распределение примеси; 3) в общем случае в жидкости может быть сформирован параболический профиль концентрации, зависящий от величины безразмерного градиента магнитного поля $\gamma = mGh/k_bT_0$ и параметра разделения смеси $\psi = S_T\Theta/\bar{\varphi}$ (S_T – параметр Сорэ):

$$\varphi(z) = \bar{\varphi} \left(1 - \psi z + \frac{\gamma^2(12z^2 - 1)}{72} \right), \quad (1)$$

где $\bar{\varphi}$ – средняя объемная концентрация наночастиц.

В первом случае ($\gamma = 0, \psi = 0$) концентрационный градиент не сформирован, и возникает стационарная конвекция.

На фоне сформированного неоднородного профиля концентрации (случай 2 и 3) конвекция в феррожидкости может возникать колебательным образом. Определены

зависимости критического магнитного числа Релея Rm_c , критического волнового числа k_c и частоты нейтральных колебаний ω от параметра разделения смеси ψ и величины безразмерного градиента магнитного поля γ .

С помощью дополнительного периодического магнитного поля малой амплитуды можно вызвать параметрическое возбуждение термомагнитной конвекции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Shliomis M. I., Smorodin B. L., Kamiyama S. *The onset of thermomagnetic convection in stratified ferrofluids*. Philosophical Magazine. 2003. Vol.83. № 17-18. P. 2139–2153.
2. Shliomis M. I., Smorodin B. L. *Convective instability of magnetized ferrofluids*. J. Magn. magn. Mater. 2002. Vol.252. P. 197-202.

МОДЕЛИРОВАНИЕ НАКОПЛЕНИЯ ПОВРЕЖДЕННОСТИ ЖАРОПРОЧНОГО СПЛАВА IN738LC В КОМБИНИРОВАННОМ РЕЖИМЕ ПЛАСТИЧНОСТЬ/ПОЛЗУЧЕСТЬ

А. А. Кайгородцева, А. В. Шутов

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет*

Представлено исследование по моделированию повреждения металлического сплава под действием комбинированных механизмов пластичности и ползучести. В работе предложена и реализована феноменологическая модель материала, учитывающая упругость, ползучесть и пластичность с нелинейным упрочнением. Точное описание эффекта Баушингера достигается за счет введения двух тензоров микронапряжений с эволюцией по типу «упрочнение/отпуск». Накопление поврежденности в результате механизма ползучести моделируется при помощи модифицированной модели Качанова-Работнова. При этом учитывается деградация упругих характеристик материала, способности материала к деформационному упрочнению и к сопротивлению деформации ползучести.

Для калибровки модели используются экспериментальные данные, полученные для жаропрочного сплава IN738LC [1]. Так как модель содержит большое количество параметров, задача идентификации параметров решается в три этапа. На первом этапе калибруются параметры кинематического упрочнения по экспериментальным данным о циклическом нагружении в режиме малоциклового усталости. На втором этапе калибруются параметры ползучести по данным о нагружении в смешанном режиме пластичность/ползучесть для начальных циклов нагружения. Наконец, на третьем этапе определяются параметры накопления повреждений по экспериментальным данным о циклическом нагружении, полученным вплоть до разрушения образцов. Получено удовлетворительное соответствие между экспериментом и расчетом. Для каждого из этапов оценена корректность калибровки путем вычисления корреляционных матриц. Для оценки стохастического разброса экспериментальных данных построены вееры модельных ответов по методике, описанной в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Li J., Wahi R. P., Chen H., Chen W., Wever H. *Deformation substructure in the nickel-base alloy IN738LC under superimposed creep-fatigue loading*. Int. J. Mat. Res. 1993. Т. 84. № 4. С. 268–270.
2. Shutov A. V., Kaygorodtseva A. A., Zakharchenko K. V., Kapustin V. I. *Uniaxial ratcheting and ductile damage in structural steel with a stochastic spreading of experimental data*. ZAMM. 2024. e202300449. doi.org/10.1002/zamm.202300197

АНАЛИЗ РАБОЧИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОПТИЧЕСКОГО ВОЛОКНА ТИПА PANDA С УЧЕТОМ ЗАЩИТНОГО ПОЛИМЕРНОГО ПОКРЫТИЯ

А. А. Каменских

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

В датчиках, фиксирующих изменение различных физических величин, широко распространено использование оптических технологий. Фиксирование изменения параметров объекта происходит за счет преломления света в оптических волокнах. Волноводы отличаются геометрией поперечного сечения, введением в их состав специальных элементов, защитными покрытиями и т.д. Ранее отмечалось, что геометрическая конфигурация поперечного сечения, а также материалы и вид защитного покрытия оказывают влияние на работоспособность, как самих волноводов, так и датчиков в которых они используются [1, 2]. Математическое моделирование оптических волокон зачастую направлено на анализ влияния геометрических параметров и моделей поведения материалов, из которых они изготовлены, на деформационные и оптические параметры системы с целью улучшения рабочих характеристик.

В данной работе рассмотрено влияние вязкоупругого поведения стеклянных элементов оптического волокна типа Panda на формирование поля остаточных технологических напряжений, которое напрямую влияет на двулучепреломление. Задача формирования поля остаточных напряжений рассматривалась в термоупругой и термовязкоупругой постановках. При упругой модели поведения материалов стекол рассмотрено влияния температуры начала охлаждения заготовки [2, 3]: фактическая температура, фиктивная температура. Также в работе рассмотрены вопросы влияния реологии полимерных материалов защитного покрытия, его геометрической конфигурации (однослойное, двухслойное) и характера сопряжения с кварцевым основанием (идеальный контакт, фрикционный контакт, полная адгезия) на рабочие характеристики волокна типа Panda.

Установлено, что модель вязкоупругого поведения стекла позволяет более точно описывать процесс остывания волокна от фактических температур технологического процесса благодаря учету вязкости материала. Также получены зависимости влияния геометрии защитного покрытия на деформационные и оптические параметры волокна при его контакте с металлической поверхностью.

Исследования выполнены при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSNM-2023-0007).

ЛИТЕРАТУРА

1. Lesnikova Y. I., Trufanov A. N., Kamenskikh A. A. *Analysis of the Polymer Two-Layer Protective Coating Impact on Panda-Type Optical Fiber under Bending*. Polymers. 2022. Vol. 14. Art. 3840.
2. Kamenskikh A. A., Sakhabutdinova L., Strazhec Y. A., Bogdanova A. P. *Assessment of the Influence of Protective Polymer Coating on Panda Fiber Performance Based on the Results of Multivariant Numerical Simulation*. Polymers. 2023. Vol. 15. Art. 4610.

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА

О. В. Капцов

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

Рассматриваются двумерные стационарные уравнения идеальной жидкости и плазмы

$$uu_x + vu_y + p_x = 0, \quad uv_x + vv_y + p_y = 0, \quad u_x + v_y = 0,$$

где u, v – компоненты вектора скорости, p – давление. Плотность жидкости считается постоянной и равной единице. Хорошо известно, что эта система сводится к одному уравнению

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = F(\psi)$$

на функцию тока ψ . Последнее уравнение также возникает в различных приложениях таких как физика плазмы, теория твердого тела. Получены точные решения эллиптических уравнений Сине-Гордон, Синх-Гордон, Цицейки, выражающиеся через элементарные функции. Показано, что расход жидкости по замкнутой кривой в случае эллиптического уравнения Сине-Гордона является целым числом, т.е. квантуется. Найденные решения определяют течения, состоящие из отдельных источников и стоков, струйные течения, периодические цепочки из источников-стоков, вихри и их комбинации. Предложен новый способ построения периодических решений уравнений Сине-Гордона, Синх-Гордона и Цицейки. Данные классы решений представляются в виде рациональных выражений от эллиптических функций.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2020-1631).

ЛИТЕРАТУРА

1. Kaptsov O. V. *Solutions of the Euler equations and stationary structures in an inviscid fluid*. arXiv:2202.06294, p.1-13.

ВСПЛЫВАНИЕ ДВУМЕРНОЙ ПОЛОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Е. А. Карabut, Е. Н. Журавлева

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Задача о пузыре, движущемся в безграничной тяжелой жидкости, была поставлена Л.В. Овсянниковым [1]. Позднее, были предложены различные численные алгоритмы для решения этой задачи.

В настоящей работе рассматривается плоское движение цилиндрической полости в идеальной несжимаемой жидкости под действием силы тяжести.

Решение ищется в виде степенных рядов по времени, коэффициентами которых являются рациональные функции от комплексного переменного. Получены рекуррентные формулы для нахождения этих коэффициентов. Применение полуаналитических методов позволило не только определить искомые функции, но и исследовать их особые точки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л.В. *О всплывании пузыря*. - В кн.: *Некоторые проблемы механики и математики*. Л.: Наука, 1970.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ГЕОМЕТРИИ И СКОРОСТИ ПАДЕНИЯ ТЕЛА НА ЗАХВАТ ВОЗДУХА ПРИ СОУДАРЕНИИ С ЖИДКОСТЬЮ

Ж.-Б. Карра¹, Н. В. Гаврилов¹, А. В. Черданцев², Н. Д. Шмакова¹,
Е. В. Ерманюк¹

¹*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск*

²*Институт теплофизики им С. С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск*

При соударении твердого тела с жидкостью в состоянии покоя (либо жидких капель с твердым телом), поверхность жидкости деформируется и задерживает тонкий слой воздуха, который образует воздушные пузырьки на поверхности, являющиеся основной проблемой при печати, покраске, нанесении покрытий.

Ранее было показано, что при соударении конуса с жидкостью в состоянии покоя [1], радиус воздушной полости увеличивается экспоненциально со временем (аналогично удару капли о поверхность [2]). Внешний радиус зоны контакта увеличивается линейно со временем, эта зависимость хорошо совпадает с теорией Вагнера [3]. Начальный радиус воздушной полости линейно зависит от параметра $A = \mu_a / (\rho_l V \tan^2(\beta))$ (μ_a – динамическая вязкость воздуха и ρ_l – плотность жидкости), который основан на балансе давлений, обусловленных силами инерции жидкости и эффектом смазки в тонком воздушном слое [1, 4].

Целью настоящей работы является обобщения результатов, полученных в [1] для тел с различной геометрией. Для этого были проведены эксперименты с падением клина и пирамиды из дюралюминия с маленькими углами β от 1 до 4° в диапазоне скоростей удара 1.3–19.0 см/с.

Хотя физический механизм в начале контакта одинаков для всех геометрий, расположение точек первичного контакта зависит от геометрии тела: для конуса точки контакта расположены на окружности, для пирамиды – на квадрате, а для клина – на двух параллельных линиях. Была измерена длина внутренней и внешней зон контакта и построена их временная эволюция. В соответствии с теорией Вагнера и предыдущими экспериментами с конусом эти зависимости являются, соответственно, экспоненциальной и линейной. Построен график зависимости длины внутренней зоны контакта, полученной из экспериментальных данных, от параметра A [1, 4]. Начальная внутренняя длина прямо пропорциональна этому параметру. Как и ожидалось, наклон аппроксимирующей прямой для данных с пирамидой ближе к наклону соответствующей прямой для конуса, чем для клина.

ЛИТЕРАТУРА

1. Carrat, J.-B., N. Gavrilov, A. Cherdantsev, N. Shmakova, and E. Ermanyuk. *Air Entrapment at Impact of a Conus onto a Liquid*. J. Fluid Mech. 2023. V. 966. R1.
2. Thoroddsen, S. T., T. G. Etoh, K. Takehara, N. Ootsuka, and Y. Hatsuki. *The Air Bubble Entrapped under a Drop Impacting on a Solid Surface*. J. Fluid Mech. 2005. V. 545. № 1
3. Wagner, H. *Über Stoß- und Gleitvorgänge an der Oberfläche von Flüssigkeiten*. Z. Angew. Math. Mech. 1932. V. 12. P. 193–215.
4. Hicks, P. D., Ermaniuk, E. V., Gavrilov, N. V., Purvis, R. *Air trapping at impact of a rigid sphere onto a liquid*. J. Fluid Mech. 2012. V. 695. P. 310–320.

ДИНАМИКА ГАЗОВОЙ ДЕТОНАЦИИ В ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

А. Р. Касимов

Сколковский институт науки и технологий, Москва

Данная работа посвящена исследованию процесса взаимодействия одномерной или двумерной газовой детонации с периодическими неоднородностями в горючей смеси или в свойствах канала, в котором распространяется детонация. Рассмотрены случаи одномерной детонации в среде с периодическими неоднородностями температуры, но без учета потерь на трение [1, 2], а также детонации в однородной среде с учетом потерь импульса из-за периодически неоднородной шероховатости стенок канала [3]. В обоих случаях обнаружено явление регуляризации собственных колебаний волны в определенных диапазонах волновых чисел периодической неоднородности. Показано существование областей синхронизации в виде языков Арнольда в пространстве параметров амплитуды и волнового числа неоднородности.

При рассмотрении двумерной детонации обнаружены новые и более сложные эффекты. Влияние неоднородности смеси в поперечном направлении на структуру ячеистой детонации, распространяющейся в прямоугольном канале, проявляется в том, что изменение амплитуды и волнового числа неоднородности приводит как к перестройке ячеистой структуры (от нерегулярной к регулярной и наоборот), так и к

явлению захвата детонационных ячеек в областях с высокой температурой и низкой плотностью, при котором поперечные волны в ячеистой детонации становятся стационарными.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках проекта № 22-21-00902.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. R. Kasimov and A. Yu. Goldin *Resonance and mode locking in gaseous detonation propagation in a periodically nonuniform medium*. Shock Waves, 2021, V. 31, С. 841–849.
2. A. Yu. Goldin and A. R. Kasimov *Synchronization of detonations: Arnold tongues and devil's staircase*. Journal of Fluid Mechanics, 2022, V. 946, С. R1.
3. A. Yu. Goldin, T. O. Medvedeva, and A. R. Kasimov *Mode locking in gaseous detonation propagation in a channel with periodically varying friction*. Physics of Fluids, 2022, V. 34, С. 1–10.

ДВИЖУЩИЕСЯ ЛОКАЛЬНЫЕ ВИХРЕОБРАЗОВАНИЯ В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБКЕ КРУГОВОГО СЕЧЕНИЯ

О. Е. Кириллов

*Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского,
Жуковский*

Одним из результатов 1-го этапа исследований в рамках гранта РФФ № 23-11-00210 стало обнаружение (из анализа экспериментальных исследований) аномального прохождения высокочастотного сигнала давления по пневмотрассе — длинной цилиндрической трубке кругового сечения. Из проведенного частотного и частотно-временного анализа была выдвинута гипотеза, что датчик в конце пневмотрассы при определенных условиях регистрирует распад неких локализованных в пространстве и времени аэродинамических структур — как предварительная гипотеза, это могут быть вихреобразования типа вихрей Хилла. Частота следования этих структур порядка 20-40 Гц. Эти образования возникают в начале пневмотрассы и проходят до конца пневмотрассы, где распадаются на мембране датчика. Спектральный состав этих структур охватывает интервал как минимум до 2 кГц. Причиной возникновения этих структур может быть либо ламинарно-турбулентный переход в пограничном слое на поверхности профиля, либо пристенный турбулентный пограничный слой в потоке аэродинамической трубы. В обоих случаях присутствует широкополосный спектр турбулентного потока.

В настоящем докладе приведены результаты исследований задачи о существовании подвижных локальных вихреобразований в цилиндрической трубке кругового сечения, заполненной несжимаемой жидкостью. Показано, что для случая невязкой жидкости возможны движущиеся локальные вихреобразования подобные сферическому вихрю Хилла. Для случая вязкой жидкости приведены оценки темпа диссипации таких вихреобразований.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-11-00210, <https://rscf.ru/project/23-11-00210/>.

ВЛИЯНИЕ ТЕПЛОВОЙ ГРАВИТАЦИОННО-КАПИЛЛЯРНОЙ КОНВЕКЦИИ НА ПОЛЯ ТЕМПЕРАТУРЫ В ТОНКИХ СТЕНКАХ

С. А. Кислицын, В. С. Бердников, В. А. Гришков, К. А. Митин, А. В. Михайлов, Е. А. Юровских

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

Поля температуры в конструкциях летательных аппаратов (ЛА) могут быть нестационарными и неравномерными из-за конвективных процессов теплообмена в топливных баках при взлете, выходе на крейсерскую скорость и посадке. В этих условиях возникают существенные перепады температуры и могут появляться термические напряжения, дополнительные к механическим нагрузкам [1]. Для оценок ресурса элементов ЛА требуются достоверные знания о сопряженном теплообмене в содержащих жидкости элементах конструкции, о распределениях градиентов температуры и термических напряжений. Аналогичные проблемы возникают при работе любой тонкостенной технике в режимах включения и выключения нагрева. В полостях частично заполненных жидкостями и при наличии неизотермической свободной поверхности жидкости кроме сил плавучести существенную роль может играть термокапиллярный эффект и конвекция имеет тепловую гравитационно-капиллярную природу. К настоящему времени слабо изучено влияние нестационарной тепловой гравитационно-капиллярной конвекции, на поля температуры в стенках в зонах контакта жидкость-газ-стенка [2, 3]. Экспериментально и численно исследовано развитие нестационарной тепловой гравитационно-капиллярной конвекции в слое этилового спирта со свободной поверхностью после внезапного разогрева электрическим током одной из вертикальных стенок прямоугольной полости в диапазоне высот слоя жидкости от 50 до 170 мм и при плотностях тепловых потоков на разогреваемой стенке полости от 274 до 5400 Вт/м². Поля температуры на стенках и на свободной поверхности слоя жидкости измерялось тепловизором FLIR x6530sc. Компьютерная обработка тепловизионных фильмов позволила построить распределения температуры и градиентов температуры по высоте стенки в зависимости от времени. Определены амплитудно-частотные характеристики пульсаций температуры, вызванные возникновением вторичных течений в набегающем на стенку потоке нагретой жидкости и в пограничных слоях, изучено их влияние на мгновенные поля температуры на стенке на фоне монотонного изменения. Используя цифровую видеосъемку и компьютерную обработку видеofilмов, получены векторные распределения скорости в центральном сечении полости. Построены профили вертикальных и горизонтальных компонент скорости. Параллельно выполнены численные исследования методом конечных элементов в условиях близких к экспериментальным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белов В.К., Белов В.В. *Прочность и устойчивость ракетных и авиационных конструкций при термосиловом нагружении*. Новосибирск.: НГТУ, 2011.
2. В. С. Бердников, В. А. Гапонов, В. А. Гришков, П. М. Лиханский, В. А. Марков *Влияние нестационарной тепловой гравитационно-капиллярной конвекции на распределение температуры в тонкой вертикальной стенке*. ТФAM. 2010. Т. 17. № 2. С. 197--208.

3. В. С. Бердников, С. А. Кислицын. Численные исследования нестационарного сопряженного конвективного теплообмена в вертикальных слоях жидкости и газа, разделенных тонкой металлической перегородкой. ТФAM. 2021, Т. 28, №1. С. 107–119.

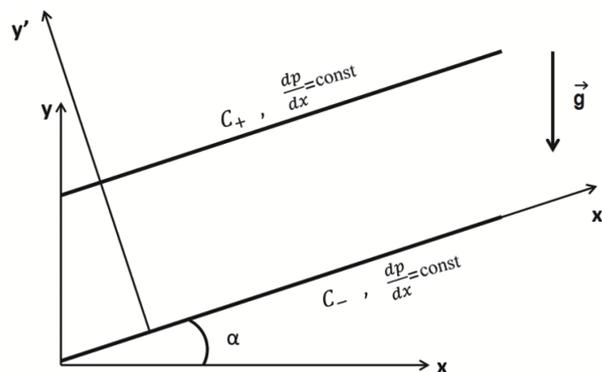
О КОНЦЕНТРАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ СМЕСИ В НАКЛОННОМ СЛОЕ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ С УЧЕТОМ ЗАКУПОРКИ

Л. С. Клименко^{1,2}, Б. С. Марышев¹

¹Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

²Пермский государственный национальный исследовательский университет

В настоящей работе исследуется транспорт тяжелой примеси через наклонный слой пористой среды при наличии осаждения (иммобилизации) частиц примеси на твердый скелет среды и учете закупорки среды. Течение примеси создается постоянным перепадом давления на концах слоя. На верхней и нижней границах поддерживается постоянная разность концентрации примеси (см. рисунок).



На основе законов сохранения массы для подвижной примеси и несущей жидкости выведены уравнения, описывающие динамику системы. Рассмотрены приближения сильной и слабой закупорки. Предположение слабой закупорки заключалось в том, что влияние осевших частиц на пористость считалось незначительным и учитывалось только в уменьшении проницаемости среды. Показано, что настоящая задача допускает режим стационарной фильтрации. Для случая слабой закупорки распределение примеси совпадает с известным ранее линейным законом, для сильной закупорки наблюдаются искривления профиля концентрации. При этом в обоих случаях скорость фильтрации вдоль слоя является функцией поперечной координаты и зависит от угла наклона.

Исследована устойчивость найденного стационарного решения по отношению к малым возмущениям. Численно получены нейтральные кривые в широком диапазоне параметров задачи. Построены карты устойчивости и определены критические значения управляющих параметров. Показано, что возможно возникновение конвективного течения как колебательным так и монотонным образом. Этот результат в целом совпадает с тем что наблюдается без учета закупорки. В целом, учет закупорки приводит к повышению устойчивости режима стационарной фильтрации и

замедлению колебательной динамики системы. Определены границы применимости распространенной в литературе линейной ММ модели которая учитывает осаждение примеси, но не учитывает закупорку среды.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (номер проекта 20-11-20125).

НЕЛОКАЛЬНЫЙ ПОДХОД ИНТЕГРАЛЬНОГО ТИПА К НАКОПЛЕНИЮ ПОВРЕЖДЕНИЙ В СМЕШАННОМ РЕЖИМЕ НАГРУЖЕНИЯ

В. С. Ключанцев, А. В. Шутов

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет*

В работе развит подход интегрального типа, позволяющий строить нелокальные модели накопления поврежденности в металлических материалах. Исходная локальная модель упругопластического деформирования геометрически нелинейна и учитывает деградацию прочностных характеристик материала по мере накопления повреждений [3]. Однако сквозное моделирование процессов образования и распространения трещин по исходной локальной модели невозможно по причине паталогической зависимости решения от конечно-элементной сетки [1]. Проведённая в работе делокализация исходной модели обогащает модель путём введения новых параметров, имеющих размерность длины, а также даёт возможность получать физически осмысленные результаты конечно-элементного моделирования, решив проблему паталогической зависимости решения от конечно-элементной сетки. Для повышения точности описания процессов накопления повреждений и разрушения при смешанной нагрузке I/II типа предложены новые ядра делокализации [2]. Указанные ядра явно учитывают неоднородность полей напряжений и деформаций в зоне предразрушения. Новые ядра разделяются на два семейства: stress-based и strain-based. Кроме того, рассматриваются две процедуры нормировки ядер: математически обоснованная процедура нормировки на основе баланса в приёмнике и физически обоснованная процедура нормировки на основе баланса в источнике. В результате создан инструмент моделирования, подходящий для сквозных конечно-элементных расчётов процесса накопления повреждений и разрушения в смешанном режиме нагружения. Практическая применимость нового подхода демонстрируется с помощью хорошо откалиброванной модели материала, а именно, путём проведения конечно-элементного анализа процесса разрушения компактных образцов типа «растяжение/сдвиг». В отличие от традиционных ядер делокализации, описанных в литературе [1], новые семейства ядер предлагают дополнительный калибровочный параметр, пригодный для точного описания поведения конструкций в условиях смешанного нагружения. В частности, предложенный подход даёт возможность более точно контролировать форму расчетной диаграммы КIс-КIIс.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (код проекта 23-19-00514).

ЛИТЕРАТУРА

1. Bazant Z. P., Jirásek M. *Nonlocal integral formulations of plasticity and damage: survey of progress*. J.Eng.Mech. 2002. Т. 128. № 11. С. 1119–1149.
2. Shutov A. V., Klyuchantsev V. S. *Integral-based non-local approach to ductile damage and mixed-mode fracture*. Eng.Frac.Mech. 2023. Т. 292. С. 109656.
3. Shutov A. V., Silbermann C. B., Ihlemann J. *Ductile damage model for metal forming simulations including refined description of void nucleation*. Int.J.Plast. 2015. Т. 71. С. 195–217.

**НЕРАВНОВЕСНАЯ ТЕРМОДИНАМИКА ПРИ ПОСТРОЕНИИ
МОДЕЛИ СИНТЕЗА КОМПОЗИТОВ****А. Г. Князева***Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск*

Существуют разные подходы к макроскопическому (континуальному) описанию процессов в многокомпонентных гетерогенных системах – системах, в которых существуют несколько фаз, разделенных межфазными границами. Именно наличие границ раздела отличает гетерогенные системы от гомогенных. В классической термодинамике свойства границ раздела учитываются при описании фазовых равновесий в многокомпонентных многофазных системах и при описании поверхностных явлений. В континуальной термодинамике и механике на основе общих уравнений баланса строится стройная система законов сохранения. Например, в [1] на примере двухфазной системы выведены макроскопические уравнения, отражающие законы сохранения массы, компонентов, импульса и энергии для фаз и границ раздела. В [2] на основе локальных уравнений баланса выведены глобальные уравнения для многофазной многокомпонентной системы. Уравнения механики гетерогенных сред [3] получаются с использованием пространственного осреднения уравнений для фаз и межфазной границы. Площадь внутренних границ раздела вводится явно как дополнительный параметр в [4]. Разные варианты метода фазового поля, также основанные на термодинамике [5], «новые» слагаемые в разложении локальных термодинамических потенциалов по степеням градиентов дополнительных параметров связывают с поверхностной энергией и заменяют границы раздела переходной областью. В настоящей работе представлен вариант вывода уравнений фазового поля для системы с химическими реакциями и изменяющейся пористостью. На примере системы с металлотермической реакцией полученные уравнения модели сравниваются с уравнениями, построенными в рамках механики гетерогенных сред.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда No 22-11-00100, <https://rscf.ru/project/22-11-00100/>

ЛИТЕРАТУРА

1. Standart G. *The mass, momentum and energy equations for heterogeneous flow systems*. Chemical Engineering Science. 1964. V. 19. P 227–23.
2. Eu B. C. *Irreversible Thermodynamics of Heterogeneous Systems*. The Journal of Physical Chemistry. 1987. V. 91. № 5. P 1184–11996.

3. Нигматулин Р. И. *Динамика многофазных сред*. Т.1, М.: Наука, 1987.
4. Князева А. Г. *Перекрестные эффекты в твердых средах с диффузией*. ПМТФ. 2003. Т. 44. № 3. С. 85–99.
5. Chen L. Q., Zhao Yu. *From classical thermodynamics to phase-field method*. Progress in Materials Science. 2022. V. 124. P. 100868.

О ТОЧНОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ СКВОЗНОГО СЧЕТА

О. А. Ковыркина, В. В. Остапенко

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет*

На примере численного моделирования по разностным схемам повышенной точности TVD [1], Русанова [2] и WENO5 [3] следующей задачи Коши для уравнений мелкой воды

$$H_t + q_x = 0, \quad q_t + (q^2/H + gH^2/2)_x = 0, \quad (1)$$

$$H(x, 0) = \begin{cases} H_1, & x \leq 0, \\ \varphi(x), & x > 0, \end{cases} \quad q(x, 0) = 0, \quad \varphi(x) = 2 - \frac{1}{\pi} \arctan(x + 2), \quad H_1 = 5. \quad (2)$$

показано (рис. 1), что в различных областях гладкости точного решения (а именно, перед фронтом ударной волны при $x > 4$, в области её влияния при $-1.5 < x < 4$ и внутри центрированной волны разрежения при $-4 < x < 1.5$) разностные схемы сквозного счёта имеют существенно различную точность. При этом в каждой из этих областей гладкости все рассматриваемые схемы с существенно различной точностью вычисляют инварианты $w_1 = v - c$ и $w_2 = v + c$ системы (1). Дано теоретическое обоснование этих экспериментальных результатов.

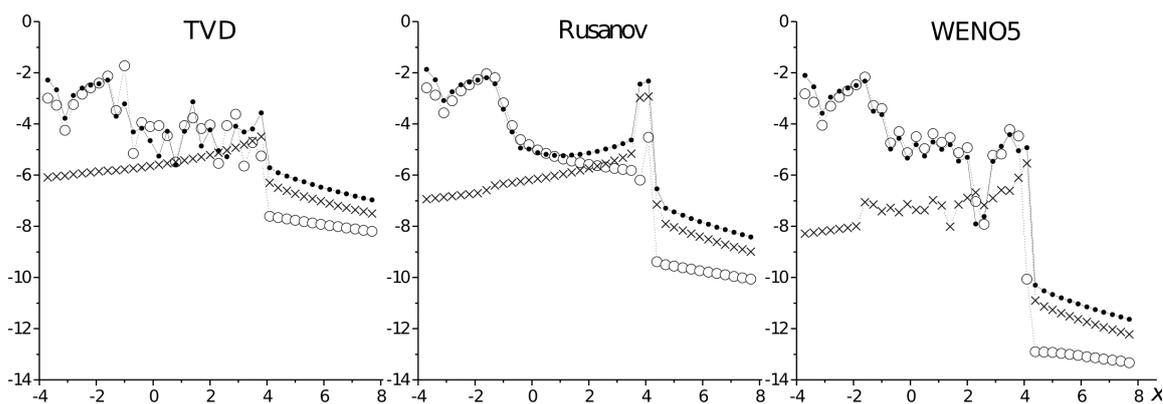


Рис. 1. Относительные погрешности вычисления векторного решения $\mathbf{u} = (H, q)$ (точки) и его инвариантов w_1 (кружки) и w_2 (крестики) при расчёте задачи Коши (1), (2).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 22-11-00060).

ЛИТЕРАТУРА

1. Harten A. *High resolution schemes for hyperbolic conservation laws*. J. Comput. Phys. 1983. V. 49. P. 357–393.

2. Русанов В.В. *Разностные схемы третьего порядка точности для сквозного счёта разрывных решений*. Докл. АН СССР. 1968. Т. 180. № 6. С. 1303–1305.
3. Jiang G.S., Shu C.-W. *Efficient implementation of weighted ENO schemes*. J. Comput. Phys. 1996. V. 126. P. 202–228.

УЛУЧШЕННЫЕ МОДЕЛИ ИЗОТРОПНОЙ ГИПОУПРУГОСТИ, ОСНОВАННЫЕ НА ИСПОЛЬЗОВАНИИ СКОРОСТЕЙ ОЛДРОЙДА ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЙ КИРХГОФА

С. Н. Коробейников

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Анализируются свойства гукоподобных моделей изотропных гипопругих материалов [1] с определяющими соотношениями вида

$$\boldsymbol{\tau}^{\sharp} = \lambda \operatorname{trd} \mathbf{I} + 2(\mu - \lambda \ln J)\mathbf{d}, \quad \boldsymbol{\tau}^{\flat} = \lambda \operatorname{trd} \mathbf{I} + 2(\mu + \lambda \ln J)\mathbf{d}.$$

Здесь $\boldsymbol{\tau}$ — эйлеров тензор напряжений Кирхгофа; \mathbf{d} — эйлеров тензор скорости деформаций; \mathbf{I} — единичный тензор; $J \equiv \det \mathbf{F}$ (\mathbf{F} — тензор градиента деформации); λ , μ — параметры Ламе; $\boldsymbol{\tau}^{\sharp}$, $\boldsymbol{\tau}^{\flat}$ — верхняя и нижняя скорости Олдройда тензора напряжений Кирхгофа. Эти модели принадлежат новому семейству гукоподобных моделей изотропных гипопругих материалов, сгенерированному в [2] с использованием скоростей из семейства непрерывных конвективных скоростей тензора напряжений Кирхгофа, согласованных с тензорами деформаций, сгенерированного в [3].

Показано, что в отсутствие начальных напряжений определяющие соотношения новых моделей гипопругости являются записью в скоростях определяющих соотношений гиперупругости для любых значений параметров Ламе λ и μ . В этом отношении новые модели гипопругости улучшают свойства классических моделей гипопругости с определяющими соотношениями вида

$$\boldsymbol{\tau}^{\sharp} = \lambda \operatorname{trd} \mathbf{I} + 2\mu\mathbf{d}, \quad \boldsymbol{\tau}^{\flat} = \lambda \operatorname{trd} \mathbf{I} + 2\mu\mathbf{d},$$

так как последние обладают таким свойством только в том случае, когда параметр Ламэ $\lambda = 0$ [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Truesdell C., Noll W. *The Non-linear Field Theories of Mechanics*. Handbuch der Physik, V. III/3. N.Y.: Springer, 1965.
2. Korobeynikov S.N. *Families of Hooke-like isotropic hyperelastic material models and their rate formulations* // Archive of Applied Mechanics. 2023. V.93, N 10. P. 3863–3893.
3. Korobeynikov S.N. *Family of continuous strain-consistent convective tensor rates and its application in Hooke-like isotropic hypoelasticity* // Journal of Elasticity. 2021. V. 143, N 1. P. 147–185.

ДИНАМИКА КОМПЛЕКСА “ЧАСТИЦА-ПУЗЫРЁК” В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В РАМКАХ ЛАГРАНЖЕВА ФОРМАЛИЗМА

С. А. Кондратьев¹, Н. П. Мошкин²

¹Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, Новосибирск

²Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Рассмотрена динамика газового пузырька с минеральной частицей в слабо вязкой несжимаемой жидкости. Модель взаимодействия газового пузырька и минеральной частицы представлена сопряжённой системой дифференциально-алгебраических уравнений. Описание динамики возмущений системы проводится на основе лагранжева формализма. Модель учитывает колебания поверхности пузырька и прикрепленной к ней твёрдой цилиндрической частицы в бесконечном объёме идеальной несжимаемой жидкости. Капиллярная сила, удерживающая частицу на пузырьке обусловлена формой поверхности мениска, которая определяет контактный угол. Разложение в ряд по многочленам Лежандра используется для представления малых осесимметричных колебаний системы частица-пузырек. Результирующее безвихревое поле скорости позволяет учесть эффект вязкости принимая в расчёт локальные значения скорости диссипации энергии [1]. Потенциальная и кинетическая энергии комплекса выражаются через коэффициенты ряда по полиномам Лежандра [2].

Рассмотрено влияние начальных возмущений второй и третьей мод на генерацию режимов колебаний других мод. Учет изменения скорости осцилляций 2-ой моды наиболее важен при рассмотрении динамики флотокомплекса. Начальное возмущение нескольких мод поверхностных колебаний пузырька приводит к нелинейным осцилляциям комплекса “частица-пузырек” и появлению “биений” с увеличенными амплитудами наступающего контактного угла. Рассмотрен эффект учета вязкости жидкости на затухание осесимметричных колебаний комплекса “частица-пузырек”. Зависимость логарифмического декремента затухания от числа Онезорге демонстрирует более быстрое уменьшение амплитуды колебаний со временем при возрастании вязкости. Во время колебаний комплекса “частица-пузырек”, контактный угол изменяется в широких пределах, что подразумевает устойчивое закрепление периметра трехфазного контакта исключительно на ребрах частицы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левич В.Г. *Физико-химическая гидродинамика*. Изд. 2-е, доп. и перераб. М.: ГИФМЛ, 1959. 700 с.
2. Кондратьев С.А., Мошкин Н.П. *Взаимодействие минеральной частицы со свободным пузырьком воздуха в жидкости*. Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 2020. № 6. С. 125–135.

СХЕМА ГОДУНОВА ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А. Р. Кочарина, Д. В. Чирков

*Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет*

Одним из эффективных методов решения уравнений Навье–Стокса несжимаемой жидкости является метод искусственной сжимаемости, в котором в уравнение неразрывности вводится член $\frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial t}$, где β — коэффициент искусственной сжимаемости:

$$\begin{cases} \frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0, \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}. \end{cases} \quad (1)$$

Система уравнений (1) является гиперболической в отсутствие вязких членов. Стационарное решение системы (1) совпадает со стационарным решением исходных уравнений Навье–Стокса, что позволяет использовать метод установления по времени. Для решения системы (1) предлагается использовать метод конечных объемов. Впервые для расчета потоков через грани используется схема Годунова [1], основанная на точном решении 1D задачи о распаде разрыва:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q})}{\partial x} = 0, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ \mathbf{Q}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{Q}_L, & x < 0, \\ \mathbf{Q}_R, & x \geq 0, \end{cases} & \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} p \\ u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} \beta u \\ u^2 + p \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (2)$$

Для одномерной задачи Римана (2) было выведено соотношение Гюгонио на разрыве и методом (u, p) -диаграмм [2] найдено точное решение.

В многомерном случае поток на грани ячейки восстанавливается с использованием локально-одномерного подхода. Расчёт давления и нормальной компоненты скорости u_n на грани ячейки в 3D случае сводится к 1D задаче о распаде разрыва (2). Компоненты вектора скорости u, v, w на грани ячейки восстанавливаются через нормальную компоненту u_n и касательную компоненту, найденную через известные скорости соседних ячеек, с учетом неравномерности сетки.

Построенная схема Годунова была протестирована на ряде двумерных и трехмерных задач. Она показала лучшие результаты по сравнению со схемами HLL и Роу с MUSCL-интерполяцией на грань ячейки с учетом неравномерности сетки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С. К. *Разностный метод численного расчёта разрывных решений гидромеханики*. Математический сборник. 1959. Т. 47. № 3. С. 271–306.
2. Овсянников Л. В. *Лекции по основам газовой динамики*. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

РАСШИРЕНИЕ ВСЕЛЕННОЙ ПРИ РАЗЛЁТЕ В ПУСТОТУ ГОРЯЧЕЙ НАЧАЛЬНОЙ СИНГУЛЯРНОСТИ (HSS)

А. Н. Крайко

Центральный институт авиационного моторостроения им. П.И. Баранова, Москва

В уточнение и развитие [1] в рамках общей теории относительности описана модель расширения Вселенной с разлётом в пустоту HSS фиксированного числа барионов общей массы m_0 и энергии $E_0 = m_0 c^2$. Установлено, что при любой степени разогрева HSS (отношении E_0 к энергии покоя холодных барионов) разлетающийся газ остаётся внутри сферы внешнего горизонта событий (гравитационного радиуса) HSS. Данные наблюдений и их обработки современными космологическими теориями (NASA) с подбираемой космологической постоянной $\Lambda < 0$ и с её носителем – "тёмной энергией" на рис. 1 даны крестами. Размер крестов связан с погрешностями наблюдений и расчётов по ним времён жизни Вселенной t_0 и постоянной Хаббла H . Близость зоны крестов с кривой 1 (полученной без эмпирических констант) – свидетельство ненужности тёмной энергии.

На рис. 2 показана структура разлетающейся в пустоту HSS.

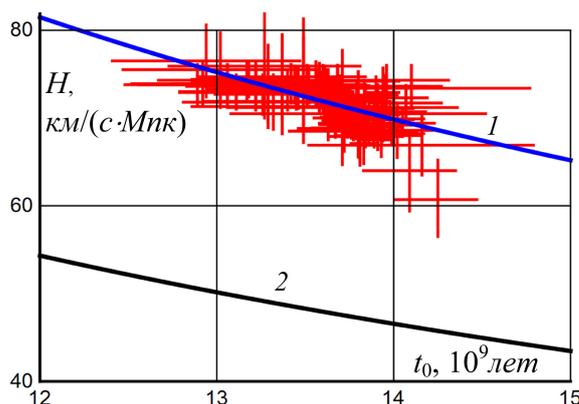


Рис. 1. Связь H и t_0 по данным NASA (кресты) и по формулам: $H = 978/t_0$ (1) и $H = 652/t_0$ (2) – следствиям решений автора и А. Фридмана с $\Lambda = 0$

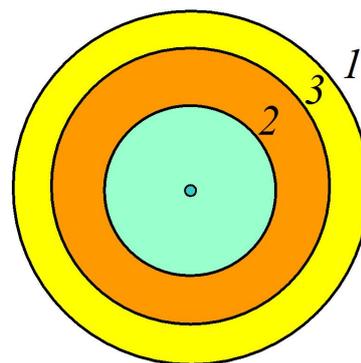


Рис. 2. Внешний (1) и внутренний (2) горизонты событий и граница с пустотой (3) Вселенной, начавшей разлёт внутри сферы её гравитационного радиуса

Допуская мир с любым числом вселенных – "атомов" огромных масс, модель делает неизбежными сближения их пар с ускорением до скоростей, близких к световой, и слияниями с переходом в тепло огромной кинетической энергии их относительно движения. При столкновениях вселенных, даже ставших чёрными дырами, их холодные сингулярности превратятся в HSS. В итоге, данная модель, не только делает ненужной тёмную энергию, но и снимает вопросы о "начале" ("Откуда берутся HSS?").

ЛИТЕРАТУРА

1. Kraiko A.N. *A Model of the Big Bang and Universe Expansion in General Relativity with Spread of a Gas Mass from a Point to Empty Space*. Grav. Cosmol. 2020. **26** (4). 399–407.

ДРОБНЫЕ АНАЛОГИ ЛИНЕЙНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ВЯЗКОУПРУГОГО ПОВЕДЕНИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СРЕД

А. А. Красильникова

Самарский государственный технический университет

Дробное исчисление является хорошо известным и эффективным инструментом для моделирования поведения вязкоупругих материалов, в особенности полимеров.

В литературе математические дробные модели вязкоупругого поведения обычно записывают в форме линейных дифференциальных уравнений дробного порядка $\alpha \in (0, 1)$ в терминах дробной производной Римана–Лиувилля, для решения которых требуются начальные условия вида $\lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1} \varepsilon = \lim_{t \rightarrow 0} F(\sigma)$. Зачастую в процессе решения делается предположение, что функции напряжений и деформаций принадлежат классу функций, для которых почти всюду при $t \in (0, +\infty)$ дифференцирование является правым обратным оператором к дробному интегрированию, т.е. $I_{at}^\alpha D_{at}^\alpha f = f(t)$, если $f(t) \in I_{at}^\alpha(L)$, однако далее оно остается без доказательства.

В данной работе были определены начальные условия для дробных аналогов моделей Максвелла и Фойхта и получены определяющие соотношения для ползучести и релаксации в терминах интегрального оператора $E_{0t; \lambda}^{\alpha_1, \alpha_2}$ [1]. На основе дробного аналога модели Кельвина был получен обратный резольвентный оператор:

$$\left\{ I - \lambda_1 E_{0t; \lambda_2}^{\alpha, \alpha} \right\}^{-1} = I + \lambda_1 E_{0t; \lambda_1 + \lambda_2}^{\alpha, \alpha}.$$

С его помощью можно получить определяющие соотношения для любой дробной линейной вязкоупругой модели с одним демпфером в интегральной форме:

$$\varepsilon = \frac{1}{E^c} \left\{ I + \lambda_1^c E_{0t; \lambda_2^c}^{\alpha, \alpha} \right\} \sigma, \quad \sigma = E^r \left\{ I + \lambda_1^r E_{0t; \lambda_2^r}^{\alpha, \alpha} \right\} \varepsilon,$$

где E^c и E^r — мгновенные модули ползучести и релаксации соответственно, коэффициенты λ_1^c , λ_2^c и λ_1^r , λ_2^r характеризуют вязкоупругое поведения материала при ползучести и релаксации, а порядок дробного интегро-дифференцирования $\alpha \in (0, 1)$ характеризует вязкие свойства материала.

Получены определяющие соотношения для некоторых дробных линейных моделей с двумя демпферами, которые могут быть записаны следующим образом:

$$\varepsilon = \frac{1}{E^c} \left\{ I + \lambda_1^c E_{0t; \lambda_2^c}^{\alpha_1, \alpha_2} \right\} \sigma; \quad \sigma = E^r \left\{ I + \lambda_1^r E_{0t; \lambda_2^r}^{\alpha_1, \alpha_2} \right\} \varepsilon \quad (\alpha_i \in (0, 1), \quad i = 1, 2).$$

Выполнен параметрический анализ рассмотренных дробных моделей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Огородников Е.Н., Радченко В.П., Унгарова Л.Г. *Математическое моделирование наследственно упругого деформируемого тела на основе структурных моделей и аппарата дробного интегродифференцирования Римана–Лиувилля.* // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2016. Т. 20, № 1. С. 167–194.

ФОКУСИРОВКА ВНУТРЕННИХ ВОЛН, ГЕНЕРИРУЕМЫХ ГОРИЗОНТАЛЬНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ СЕГМЕНТА ТОРА В ЛИНЕЙНО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

С. А. Кудряшова, Н. Д. Шмакова

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Одним из основных механизмов перемешивания стратификации в океане является фокусировка внутренних волн, в результате которой амплитуда волн увеличивается в 2 раза, и происходит их опрокидывание [1, 2]. Экспериментальные и теоретические исследования симметричной фокусировки внутренних волн горизонтальными колебаниями тора представлены в работах [3, 4, 5].

Целью данного исследования является изучение основных характеристик полей внутренних волн, генерируемых горизонтальными колебаниями сегмента тора. Эксперименты проводились в резервуаре из оргстекла, заполненного линейно стратифицированной жидкостью. Для регистрации данных был использован PIV метод.

Показано, что фокусировка волн имеет место даже при колебании $1/4$ тора. Экспериментальные данные хорошо согласуются с теорией, однако при умеренных амплитудах колебаний в эксперименте наблюдается генерация вторичного потока в зоне фокусировки, распространяющего горизонтально в направлении от тора в силу асимметричности задачи. Особое внимание было уделено спектральному анализу волн в вертикальной плоскости. Построены частотно-временные диаграммы для различных режимов колебания тора, а также выполнен анализ частотного спектра при помощи преобразования Гильберта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Buhler O., Muller C. *Instability and focusing of internal waves in the deep ocean* J. Fluid Mech. 2007. V. 588. P. 1–28.
2. Ermanyuk E., Shmakova N., Flor J. *Internal wave focusing by a horizontally oscillating torus*. J. Fluid Mech. 2017. V. 813. P. 695–715.
3. Shmakova N., Flor J. *Nonlinear aspects of focusing internal waves*. J. Fluid Mech. 2019. V. 862. R4.
4. Shmakova N., Voisin B., Sommeria J., Flor J. *Internal and inertia-gravity wave focusing at large Stokes numbers*. Phys. Rev. Fluids. 2021. V. 6. 114804.
5. Voisin B., Ermanyuk E., Shmakova N., Flor J. *Internal wave focusing by annular forcing: theory* // 68th Annual Meeting of the APS Division of Fluid Dynamics 2015. V. 60. M31.00003.

РАЗРУШЕНИЕ ЭБОНИТОВЫХ БАЛОК ПРИ АСИММЕТРИЧНОМ ЧЕТЫРЕХТОЧЕЧНОМ ИЗГИБЕ

Д. А. Кузнецов, В. Д. Кургузов

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Возникновение трещин в элементах конструкций в течение срока их службы обусловлено деградацией материала либо наличием скрытых дефектов. При эксплуатации конструкция теряет свою первоначальную несущую способность и выходит из строя при значительно более низких внешних нагрузках. Как правило, разрушение конструкции вследствие роста имеющихся в ней трещин происходит при смешанном нагружении. В работе представлен образец эксцентричной балки прямоугольного поперечного сечения с краевой трещиной, подвергнутый асимметричному четырехточечному нагружению. Изменяя положение трещины относительно центра балки удается получить весь диапазон смешанных мод разрушения I+II, включая чистую I и чистую II моды. Методом конечных элементов получены коэффициенты интенсивности напряжений по I и II модам разрушения, а также T -напряжения при различных геометрических параметрах балки и условиях нагружения. Варьировались длина трещины, положение трещины относительно центра балки и длина короткого пролета. Проведен анализ известных способов вычисления T -напряжений. В ближайшем к вершине трещины элементе наблюдаются сильные осцилляции смещений, которые не упоминаются в литературе, поэтому для определения T -напряжений с максимально возможной точностью предложено вычислять их по смещениям, отсекая ближайшие к вершине трещины 3-4 узла. Проведены экспериментальные исследования вязкости разрушения эбонита в смешанном режиме. Для каждого типа нагружения и геометрии были испытаны 3-5 одинаковых образцов. Испытания проводились при статической нагрузке до полного разрушения образцов. Во всех экспериментах фиксировались угол инициации трещины и критическая нагрузка. Для прогнозирования как направления разрушения, так и критической нагрузки использовались 5 критериев разрушения: обобщенный критерий максимальных окружных напряжений (GMTS), расширенный критерий максимальных окружных деформаций (EMTSN), обобщенный критерий плотности энергии деформирования (GSED), обобщенный критерий максимальных окружных осредненных напряжений (MTAS), критерий максимальной скорости освобождения упругой энергии (MERR). Полученные результаты демонстрируют хорошее совпадение экспериментальных значений критических нагрузок с численным расчетом. Погрешность в определении угла инициации трещины, не превышает 5%. Учитывая хорошую согласованность и соответствие полученных экспериментальных результатов с предсказаниями критериев разрушения, образец асимметричного четырехточечного изгиба может быть использован при исследовании разрушения смешанного типа в технических материалах, например таких, как оргстекло, эбонит, гетинакс.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 23-19-00514).

МАГНИТНЫЕ ФИЛАМЕНТЫ: ФОРМИРОВАНИЕ, УСТОЙЧИВОСТЬ И ОБРАТНОЕ ВЛИЯНИЕ

Е. А. Кузнецов^{1,2}, Е. А. Михайлов³

¹ Физический институт имени П. Н. Лебедева РАН, Москва

² Сколковский институт науки и технологий, Москва

³ Физический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва

Как известно, магнитные поля в космосе распределены весьма неоднородно. Иногда распределения полей имеют форму филаментов с высокими значениями магнитного поля. Как показывают многочисленные наблюдения, такая филаментация имеет место в конвективных ячейках Солнца и других астрофизических объектов. Этот эффект связан с вмороженностью магнитного поля в среду с высокой проводимостью, что приводит к сжатию силовых линий магнитного поля и образованию магнитных филаментов. Аналитически на основе общего анализа показано, что магнитное поле усиливается в областях нисходящих потоков как в двумерных, так и в трехмерных конвективных ячейках. Эти области гиперболического типа для магнитного поля играют роль своеобразного аттрактора. Этот анализ был подтвержден численным моделированием для 2D конвективных ячеек в виде валов. Без диссипации магнитное поле растет экспоненциально во времени и не зависит от соотношения сторон горизонтального и вертикального масштаба ячейки. Увеличение за счет сжатия магнитного поля в высокопроводящей плазме насыщается из-за естественного ограничения, связанного с диссипативными эффектами, когда максимальная величина магнитного поля имеет порядок корня от магнитного числа Рейнольдса Rm . Для солнечной конвективной зоны средняя плотность кинетической энергии превышает среднюю плотность магнитной энергии как минимум на два порядка, что позволяет использовать кинематическое приближение для уравнения индукции МГД. Кроме того, в данной работе на основе анализа устойчивости объясняется, почему нисходящие потоки влияют на формирование магнитных нитей, делая их более плоскими с ориентацией вдоль границ раздела конвективных ячеек.

Работа выполнялась при поддержке гранта РФФ 19-72-30028.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ПУАЗЕЙЛЕВСКИХ ТЕЧЕНИЙ ПОЛИМЕРНОЙ ЖИДКОСТИ

Л. И. Куткин, Б. В. Семисалов

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет*

Известно, что в отличие от случая ньютоновской жидкости, ламинарные течения вязкоупругих растворов и расплавов полимеров могут терять устойчивость практически при сколь угодно малых значениях числа Рейнольдса, Re , [1]. Этот эффект, связанный с упругими свойствами полимеров, при наличии изогнутых линий тока можно объяснить действием растягивающей центробежной силы на молекулы полимера [2]. Однако механизм потери устойчивости течений типа Пуазейля и Куэтта с прямыми линиями тока при малых и умеренных Re до недавних пор оставался плохо

изученным. Последние исследования [3, 4], проведённые с использованием мезоскопической реологической модели Покровского–Виноградова [5], позволили продвинуться в понимании этого механизма и дать его детальное математическое описание. В частности, установлено, что ключевую роль в процессе потери устойчивости с точки зрения механики играют размер и ориентация макромолекул полимерной жидкости, с точки зрения математики – особые точки решений полученных уравнений.

В работе с применением модели из [3, 4] и новых численных алгоритмов исследован процесс установления течения полимерной жидкости в цилиндрическом канале. Обнаружены два режима: в первом нестационарные решения уравнений модели сходятся к стационарным, во втором наблюдается расходимость приближений решения. В работе дана численная проверка гипотезы о том, что расходимость обусловлена наличием у решения особой точки; построена траектория движения особой точки в комплексной плоскости вплоть до её выхода на границу канала; исследовано влияние реологических параметров модели на положение траектории.

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования РФ № 075-15-2022-281.

ЛИТЕРАТУРА

1. Datta S. S. et al. *Perspectives on viscoelastic flow instabilities and elastic turbulence*. Phys. Rev. Fluids. 2022. V. 7. No. 080701.
2. McKinley G. H., Pakdel P., Öztekin A. *Rheological and geometric scaling of purely elastic flow instabilities*. J. Non-Newtonian Fluid Mech. 1996. V. 67. P. 19–47.
3. Семисалов Б.В. *О точных решениях Пуазейлевского типа для течений вязкоупругой полимерной жидкости в цилиндрическом канале*. ПМТФ. 2023. Т. 64. № 4. С. 139–151.
4. Семисалов Б.В. *Об одном сценарии перехода к турбулентности при течении полимерной жидкости в цилиндрическом канале*. Мат. моделирование. 2023. Т. 35. № 11. С. 62–78.
5. Алтухов Ю. А., Гусев А. С., Пышнограй Г. В., Кошелев К. Б. *Введение в мезоскопическую теорию текучести полимерных систем*. Барнаул: Изд-во АлтГПА, 2012. 121 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В РЕШЕНИИ АКТУАЛЬНЫХ ЗАДАЧ СЕРДЕЧНО-СОСУДИСТОЙ ХИРУРГИИ

А. Г. Кучумов

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

Развитие методов неинвазивной диагностики в современной хирургии, математических и компьютерных моделей позволяет со все возрастающей степенью точности описывать биомеханические процессы, протекающие в организме. Данное обстоятельство повышает возможность их использования при совершенствовании имеющихся и разработке новых персонализированных методов диагностики и прогнозирования лечения. Вычислительная гидродинамика является динамично развивающимся инструментом в решении инженерных и междисциплинарных задач. Медицина

является одной из областей, где применение компьютерных методов и технологий необходимо. Одним из важных аспектов является рассмотрение применения методов биомеханики и вычислительной гидродинамики. В данной работе представлены результаты применения методов вычислительной гидродинамики в решении актуальных задач сердечно-сосудистой хирургии (моделирование течения крови для оценки эффективности шунтирования при аорто-легочном анастомозе у детей с врожденным пороком сердца, оценка гемодинамических показателей в аортальном клапане в норме и при патологии, моделирование течения крови при стентировании).

Моделирование течения крови для оценки эффективности шунтирования при аорто-легочном анастомозе у детей с врожденным пороком сердца. На основе изображений магнитно-резонансной томографии была построена система «аорта–пульмонарная артерия–шунт» для анализа гемодинамики у детей с врожденным пороком сердца. Кровь рассматривалась как ньютоновская жидкость. Граничные условия были получены из ультра-звуковых измерений. В данной работе рассмотрена модель течения крови «аорта–шунт–легочная артерия». Был получен набор геометрических образов у четырех пациентов для последующего импорта в конечно-элементный решатель ANSYS CFX с целью решения задачи гемодинамики. Анализировались три варианта установки модифицированного шунта Blalock–Taussig с помощью распространенных гемодинамических показателей (пристеночные касательные напряжения, осредненные за сердечный цикл пристеночные касательные напряжения, индекс колебаний касательных напряжений, относительное время пребывания). Было выявлено, что варианты формирования шунта должны быть индивидуальны, т.е. учитывать анатомо-физиологические особенности конкретного пациента. Отмечена несимметричность кровотока в легочных артериях в различных местах имплантации шунта. Также было проведено сравнение работоспособности гемодинамических показателей для оценки эффективности модифицированного шунта Blalock–Taussig. Объективизированный и персонализированный подход к особому лечению каждого конкретного пациента позволит значительно снизить детскую смертность и улучшить качество реабилитации.

Оценка гемодинамических показателей в аортальном клапане в норме и при патологии. В работе проведен анализ использования двух подходов к моделированию турбулентных процессов: при помощи метода крупных вихрей и на основе моделей турбулентной вязкости. Решалась осесимметричная задача на идеализированной трехмерной геометрии, построенной на основе данных снимков УЗИ и литературного обзора. Задача решалась в рамках FSI подхода при помощи программного пакета COMSOL Multiphysics. Поток крови моделируется несжимаемой ньютоновской жидкостью с постоянной плотностью и вязкостью. Для моделирования биомеханического поведения створок аортального клапана в норме применяется модель анизотропной гиперупругости Хольцапфеля-Гассера-Огдена. Патологическое состояние створок аортального клапана описывается линейно упругой моделью. Математическая постановка включает уравнение Навье-Стокса с условием несжимаемости, уравнения для описания моделей турбулентности. Также записывается уравнение движения для твердого тела. Система замыкается начальными и граничными условиями, а также условиями сопряжения жидкости и твердого тела. На входе в расчетную область задается профиль скорости. Для определения давления на выходе из расчетной области используется двухэлементная модель Виндекесселя, в которую в качестве входных данных принимается профиль скорости. Полученные результаты описывают изме-

нения основных гемодинамических показателей: скорости, давления, пристеночных касательных напряжений и индекса колебаний касательных напряжений. Также проведено сравнение результатов для значений кинетической и турбулентной кинетической энергии между двумя моделями турбулентности и состоянием в норме и при патологии.

Моделирование течения крови при стентировании. Целью данной работы является оценить влияние механических параметров артерии, бляшки и стента на эффективность стентирования при помощи анализа параметров как напряженно-деформированного состояния, так и гемодинамики. В данном исследовании рассматривается идеализированная модель системы «артерия – бляшка – стент». При этом геометрическая модель состоит из нескольких слоев: адвентиция – внешний слой, медиа – средний слой, бляшка и стент. Механические параметры слоев артерии описывались с помощью трехпараметрической модели Огдена. В результате реализации одностороннего и двустороннего алгоритмов взаимодействия жидкости и твердого тела были найдены распределения гемодинамических параметров.

Часть работы выполнена при поддержке гранта МИГ-2024 (проект: Технологии для персонализированного лечения аортального клапана с помощью операции TAVI - от численного моделирования для аддитивного производства каркасов из сплавов с памятью формы)

ЗАДАЧА О КОНТАКТЕ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНЫ КИРХГОФА–ЛЯВА С НАКЛОННЫМ ПРЕПЯТСТВИЕМ

Н. П. Лазарев

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск

Контактные задачи для пластин исследованы во многих работах, см., например, [1]. Имеется большое количество работ, посвященных контакту пластин с вертикальными препятствиями, граница которых представляет собой цилиндрические поверхности с образующими, перпендикулярными срединным плоскостям пластин [2, 3] и др. Вместе с тем, случай пластин, контактирующих с наклонными препятствиями по верхним (нижним) кромкам, является мало изученным. Рассматривается новая нелинейная математическая модель, описывающая контакт неоднородной пластины с наклонным недеформируемым препятствием. Предполагается, что пластина имеет объемное жесткое включение. На части границы задаются условия возможного контакта с недеформируемым препятствием, на оставшейся части границы — условия закрепления. Доказана однозначная разрешимость вариационной задачи. Найдена эквивалентная дифференциальная постановка, соответствующая исходной вариационной. Исследуется предельный переход в семействе задач с разной длиной контактной зоны. Установлена непрерывная зависимость решений в пространстве Соболева, при стремлении длины контактной зоны к нулю.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 24-21-00081).

ЛИТЕРАТУРА

1. Khludnev A. M., Kovtunenkov V. A. *Analysis of cracks in solids*. Southampton, Boston: WIT-Press, 2000.
2. Lazarev N. P., Itou H., Neustroeva N. V. *Fictitious domain method for an equilibrium problem of the Timoshenko-type plate with a crack crossing the external boundary at zero angle*. Jpn. J. Ind. Appl. Math. 2016. V. 33. № 1. P. 63–80.
3. Николаева Н. А. *Метод фиктивных областей в задаче Синьорини о равновесии пластины Кирхгофа–Лява*. Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ. 2015. Т. 15. № 3. С. 78–90.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УДЕРЖАНИЯ ПЛАЗМЫ
В СПИРАЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ И АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ
ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ**

Г. Г. Лазарева, И. П. Оксогоева

Российский университет дружбы народов им. Патриса Лумумбы, Москва

Представлена новая математическая модель переноса плазмы в спиральном магнитном поле, основанная на стационарном уравнении переноса плазмы в аксиально-симметричной постановке[1]. В системе отсчёта вращающейся плазмы движение магнитных возмущений имеет компоненту скорости, сонаправленную с магнитным полем, что позволяет передавать импульс запертым частицам[2]. Столкновения между пролётными и запертыми частицами обеспечивают эффективную силу, действующую на плазму в целом и способствующую возврату ионов в область удержания. В области поперечного сечения центральной части установки численно решается стационарное уравнение переноса плазмы. Вычислительные эксперименты показали, что с увеличением производной абсолютной величины электрического поля и глубины гофрировки наблюдается эффект пинчевания (уменьшения среднего радиуса) плазменной струи, проявляющийся и в эксперименте. Полученные результаты соответствуют экспериментальным данным. Получены зависимости интегральных характеристик вещества от глубины гофрировки магнитного поля, диффузии и потенциала плазмы. В дальнейшем описанный метод может быть использован для прогнозирования работы действующих и проектируемых установок для удержания плазмы в винтовом магнитном поле.

Верификация кодов для математического моделирования, основанных на использовании сеточных методов, состоит в проведении теста на порядок точности. Точное решение необходимо для систематической оценки ошибки дискретизации, влияющей на результаты моделирования. Целью работы является разработка тестов для кодов, основанных на РС-методе на основе уже существующих качественных решений на компактном носителе. Рассмотрена начально-краевая задача для функции распределения и потенциала электрического поля. Разработаны и апробированы тесты с аналитическим решением. В ходе расчетов на сгущающихся сетках анализировались численный шум, сохранение заряда и колебание энергии, погрешности вычисления функции распределения, скорости, плотности и выполнения уравнения Власова.

Работа поддержана грантом Министерства образования и науки РФ (мегагрант соглашение № 075-15-2022-1115).

ЛИТЕРАТУРА

1. Sudnikov A. V. et al. *SMOLA device for helical mirror concept exploration*. // Fusion Eng. Design. 2017. V. 122. P. 86–93.
2. Beklemishev A. D. *Radial and Axial Transport in Trap Sections with Helical Corrugation* // AIP CP. 2016. 1771.

ВЛИЯНИЕ УСЛОВИЙ ПОЛЗУЧЕСТИ И ПОСЛЕДУЮЩЕГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ СВОЙСТВ ОБРАЗЦОВ ИЗ СПЛАВА АК4 (Al-Cu-Mg) НА СОПРОТИВЛЕНИЕ УСТАЛОСТИ

А. Ю. Ларичкин, К. В. Захарченко

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Использование методов формообразования элементов конструкций из габаритных панелей в условиях ползучести, позволяет увеличить технологичность и точность изготовления заготовок для элементов фюзеляжа самолета, его оперения или крыла, а также позволяет формовать ответственные узлы, исключив применение холодной штамповки и клепки, которые снижают усталостные характеристики.

Авторами работы проведены испытания на ползучесть и усталость на гладких образцах круглого сечения. В условиях ползучести при температуре отжига $T = 420^\circ\text{C}$ моделировался процесс формообразования габаритной панели из сплава АК4 с последующим восстановлением механических свойств материала, путем термической обработки (ТО).

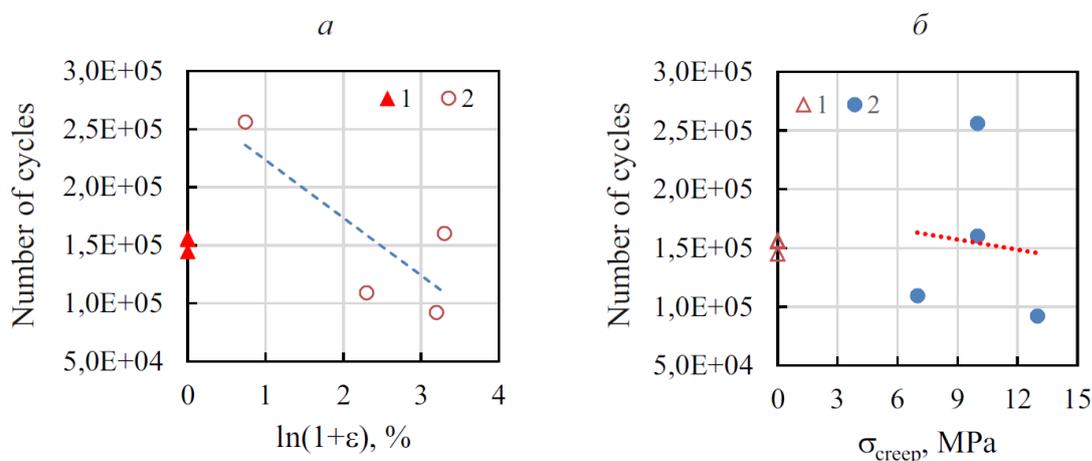


Рис. 2: Зависимость числа циклов до разрушения от предварительной деформации ползучести (а) и предварительных нагрузок (б): 1 – исходные образцы; 2 – восстановленные образцы после растяжений в условиях ползучести

Образцы из сплава АК4 растягивались до деформаций ползучести в диапазоне $\varepsilon = 0,74 \dots 3,5\%$, а затем подвергались термической обработке в соответствии с производственной инструкцией. Далее образцы с восстановленными свойствами, после ТО, подвергались испытанию на усталость, которое проводилось при отнулевом циклическом нагружении, с коэффициентом асимметрии $R = 0$. Максимальное напряжение цикла было оценено при помощи методики, описанной в [1], и составляло $\sigma_{max} = 240$. По данным экспериментов на ползучесть определены параметры данного материала для классического закона Бойла-Нортонна.

Результаты усталостных испытаний показали, что существуют уровни деформаций ползучести, при которых предел ограниченной выносливости восстановленных образцов не становится ниже, по сравнению с исходными образцами (см. Рис 2). Данный факт позволяет выработать рекомендации для использования технологического цикла «формообразование в условиях ползучести – термическая обработка» при изготовлении заготовок деталей самолетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Захарченко К.В., Капустин В.И., Ларичкин А.Ю. Ускоренная оценка влияния технологических факторов на прочностные характеристики Ti-6Al-4V И Al-Si-Mg. Обработка металлов (технология, оборудование, инструменты). 2021. Т. 23, № 4. С. 125–139.

ИЗУЧЕНИЕ ВЛИЯНИЯ ТЕПЛОВОЙ НАГРУЗКИ НА ТОПОЛОГИЮ ТЕЧЕНИЯ В СИСТЕМЕ „ЖИДКОСТЬ – ГАЗ“ НА ОСНОВЕ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОНВЕКЦИИ

Е. В. Ласковец

Алтайский государственный университет, Барнаул

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

Рассматривается двухслойное конвективное течение жидкости и газа в горизонтальном канале с твердыми непроницаемыми верхней и нижней стенками. Граница раздела сред полагается недеформируемой. Для изучения влияния физических и геометрических характеристик на течения в системе „жидкость – газ“ построено точное решение, являющееся обобщением известного решения Остроумова – Бириха [1, 2, 3]. На термокапиллярной границе раздела учитываются эффекты тепло- и массопереноса. При моделировании процессов в двухкомпонентном верхнем слое системы, состоящем из газа и паров жидкости, принимаются во внимание эффекты термодиффузии и диффузионной теплопроводности, а также задан расход газа. Математическая модель основана на приближении Буссинеска уравнений Навье-Стокса, а также уравнении диффузии для описания переноса пара в газопаровом слое. На твердых верхней и нижней стенках выполнены условия прилипания для скорости, задано линейное распределение температуры на нижней границе системы. Рассматриваются различные условия для температуры и концентрации пара на верхней стенке канала. На термокапиллярной границе раздела сред полагаются равными функции скорости и температуры, заданы кинематическое и динамическое условия, условие

переноса тепла с учетом эффекта Дюфура и условие баланса масс с учетом эффекта Соре. Концентрация насыщенного пара вычисляется исходя из следствия уравнений Менделеева-Клапейрона и Клапейрона-Клаузиуса [3].

В качестве примера рассматривается система типа „этанол – воздух“. Изучено влияние расход газа, толщины жидкого слоя и тепловой нагрузки на границах системы. Представлены случаи смены режимов течения, а также процессов конденсации и испарения легкой жидкости. Показано, что значения высоты нижнего слоя системы и продольных градиентов температуры на границах системы оказывают существенное влияние на характер течения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 22-11-00243, <https://rscf.ru/project/22-11-00243/>).

ЛИТЕРАТУРА

1. Остроумов Г. А. *Свободная конвекция в условиях внутренней задачи*. Москва-Ленинград: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1952.
2. Бирих Р. В. *О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости*. ПМТФ. 1966. № 3. С. 69–72.
3. Гончарова О. Н., Резанова Е. В., Люлин Ю. В., Кабов О. А. *Изучение конвективных течений жидкости и спутного потока газа с учетом испарения*. ТВТ. 2017. Т. 55, № 6. С. 720–732.

ГОМОГЕНИЗАЦИЯ МОДЕЛИ АНТИПЛОСКОГО СДВИГА АРМИРОВАННОГО ТЕРМОУПРУГОГО КОМПОЗИТА

Э. И. Леонова^{1,2}, С. А. Саженок¹

¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

²Новосибирский государственный университет

Рассматривается статическая задача антиплоского сдвига термоупругого композита, прошитого армирующими нитями. Исходная постановка содержит два малых положительных параметра δ и ε , характеризующих, соответственно, толщину нити и расстояние между соседними нитями. Также считается, что от δ и ε зависят термомеханические характеристики композитного тела, что означает их контрастность и следовательно сильную неоднородность композитного тела. Исследуется асимптотическое поведение решений при стремлении к нулю сначала параметра δ , а затем параметра ε . Оба предельных перехода математически строго обоснованы. Предельный переход при $\delta \rightarrow 0$ базируется на применении асимптотической техники, развитой в работах Е. М. Рудого и А. И. Фурцева (см., например, [1]), и в результате приводит к корректной математической постановке задачи статики для композита, прошитого множеством равноудалённых друг от друга (на расстояние ε) и параллельных друг другу прямолинейных тонких (т.е. одномерных) термоупругих нитей. Предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$ выражает собой процедуру гомогенизации. Этот переход основан на применении стандартного метода двухмасштабной сходимости Аллера–Нгуэтсенга и на версии этого метода для сходимости на тонких периодических структурах [2]. Результатом является конструкция предельной усреднённой модели антиплоского

сдвига композитного материала. Эта модель является математически корректной. Она поставлена на макроскопическом масштабе, т.е. на характерном масштабе всего композитного тела, на котором более не требуется рассматривать поведение каждого отдельного включения, но даётся эффективное среднее термомеханическое описание всего композитного тела в целом. С использованием новых полученных моделей проводятся численные расчеты для определения полей смещений и температуры.

В целом, результаты настоящего исследования являются естественным обобщением результатов работы [3] со случая однородной связующей матрицы на случай композитной связующей матрицы. Под связующей матрицей подразумевается тело композитного материала за вычетом армирующих нитей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Furtsev A., Rudoy E. *Variational approach to modeling soft and stiff interfaces in the Kirchhoff-Love theory of plates*. International Journal of Solids and Structures. 2020. Vol. 202. P. 562–574.
2. Allaire G., Damlamian A., Hornung U. *Two-scale convergence on periodic surfaces and applications*. Proceedings of the International Conference on Mathematical Modelling of Flow through Porous Media. 1996. P. 15–25.
3. Sazhenkov S. A., Fankina I. V., Furtsev A. I., Gilev P. V., Gorynin A. G., Gorynina O. G., KarnaeV V. M., Leonova E. I. *Multiscale analysis of a model problem of a thermoelastic body with thin inclusions*. Siberian Electronic Mathematical Reports. 2021. Vol. 18. № 1. P. 282–318.

ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА НЕОБРАТИМЫХ ПРОЦЕССОВ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

С. А. Лурье, П. А. Белов

Институт прикладной механики РАН, Москва

Предложено развитие вариационного принципа Л.И. Седова для моделирования диссипативных процессов. Обсуждается фундаментальная природа свойств симметрии и антисимметрии тензоров физических свойств по отношению к мультииндексам, характеризующим независимые аргументы билинейных форм в вариационной формулировке термодинамических процессов. Показано, что для обратимых процессов тензоры физических свойств обязательно должны быть симметричны относительно мультииндексов. Наоборот, для необратимых термодинамических процессов тензоры физических свойств антисимметричны относительно перестановки мультииндексов и определяют неинтегрируемую вариационную форму. Сформулированный вариационный принцип позволяет строить диссипативные модели, добавляя к сформулированному лагранжиану необходимое количество каналов диссипации. Каналами диссипации названы неинтегрируемые вариационные формы, линейные по вариациям аргументов. В качестве примеров рассмотрены гидродинамические модели Дарси, Навье-Стокса и Бринкмана, каждая из которых определяется различным набором каналов диссипации. В качестве другого примера представлена вариационная модель процессов теплопередачи. Уравнения законов теплопроводности получены как

уравнения совместности путем исключения введенного теплового потенциала из материальных уравнений для температуры и теплового потока. Сформулированы законы Фурье, Максвелла-Каттанео, обобщенные законы теплопроводности Гаера-Крумхакса и Джеффри. Температура и тепловой поток определяются из выражения возможной работы, совершаемой на вариациях первых производных от термического потенциала по аналогии с механикой сплошных сред, где внутренние усилия совершают возможную работу на вариациях деформаций. Уравнения законов теплопроводности рассматриваемых моделей теплообмена получены как уравнения совместности путем исключения термического потенциала из уравнений определяющих соотношений для температуры и теплового потока. Вариационный метод позволяет формулировать согласованный спектр граничных условий в каждой неособенной точке поверхности. Кроме того, для краевой задачи по времени вариационный принцип определяет пары альтернативных условий в начальном и конечном моментах времени рассматриваемого процесса.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (грант № 23-11-00275), выданного Институту прикладной Механики РАН.

РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КАПЛИ ЖИДКОСТИ ИЛИ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА В ЖИДКОСТИ, ПОДВЕРЖЕННОЙ ВИБРАЦИЯМ

Т. Любимова^{1,2}, Д. Любимов², С. Мераджи³, Б. Ру⁴

¹Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

²Пермский государственный национальный исследовательский университет

³Университет Тулона, Тулон, Франция

⁴Университет Экс-Марсель, Марсель, Франция

Известно, что плоская горизонтальная поверхность жидкости (или поверхность раздела двух жидкостей) при действии вертикальных вибраций может стать неустойчивой по отношению к параметрическому возбуждению волн Фарадея, когда частота возбуждаемых волн равна половине частоты вибраций. В работе [1] рассмотрены резонансные колебания сферической капли жидкости (газового пузырька) в жидкости отличающейся плотности в вибрационном поле неакустической частоты. Отмечается, хотя в рассматриваемой задаче невозможно вывести непосредственно уравнение типа уравнения Матье для возмущений, полученная карта устойчивости, типичная для параметрического резонанса, указывает на то, что наблюдается своеобразный параметрический резонанс. При этом, как и в случае уравнения Матье, частота внешнего воздействия распадается на две собственные частоты, но, в отличие от уравнения Матье, эти частоты различны, они соответствуют соседним модам собственных колебаний. Такая ситуация типична для параметрических колебаний связанных систем [2]. Учет вязкой диссипации в рамках феноменологического подхода, приводит к двум эффектам. Во-первых, возбуждение параметрического резонанса приобретает пороговый характер. Кроме того, происходит вязкий сдвиг частоты. Анализ результатов показывает парадоксальное влияние вязкости, выражающееся в расширении области неустойчивости в пространстве параметров при учете бесконечно малой вязкости. Пороговое значение амплитуды вибраций, необходимое для возбуждения резонанса растет с увеличением номера резонансной моды, таким образом, наиболее

просто возбуждается резонанс, при котором взаимодействуют вторая и третья моды собственных колебаний. Прямое численное моделирование колебаний пузырька в жидкости под действием вибраций подтверждает существование параметрического резонанса вынужденных колебаний формы и условия его возбуждения. Анализ эволюции различных мод колебаний формы свидетельствует о том, что амплитуды второй и третьей гармоник возрастают при значениях параметров из соответствующей области неустойчивости вынужденных колебаний. Эти гармоники достигают больших значений, пока пузырек не достигает стенки, затем они резко уменьшаются.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lyubimov D. V., Lyubimova T. P., Cherepanov A. A. *Resonance oscillations of a drop (bubble) in a vibrating fluid*. J. Fluid Mech. 2021, T. 909, С. А18.
2. Schmidt G. *Parameterregte Schwingungen*. Web Deutcher Verlag der Wissenschaften, 1975.

СТАБИЛИЗАЦИЯ К НУЛЮ ЗА КОНЕЧНОЕ ВРЕМЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Н. А. Люлько

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет*

В полуполосе $\Pi = \{(x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t < \infty\}$ рассматривается смешанная задача для неавтономной квазилинейной гиперболической системы первого порядка

$$\partial_t u_j + A_j(x, t, u) \partial_x u_j + \sum_{k=1}^n B_{jk}(x, t, u) u_k = 0, \quad 0 < x < 1, t > 0, 1 \leq j \leq n, \quad (1)$$

где $n \geq 2$ и $0 \leq m \leq n$ - целые числа и $u = (u_1, \dots, u_n)$ - неизвестная вещественная вектор-функция. При этом коэффициенты A_j и B_{jk} - гладкие функции и A_j для всех $(x, t) \in \Pi$ и всех $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in R^n$ удовлетворяют условиям

$$A_j(x, t, \Theta) \geq \Lambda_0, \quad 1 \leq j \leq m, \quad A_j(x, t, \Theta) \leq -\Lambda_0, \quad m + 1 \leq j \leq n,$$

для некоторого $\Lambda_0 > 0$. Для решения $u = u(x, t)$ системы (1) при $t = 0$ задаются известные начальные данные

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

и предполагается, что решение u удовлетворяет граничным условиям отражения

$$u_{out}(t) = P u_{in}(t), \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Здесь $u_{out}(t) = (u_1(0, t), \dots, u_m(0, t), u_{m+1}(1, t), \dots, u_n(1, t))$, $u_{in}(t) = (u_1(1, t), \dots, u_m(1, t), u_{m+1}(0, t), \dots, u_n(0, t))$, а $P = (p_{jk})$ - постоянная $n \times n$ матрица такая, что матрица P_{abs} нильпотентна, то есть

$$(P_{abs})^n = 0, \quad \text{где } P_{abs} = (|p_{ij}|)_{i,j=1,\dots,n}. \quad (4)$$

В [1] доказано, что если система (1) является распавшейся ($B_{jk} = 0, j \neq k$), то при выполнении условия (4) все гладкие решения задачи (1)-(3) становятся равными нулю за конечное время, не зависящее от начальных данных φ . Если же система (1) не является распавшейся, то условие (4) гарантирует, что нулевое решение строго гиперболической задачи (1)-(3) является экспоненциально устойчивым.

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики имени С.Л. Соболева СОРАН (проект № FWNF -2022-0008).

ЛИТЕРАТУРА

1. Люлько Н. А. *Стабилизация к нулю за конечное время и экспоненциальная устойчивость квазилинейных гиперболических систем*. СМЖ. 2023. Т. 64. № 6. С. 1229–1247.

ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ И ПЕРЕМЕШИВАНИЕ В СЛОИСТЫХ ТЕЧЕНИЯХ НАД НЕРОВНЫМ ДНОМ

В. Ю. Ляпидевский, А. А. Чесноков

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Сдвиговые течения стратифицированной жидкости, обусловленные рельефом дна и перепадом плотности, широко распространены в природе и промышленных приложениях. В таких течениях могут формироваться разнообразные волновые структуры и слои смешения вследствие развития сдвиговой неустойчивости. Изучение характерных особенностей распространения и трансформации внутренних волн при обтекании локальных препятствий является объектом интенсивных теоретических и экспериментальных исследований.

С использованием оригинального подхода, основанного на применении уравнений трехслойной мелкой воды с учетом турбулентного перемешивания, разработаны математические модели генерации и обрушения внутренних волн в неоднородной жидкости над неровным дном [1, 2]. В приближении Буссинеска уравнения движения записываются в виде системы неоднородных законов сохранения. Определены скорости распространения возмущений и сформулированы понятия докритического (сверхкритического) течения. Рассмотрена задача о формировании слоя смешения в двухслойном сдвиговом течении. Показано, что в зависимости от разности скоростей сонаправленных потоков реализуется монотонный, либо волновой стационарный слой смешения. Выполнено сопоставление полученных решений с экспериментальными данными. Предложена упрощенная модель, в которой закон вовлечения жидкости из внешних слоев в вихревую прослойку задается условием равновесия. Показано, что модель применима для описания перемешивания и расщепления потока в глубоководных течениях, а также для моделирования внутренних гидравлических прыжков [3]. Предложенный подход к описанию процессов перемешивания распространен на случай слоистых негидростатических течений. Это позволило уточнить полученную в [4] модель динамики внутренних волн большой амплитуды.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 23-41-00090).

ЛИТЕРАТУРА

1. Chesnokov A. A., Gavriilyuk S. L., Liapidevskii V. Yu., *Mixing and nonlinear internal waves in a shallow flow of a three-layer stratified fluid*. Phys. Fluids. 2022. V. 34. N 7. 075104.
2. Ляпидевский В. Ю., Чесноков А. А. *Слой смешения в двухслойных спутных течениях стратифицированной жидкости*. ПМТФ. 2022. Т. 63. № 6. С. 122–134.
3. Ляпидевский В. Ю., Чесноков А. А. *Равновесная модель слоя смешения в сдвиговом течении стратифицированной жидкости*. ПМТФ. 2024. Т. 65. (принята к печати).
4. Chesnokov A. A., Ermishina V. E., Liapidevskii V. Yu. *Strongly non-linear Boussinesq-type model of the dynamics of internal solitary waves propagating in a multilayer stratified fluid*. Phys. Fluids. 2023. V. 35. N 7. 076605.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ
НА КАЛЬЦИТ

К. К. Маевский

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Кальцит (CaCO_3) известен как один из типичных минералов в осадочных породах на поверхностях Земли и других планет. Присутствие карбонатов считается свидетельством существования жидкой воды, которая была обнаружена в чередующихся слоях водных минералов и глинистых минералов на поверхности Марса. Особенно много карбонатов существовало в виде морских отложений на поверхности Земли. Реакции кальцита в экстремальных условиях необходимы для понимания соотношения C/O звезд с экзопланетами, для понимания процесса формирования атмосферы вблизи звезд. Несмотря на то, что поведение кальцита при ударно-волновом нагружении важно для понимания реакций, вызванных высокоэнергетическим воздействием, таких как плавление, разложение и ионизация, экспериментальные исследования пока ограничены [1].

Численное моделирование термодинамических параметров ударно-волнового нагружения кальцита выполнено в представлениях термодинамически равновесной модели [2, 3]. Построены уравнения состояния для двух фаз кальцита. Недостающие параметры получены на основании соответствия данным экспериментов. Построены ударные адиабаты обеих фаз в диапазоне значений давления от 1 до 1000 ГПа. Проведена верификация полученных результатов моделирования с данными полученными на основании экспериментов и расчетами других авторов. Представленные результаты по кальциту дают основу для рассмотрения теоретического уравнения состояния в экстремальных условиях, где модельные расчеты в настоящее время демонстрируют значительное разнообразие [4].

Работа выполнена в рамках государственного задания ИГиЛ СО РАН, FWGG–2021–0006–2.3.1.2.7.

ЛИТЕРАТУРА

1. Umeda Y., Fukui K., Sekine T., Guarguaglini M., Benuzzi-Mounaix A., Kamimura N., Katagiri K., Kodama R., Matsuoka T., Miyanishi K., Ravasio A., Sano T., Ozaki N. *Hugoniot and released state of calcite above 200 GPa with implications for hypervelocity planetary impacts*. Sci. Adv. 2016. V. 2. N 8. P. e1600157.
2. Маевский К. К. *Силикаты магния при высоких динамических нагрузках*. Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2022. № 79. С. 111–119.
3. Маевский К. К. *Численное моделирование термодинамических параметров германия*. Теплофизика высоких температур. 2022. Т. 60. № 6. С. 701–706.
4. Li Y., Zou Y., Chen T., Wang X., Qi X., Chen H., Du J. *P-V-T equation of state and high-pressure behavior of CaCO₃ aragonite*. Am. Mineral. 2015. V. 100. P. 2323–2329.

СТОХАСТИЧЕСКАЯ НАКАЧКА НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН

Д. В. Макаров¹, А. В. Слюняев^{1,2}, Е. Н. Пелиновский^{1,2}

¹Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева ДВО РАН, Владивосток

²Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

В докладе рассматривается динамика волн, описываемых стохастическим нелинейным уравнением Шредингера

$$i \frac{\partial A}{\partial \tau} + \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + |A|^2 A = \alpha(y, \tau), \quad (1)$$

где $\alpha(y, \tau)$ – коррелированный по времени и пространству аддитивный шум. Поведение решений (1) качественно зависит от соотношения между нелинейностью и дисперсией. Это соотношение характеризуется индексом Бенджамина-Фейра

$$\text{BFI} = \nu \frac{\sqrt{W(\tau)}}{\sigma_k(\tau)}, \quad (2)$$

где

$$W = \frac{1}{L} \int \langle |A(y, \tau)|^2 \rangle dy, \quad (3)$$

$$\sigma_k^2 = \frac{\int \langle k^2 |\tilde{A}(k, \tau)|^2 \rangle dk}{\int \langle |\tilde{A}(k, \tau)|^2 \rangle dk}. \quad (4)$$

Здесь L – размер рассматриваемой области, а $A(\tilde{k}, \tau)$ – Фурье-образ от решения (1)

$$\tilde{A}(k, \tau) = \frac{1}{L} \int A(y, \tau) e^{-iky} dy. \quad (5)$$

В докладе показано, что шум приводит к росту энергии волнового поля на малых временах, с последующим достижением насыщения, а также к линейному росту ширины спектра со временем. Сочетание этих двух процессов приводит к спадаанию индекса Бенджамина-Фейра и, как следствие, подавлению модуляционной неустойчивости.

Работа выполнена при финансовой поддержке мегагранта 075-15-2022-1127

СНИЖЕНИЕ ВЫСОТЫ ВОЛНЫ ЦУНАМИ ПОДВОДНЫМ БАРЬЕРОМ

Ан. Г. Марчук¹, М. Ю. Шадрин²

¹*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО
РАН, Новосибирск*

²*Институт автоматики и электрометрии СО РАН, Новосибирск*

Одним из способов защиты от атаки цунами являются массивные вертикальные стены, возведённые вокруг портов или поперёк входа в бухты. Во время сильных цунами такие стены, возвышающиеся над водой, часто опрокидываются и не выполняют своей функции. Катастрофическое цунами 11 марта 2011 года у северо-восточного побережья Японии разрушило большинство таких сооружений в этой зоне. В этом плане затопленный вертикальный барьер является более устойчивым, хотя он в меньшей степени гасит проходящую над ним волну цунами.

На основе энергетических соотношений для длинной волны сделана оценка высоты волны после прохождения ею затопленного вертикального барьера и сформулированы внутренние граничные условия, реализующие частичное отражение цунами от таких сооружений. Результаты модельных расчётов хорошо согласуются с измерениями высот проходящих над подводными барьерами волн при лабораторном моделировании в гидрофизическом лотке [1]. Такого рода защитные сооружения способны задерживать до 45% энергии волны цунами, уменьшая при этом высоту цунами на 25%.

Также проведены расчёты распространения волны цунами в бухтах в регионе Санрику (Япония) с наличием виртуального подводного барьера. Для различной высоты подводной стенки (относительно глубины) найдена высота волны около некоторых участков береговой линии бухты. Сравнение этих высот с результатами моделирования при отсутствии барьера показывает ослабляющий эффект защитного сооружения такого типа. При этом следует заметить, что совсем не обязательно при помощи защитных стенок добиваться снижения высоты цунами до нуля. Достаточно снизить амплитуду волны у берега на 20 – 30 процентов для существенного снижения ущерба от этого стихийного бедствия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фридман А. М., Альперович Л. С., Шемер Л., Пустильник Л., Штивельман Д., Марчук Ан. Г., Либерзон Д. *О подавлении волны цунами подводными барьерами. Успехи Физических Наук.* 2010. Т. 180. № 8. С. 843–850.

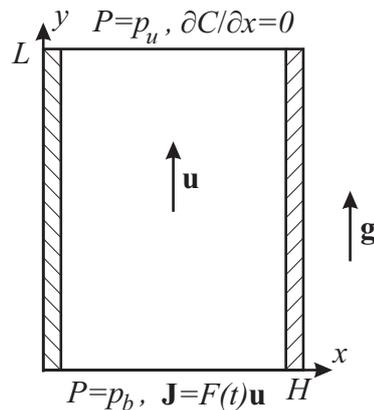
НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ СМЕСИ ЧЕРЕЗ ВЕРТИКАЛЬНЫЙ ФИЛЬТР ПРОТИВ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Б. С. Марышев¹, Л. С. Клименко^{1,2}, Н. В. Колчанов^{1,2}

¹Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

²Пермский государственный национальный исследовательский университет

Рассмотрена задача о конвективной устойчивости одномерного течения в прямоугольной области пористой среды. Течение возникает при транспорте порции тяжелой примеси через рассматриваемую область снизу вверх. Такая постановка задачи была использована в эксперименте [1] где наблюдалось возникновение неустойчивости. Между горизонтальными границами задается постоянный перепад давления, на верхней границе условие свободного протекания, а на нижней границе заданный поток примеси зависящий от времени. Вертикальные границы считаются непроницаемыми (см. рисунок). Предполагается развитие неустойчивости Релея-Тейлора на нижнем фронте. Задача решается в приближении Дарси-Буссинеска транспорт примеси описывается в рамках нелинейной МММ (Mobile-Immobile Media) модели [2].



Получены и обсуждены зависимости критического времени от параметров транспорта. Сравнение такого времени с экспериментальными данными показывает, что механизм неустойчивости и модель процесса переноса адекватны изучаемой задаче. Показано, что неустойчивость носит абсолютный характер. На нижнем фронте концентрационного импульса развивается неустойчивость Релея-Тейлора. При чем время развития всегда меньше времени прохождения импульса через область. Исследовано влияние параметров задачи на характерное время возникновения неустойчивости. Проанализированы способы увеличения этого времени.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (номер проекта 20-11-20125).

ЛИТЕРАТУРА

1. Колчанов Н. В., Колчанова Е. А. *Исследование перераспределения примеси NaCl в потоке воды сквозь пористую среду в вертикальной круглой трубе* Пермские гидродинамические научные чтения: сборник статей по материалам VIII Всероссийской конференции. 2022. С. 239–242.
2. Selim H. M. *Prediction of contaminant retention and transport in soils using kinetic multireaction models* EHP 1989. Т. 83. С. 69–75.

О ВЫРАЖЕНИИ СКАЛЯРНОЙ КРИВИЗНЫ ЧЕРЕЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ И О СВЯЗЯХ МЕЖДУ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

А. Г. Меграбов^{1,2}, Е. А. Левина²

¹Институт вычислительной математики и математической геофизики СО
РАН, Новосибирск

²Новосибирский государственный технический университет

1. В [1] изучена группа Ли G_{10} преобразований пространства $(x, y, z, t, u^1 = u, u^2 = n^2)$. Она является группой эквивалентности уравнения эйконала $|\text{grad } u|^2 = n^2(z, y, z)$, где u — поле времен, n — показатель преломления. Одним из ее дифференциальных инвариантов (ДИ) является скалярная кривизна $R = 2\{\Delta \ln n^2 + |\text{grad } \ln n^2|^2/4\}/n^2$ риманова пространства с метрикой $dl^2 = n^2(dx^2 + dy^2 + dz^2)$. В [1] получено выражение R через другие ДИ методом подбора. В докладе найдено, что эту формулу можно получить как следствие дифференциального тождества $\mathbf{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{S}(\boldsymbol{\tau})$, справедливого для любого векторного поля $\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\boldsymbol{\tau} \in C^1(D)$ с модулем $|\mathbf{v}| \neq 0$ в D и направлением $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ [3, п. 5.1.2], в случае $\mathbf{v} = \text{grad } u$. Здесь и ниже $\mathbf{T}(\mathbf{v}) = \text{grad } \ln |\mathbf{v}| + \{\text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{v} - \mathbf{v} \text{ div } \mathbf{v}\}/|\mathbf{v}|^2$, $\mathbf{S}(\boldsymbol{\tau}) = \text{rot } \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \text{ div } \boldsymbol{\tau}$, D — некоторая область в E^3 .

2. Пусть $\boldsymbol{\tau}(x, y, z)$ — поле единичных векторов в D , удовлетворяющее некоторым общим условиям [3, § 9.1], $\{L_{\boldsymbol{\tau}}\}$ — семейство его векторных линий $L_{\boldsymbol{\tau}}$, $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta})$, k и \varkappa — базис Френе, кривизна и кручение кривых $L_{\boldsymbol{\tau}}$. Получены новые формулы, связывающие характеристики векторных полей, известные в геометрии векторного поля и векторном анализе [2], — поле $\mathbf{S}(\boldsymbol{\tau}) = \text{rot } \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \text{ div } \boldsymbol{\tau}$ (присоединенных векторов к полю $\boldsymbol{\tau}$), поле \mathbf{P} вектора кривизны поля $\boldsymbol{\tau}$, величину неголономности $\rho = (\boldsymbol{\tau} \cdot \text{rot } \boldsymbol{\tau})$ поля $\boldsymbol{\tau}$ и лапласиан $\Delta \boldsymbol{\tau}$. В [3] получено представление вида $\mathbf{P} = \text{rot } \mathbf{R}^*$, где $\mathbf{R}^* = \varkappa \boldsymbol{\tau} + k \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta} \text{ div } \boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu} \text{ div } \boldsymbol{\beta}$. Основная формула имеет вид: $\text{rot } \mathbf{S}(\boldsymbol{\tau}) = \text{grad } \rho + \{2\mathbf{P} - \Delta \boldsymbol{\tau}\} \times \boldsymbol{\tau}$, откуда следует новая формула для \mathbf{P} . Из них найдены новые дифференциальные законы сохранения для уравнения эйконала (здесь $\boldsymbol{\tau} = \text{grad } u/n$, $\rho = 0$), гидродинамических уравнений Эйлера ($\boldsymbol{\tau} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$, \mathbf{v} — скорость) и др.

ЛИТЕРАТУРА

1. Megrabov A. G. On differential invariants of an equivalence group and their geometric meaning. IOP Conf. Series. Journal of Physics: Conference series. 1666.
2. Аминов Ю. А. Геометрия векторного поля. М.: Наука, 1990.
3. Меграбов А. Г. Дифференциальные инварианты группы эквивалентности и их приложения. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2022.

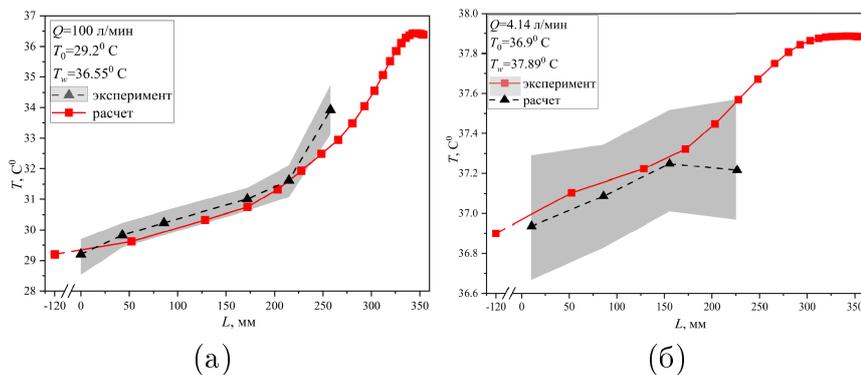
МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛООБМЕНА И ВЛАГООБМЕНА В БРОНХИАЛЬНОМ ДЕРЕВЕ ЧЕЛОВЕКА

А. Е. Медведев, П. С. Голышева

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск

Разработана математическая модель тепломассопереноса в легких человека. Проведены трехмерные расчеты распределения тепла и влажности вдыхаемого воздуха в бронхиальном дереве. Моделирование проводилось на основе разработанной ранее авторами аналитической модели легких человека по численной методике поэтапного расчета [1]. Сравнение с экспериментальными данными по теплообмену в легких показало, что модель достаточно хорошо описывает изменение температуры воздуха по длине бронхиальной ветки. Рассмотрен процесс дыхания разогретой гелий-кислородной смесью. Эта смесь используется для лечения больных с бронхиальной астмой и COVID-19. Показано, что понижение температуры разогретой гелий-кислородной смеси в легких человека происходит быстрее, чем для разогретого воздуха. Полученные результаты показали, что термический эффект наблюдается не во всем бронхиальном дереве человека, а только в верхних отделах бронхов.

На рис. 1 приведены результаты сравнения экспериментальных данных (рис. 1 (а) – [2] и рис. 1 (б) – [3]) по измерению температуры вдыхаемого воздуха в легких человека. Здесь представлены средние по сечению бронха значения температуры воздуха в зависимости от длины бронхиального пути (серым цветом показаны границы погрешности измерений). Видно, что указанная методика позволяет достаточно хорошо описывать теплообмен в легких человека.



ЛИТЕРАТУРА

1. Медведев А. Е., Фомин В. М., Гафурова П. С. *Трехмерная модель бронхиального дерева человека – моделирование течения воздуха в норме и при патологии*. ПМТФ. 2020. Т. 61, № 1. С. 3–16.
2. McFadden E. R., Pichurko B. M. *Thermal mapping of the airways in humans*. Journal of Applied Physiology. 1985. V. 58, N. 2. P. 564–570.
3. Ryan S. N., Rankin N., Meyer E., et al. *Energy balance in the intubated human airway is an indicator of optimal gas conditioning*. Critical Care Medicine. 2002, V. 30, P. 355–361.

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН В СЛУЧАЙНОМ ВОЛОКОННОМ ЛАЗЕРЕ

С. Б. Медведев¹, Б. В. Семисалов^{1,2,3}

¹Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий, Новосибирск

²Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

³Новосибирский государственный университет

В работе построена модель и проведён расчёт нелинейных волновых взаимодействий в случайных волоконных лазерах с учётом действия насыщающегося поглотителя [1, 2]. Из одномерного уравнения Гинзбурга–Ландау, к которому для учёта цикличности накачки и потерь энергии добавлены неинтегрируемые члены, получена система из двух кинетических уравнений для волновых корреляторов второго и четвёртого порядков – функций $n_k = n(k, t)$, $J_{k123} = J(k, k_1, k_2, k_3, t)$:

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} = 2g_k n_k + 2\text{Im} \int (\gamma + i\kappa) J_{k123} \delta(k + k_1 - k_2 - k_3) dk_1 dk_2 dk_3, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} J_{k123} = & i(\lambda_k^* + \lambda_1^* - \lambda_2 - \lambda_3) J_{k123} + 2i\gamma [n_k n_2 n_3 + n_1 n_2 n_3 - n_k n_1 n_2 - n_k n_1 n_3] + \\ & + 2\kappa [n_k n_2 n_3 + n_1 n_2 n_3 + n_k n_1 n_2 + n_k n_1 n_3] + 8\kappa J_{k123} \int n_4 dk_4. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь t – время, k, k_1, k_2, k_3 – волновые числа, $n_j = n(k_j, t)$, $j = \overline{1, 4}$, $\lambda_k = \omega_k + ig_k(E)$, ω_k – частота волны, $g_k = g_k(E)$ описывает накачку и потери энергии $E = E(t)$, γ – параметр нелинейности Керра, κ – параметр модуляции волн [2], δ – дельта-функция Дирака, $\omega = \omega_k = \beta k^2$, $\beta > 0$, $E(t) = \int_0^\infty n(\omega, t) d\omega$, где $n(\omega, t) = n(\sqrt{\omega/\beta}, t)$.

Отметим, что при выводе (1), (2) стандартное для теории волновой турбулентности предположение о слабой нелинейности (см. [3], § 6.3) не использовано.

Для системы (1), (2) поставлена задача Коши с начальными данными в виде суммы солитона и шума и разработан алгоритм её численного решения. Для аппроксимации интегралов использованы идеи из [4], а для итераций по времени создан новый алгоритм, основанный на полиномиальных и дробно-рациональных барицентрических интерполяциях зависимостей неизвестных функций от времени. В докладе представлены результаты моделирования нелинейного уширения спектра исходного солитона под циклическим действием накачки и потерь энергии излучения в лазере.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00287, <https://rscf.ru/project/22-11-00287/>

ЛИТЕРАТУРА

1. Churkin D. V. et. al. *Wave kinetics of random fibre lasers*. Nat. Commun. 2015. Vol. 6. Art. №6214.
2. Shtyrina O. V. et al. *Theoretical analysis of solutions of cubic-quintic Ginzburg–Landau equation with gain saturation*. Opt. express. 2019. Vol. 27, № 5. Art. №347286.
3. Nazarenko. S. *Wave Turbulence*. Heidelberg, Germany: Springer, 2012.

4. Semisalov B.V. et. al. *Numerical analysis of a self-similar turbulent flow in Bose-Einstein condensates*. CNSNS. 2021. Vol. 102. Art. №105903.

ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ ДВУМЕРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ В ЛАГРАНЖЕВЫХ КООРДИНАТАХ

С. В. Мелешко, Е. И. Капцов

Suranaree University of Technology, Nakhon Ratchasima, Thailand

Рассмотрены симметрии, законы сохранения и групповые расслоения двумерных стационарных уравнений газовой динамики в массовых лагранжевых координатах. Стандартная система уравнений в лагранжевых координатах дополнена условиями (в эйлеровых координатах) независимости плотности, скорости и энтропии от времени. В результате групповой классификации уравнений выделяются два случая: изэнтропический и неизэнтропический. Классификация показывает, что допустимые алгебры Ли для стационарного случая отличаются от алгебр Ли, полученных в [1] для нестационарных уравнений. Благодаря этому с помощью теоремы Нётер получаются новые законы сохранения, характерные для стационарных уравнений.

В докладе также рассматриваются групповые расслоения уравнений газовой динамики относительно перемаркировки образующих X_{ψ_0} и оператора, который соответствует комбинации преобразования перемаркировки и равномерного растяжения в плоскости $x-y$. Полученные расслоения обобщают и дополняют ранее известные результаты для двумерных уравнений мелкой воды в лагранжевых координатах [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 23-11-00027).

ЛИТЕРАТУРА

1. E. I. Kaptsov and S. V. Meleshko. Conservation laws of the two-dimensional gas dynamics equations. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 112:126–132, 2019.
2. V. A. Dorodnitsyn, E. I. Kaptsov, and S.V. Meleshko. Lie group symmetry analysis and invariant difference schemes of the two-dimensional shallow water equations in Lagrangian coordinates. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 119:107119, 2023.

ЗАВИСИМОСТЬ ФОРМЫ ФРОНТОВ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ В МЕТОДЕ ГНК ОТ ИНТЕНСИВНОСТИ ТЕПЛОВОЙ ГРАВИТАЦИОННО-КАПИЛЛЯРНОЙ КОНВЕКЦИИ

А. В. Михайлов, В. С. Бердников, В. А. Гришков, С. А. Кислицын

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

Экспериментально и численно исследованы процессы кристаллизации гептадекана и воды методом горизонтальной направленной кристаллизации [1]. При охлаждении вертикальной стенки прямоугольной полости ниже температуры кристаллизации изучена эволюция пространственных форм течения и их влияние на формы фронтов кристаллизации (ФК), в зависимости от значений перепадов температуры между вертикальными стенками полости и высот слоев жидкостей. Исследования проведены в режимах термогравитационной конвекции при всех жестких границах и в режимах тепловой гравитационно-капиллярной конвекции в слоях со свободной верхней границей. В экспериментах пространственные формы течения и формы ФК снималась цифровой видеокамерой. Компьютерная обработка видеопленок позволила построить профили вертикальной и горизонтальной компонент скорости в различных сечениях по высоте и по длине слоя жидкости. Численные расчеты выполнены с использованием метода конечных элементов [2]. Решались нестационарные уравнения термогравитационной конвекции для жидкости и уравнение теплопроводности для кристаллов в двумерной сопряженной постановке в терминах температура, функция тока и вихрь скорости. Использовались треугольные сетки, адаптирующиеся под изменяющееся положение ФК. Сетка сгущается ко всем границам, включая границу раздела кристалла и жидкости. Учитывалась теплота кристаллизации и инверсная зависимость плотности воды от температуры. В режимах с охлаждением вертикальной стенки ниже температуры кристаллизации воды инверсная зависимость плотности воды от температуры существенно влияет на пространственную форму течения. В зависимости от отношения объемной доли жидкости с температурой ниже температуры точки инверсии к объему жидкости с температурой выше температуры этой точки, структура течения образована конвективными ячейками, в которых происходит локальное всплытие более холодной или более нагретой жидкости соответственно. Это существенно влияет на локальный теплообмен и на формы ФК. Актуальность работы определяется, в частности, тем, что инверсной зависимостью плотности от температуры обладает расплав кадмий-ртуть-теллур [3], кристаллы которого широко применяются в оптической технике, работающей в ИК-диапазоне.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдасаров Х. С., Горяинов Л. А. *Тепло- и массоперенос при выращивании монокристаллов направленной кристаллизацией*. М.: Физматлит, 2007.
2. Соловейчик Ю. Г., Рояк М. Э., Персова М. Г. *Метод конечных элементов для решения скалярных и векторных задач*. Новосибирск.: НГТУ, 2007.
3. V. M. Glazov, L. M. Pavlova. *Liquation phenomena in CMT melts and structural features in cadmium and mercury tellurides in a liquid phase*. J. Cr. Growth. 1998. T. 184. С. 1253–1261.

СТРАТИФИЦИРОВАННЫЕ ТЕЧЕНИЯ В ГЛУБОКОВОДНЫХ КАНАЛАХ ЦЕНТРАЛЬНОЙ АТЛАНТИКИ

Е. Г. Морозов¹, Н. И. Макаренко², Д. И. Фрей¹, О. А. Зуев¹

¹Институт океанологии им. П. П. Ширшова РАН, Москва

²Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Объектом исследований в данной работе являются течения глубинных вод антарктического происхождения, играющие важную роль в общей океанической циркуляции. Абиссальная антарктической донная вода (ААДВ) представляет собой наиболее холодную тяжелую воду, заполняющую котловины в значительной части Атлантического океана. Каналы и понижения в подводных хребтах, разделяющих отдельные котловины, играют ключевую роль в распространении этих вод на север. В центральной Атлантике наиболее сильный поток донной воды на глубине порядка 4000 м наблюдается в разломе Вима в южной части Северо-Атлантического хребта [1, 2, 3]. Длина указанного разлома составляет около 700 км, а поток донной воды в нем сопоставим с расходом воды в реке Амазонка. В ходе недавних экспедиций, проведенных на научно-исследовательских судах ИО РАН, исследованы структура и гидрофизические свойства придонных стратифицированных потоков в активной зоне течения в окрестности главной седловины, где разлом Вима имеет двухканальное русло. В обоих каналах обнаружены признаки расщепления нисходящего сдвигового течения на струи, которое указывает на существование глубоководных водопадов в потоках над склоном. Непосредственно перед седловиной имеет место блокировка нижнего придонного слоя с образованием в нем протяженной рециркуляционной зоны. Профили скорости и термохалинной стратификации, полученные в результате измерений в продольных и поперечных разрезах каналов, дают представление об эволюции параметров течения при его взаимодействии с топографией дна.

Работа выполнена при поддержке РНФ (грант 21-77-20004 — глубоководное зондирование и обработка данных, грант 21-71-20039 — анализ структуры и свойств течений).

ЛИТЕРАТУРА

1. Морозов Е. Г., Тараканов Р. Ю., Демидова Т. А., Макаренко Н. И. *Потоки донной воды в разломах Северо-Атлантического хребта*. Доклады РАН. 2017. Т. 474, № 4. С. 490–494.
2. Morozov E. G., Tarakanov R. Yu., Demidova T. A., Frey D. I., Makarenko N. I. *Bottom water flows in the tropical fractures of the Northern Mid-Atlantic Ridge*. Journal of Oceanography. 2018. V. 74, № 2. P. 147–167.
3. Morozov E. G., Frey D. I., Zuev O. A., Makarenko N. I., Seliverstova A. M., Mekhova O. S., Krechik V. A. *Antarctic bottom water in the Vema fracture zone*. Journal of Geophysical Research: Oceans. 2023. V. 128, e2023JC019967.

КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ АСИМПТОТИКИ НА СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

В. Е. Назайкинский

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва

Изучается вопрос о квазиклассических асимптотиках для (псевдо)дифференциальных уравнений с особенностями на стратифицированном многообразии специального вида — пространстве орбит X гладкого действия компактной группы Ли G на гладком многообразии M . Рассматриваемые операторы получаются как ограничение G -инвариантных операторов с гладкими коэффициентами на M на подпространство G -инвариантных функций, естественно отождествляемых с функциями на X (см., например, [1]), и имеют особенности на слоях положительной коразмерности. Асимптотики связаны с лагранжевыми многообразиями в фазовом пространстве, определяемом симплектической редукцией Марсдена–Вайнштейна [2] кокасательного расслоения T^*M под действием группы G ; быстроосциллирующие интегралы, определяющие канонический оператор Маслова на таких многообразиях, содержат экспоненты, а также специальные функции, связанные с представлениями группы G . Для простейшего стратифицированного многообразия — многообразия с краем, полученного как пространство орбит полусвободного действия группы S^1 на замкнутом многообразии — соответствующая конструкция квазиклассических асимптотик была реализована в [3, 4], причем в этом случае в класс рассматриваемых уравнений на многообразиях с краем входят линеаризованные уравнения мелкой воды в водоеме с пологим берегом. Другой пример включает т.н. спинорную регуляризацию для атома водорода в однородном магнитном поле [5, 6]. В докладе рассматривается общий случай.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 21-51-12006).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ольшанецкий М. А., Переломов А. М. *Квантовые системы, связанные с системами корней, и радиальные части операторов Лапласа*. Функциональный анализ и его приложения. 1978. Т. 12. № 2. С. 57–65.
2. Marsden J., Weinstein A. *Reduction of symplectic manifolds with symmetry*. Rep. Math. Phys. 1974. V. 5. № 1. P. 121–130.
3. Доброхотов С. Ю., Назайкинский В. Е., *Униформизация уравнений с граничным вырождением бесселева типа и квазиклассические асимптотики*. Матем. заметки. 2020. Т. 107. № 5. С. 780–786.
4. Аникин А. Ю., Доброхотов С. Ю., Назайкинский В. Е., Толченников А. А. *Униформизация и квазиклассические асимптотики для класса уравнений, вырождающихся на крае многообразия*. ПМА. 2023. Т. 122. С. 5–24.
5. Степановский Ю. П. *Атом водорода во внешнем поле как ангармонический осциллятор*. Укр. физ. журнал. 1987. Т. 32. № 9. С. 1316–1321.
6. Карасев М. В., Новикова Е. М. *Представление точных и квазиклассических собственных функций через когерентные состояния. Атом водорода в магнитном поле*. 1996. Т. 108. № 3. С. 339–387.

КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ В СКВАЖИНЕ С УЧЕТОМ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В ПРИЗАБОЙНОЙ ЗОНЕ

Д. А. Насырова

Институт механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Рассмотрены собственные колебания столба жидкости в вертикальной нефтяной скважине, возникающие при резком закрытии или открытии насосов скважины (гидроударе). Период колебаний, интенсивность затухания колебаний определяются протяженностью столба жидкости, ее реологическими свойствами, а также коллекторскими характеристиками призабойной зоны пласта (в частности, коэффициентами проницаемости, качеством перфорации скважины и свойствами образованных трещин ГРП). На основе математической модели, описывающей движение столба жидкости в скважине, когда ее верхний конец открыт или закрыт, и фильтрацию в призабойной зоне, подверженной ГРП, получены решения задачи о собственных затухающих колебаниях столба жидкости в скважине. Изучены зависимости частоты и коэффициента затухания колебаний давления на различных участках скважины от значений проницаемости пласта, параметров ГРП. Показано, что акустическая диагностика, основанная на анализе собственных колебаний в скважине может служить действенным инструментом для диагностики призабойной зоны скважины.

Также нами были рассмотрены собственные колебания столба жидкости в обсаженной горизонтальной скважине длиной l сообщающейся с пластом посредством N радиальных трещин ГРП, расположенных равномерно вдоль скважины, возникающие при резком закрытии или открытии насосов скважины (гидроударе). Получено трансцендентное уравнение для комплексной частоты собственных колебаний столба жидкости в скважине. На основе этого уравнения определены частотные характеристики (частота колебаний, коэффициент затухания, амплитуда колебаний), описывающие собственные колебания жидкости в горизонтальной скважине с системой трещин, перпендикулярных стволу скважины. Проведенный численный анализ частотных характеристик колебаний показывает влияние изменения ширины трещины, количества трещин и проницаемости пласта на собственные частоты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шагапов В. Ш., Башмаков Р. А., Хакимова З. Р., Насырова Д. А. *Колебания жидкости в открытой скважине и сообщающейся с пластом, подверженной ГРП* Вестник Башкирского университета. 2022. Т. 27. № 4. С. 872–880.
2. Шагапов В. Ш., Башмаков Р. А., Насырова Д. А. *Собственные колебания жидкости в скважине, сообщающейся с пластом, при наличии трещины ГРП* ПММ. 2022. Т. 86. № 1. С. 88–104.

ВТОРИЧНЫЕ ТЕЧЕНИЯ, ГЕНЕРИРУЕМЫЕ ТУРБУЛЕНТНОСТЬЮ**Н. В. Никитин***НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва*

В работе сформулирован механизм, позволяющий объяснять, а в ряде случаев и предсказывать форму вторичных течений Прандтля второго рода, возникающих в турбулентных течениях в прямых трубах некруглого сечения с гладкими стенками [1, 2, 3]. Вторичные течения согласованы с распределением среднего давления по периметру поперечного сечения. На участке границы между соседними точками локального максимума и минимума давления частицы жидкости должны двигаться вдоль границы по направлению от большего давления к меньшему, поскольку напряжения Рейнольдса на твёрдой стенке отсутствуют, и сила давления может быть уравновешена только силой вязкого трения, действующей навстречу движению. В ряде случаев, расположение локальных экстремумов давления по периметру сечения трубы может быть установлено на основе анализа кривизны границы. Пульсационное движение по искривлённой траектории вдоль границы вызывает изменение давления на стенке тем большее, чем больше кривизна границы. На вогнутых участках границы возникает повышение давления, а на выпуклых, наоборот, возникает разряжение. Действенность предложенного принципа продемонстрирована на ряде известных из литературы примерах: течения в трубе квадратного сечения, в трубе эллиптического сечения, в трубах с сечением в виде кругового сектора с углами при вершине большими и меньшими 180 градусов, в прямоугольных трубах с закруглёнными углами, в эксцентрической кольцевой трубе. В большинстве случаев примерную картину вторичных течений удаётся предсказать априори, пользуясь лишь соображениями симметрии и анализом кривизны границы поперечного сечения.

Условия сформулированного механизма нарушаются вблизи свободных границ, где кроме градиента давления на частицы жидкости действуют также касательные напряжения и результат их конкуренции заранее неизвестен. В работе приводятся результаты прямого численного моделирования турбулентных течений в прямоугольных каналах, содержащих свободные границы, демонстрирующие и объясняющие особенности вторичных течений в этих случаях.

Результаты данной работы дают рациональную основу для понимания причин формирования и предсказания формы вторичных течений Прандтля второго рода, возникающих в прямых трубах некруглого сечения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 20-19-00404).

ЛИТЕРАТУРА

1. Nikitin N. *Turbulent secondary flows in channels with no-slip and shear-free boundaries*. JFM. 2021. V. 917. A24.
2. Никитин Н. В., Попеленская Н. В., Stroh A. *Вторичные течения Прандтля 2-го рода. Проблемы описания, предсказания, моделирования*. Изв. РАН, МЖГ. 2021. №4. С. 1–27.
3. Nikitin N., Krasnopolsky B. *Turbulent flows along a streamwise external corner*. JFM. 2022. V. 940. A16.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОЧНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СТЕКЛА ПРИ ВДАВЛИВАНИИ СТАЛЬНЫХ ШАРОВ

А. Н. Новоселов, М. А. Леган

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Представлены результаты экспериментов по вдавливанию стальных шаров различного диаметра в стеклянные образцы в форме прямоугольного параллелепипеда. Экспериментально определялись предельная нагрузка при образовании кольцеобразной трещины в окрестности области контакта и радиус этой трещины. Контактные напряжения вычислялись по решению Губера задачи Герца о вдавливании шара в упругое полупространство. Показана возможность определения предельного растягивающего напряжения и критического коэффициента интенсивности напряжений стекла путём моделирования образования кольцеобразной трещины в окрестности области контакта с помощью критерия средних напряжений.

Согласно решению задачи Герца о вдавливании шара в упругое полупространство максимальное растягивающее напряжение достигается на поверхности полупространства на границе круговой области контакта. Следовательно, в соответствии с локальным критерием максимальных напряжений разрушение должно начинаться на границе области контакта. Однако в ряде работ экспериментально установлено, что при вдавливании шаров в стеклянные образцы радиус возникающей на поверхности образцов кольцеобразной трещины больше радиуса области контакта. Поэтому моделировать хрупкое разрушение в окрестности области контакта нужно с помощью нелокальных критериев разрушения, учитывающих неоднородность поля контактных напряжений.

Нелокальные критерии разрушения содержат как минимум две характеристики материала, например, предел прочности при однородном одноосном растяжении и критический коэффициент интенсивности напряжений. С другой стороны, при вдавливании шара в стеклянный образец можно получить две экспериментальные величины – предельную нагрузку при образовании кольцеобразной трещины в окрестности области контакта и радиус этой трещины. Следовательно, имея две экспериментальные величины, можно путём моделирования образования кольцеобразной трещины с помощью нелокального критерия разрушения найти две характеристики материала, входящие в этот критерий.

Радиус кольцеобразных трещин определялся с помощью измерительного микроскопа. Радиус области контакта вычислялся по теории Герца. Проведенные измерения и вычисления показали, что радиус трещины практически всегда больше радиуса области контакта. В среднем по 40 экспериментам радиус кольцеобразной трещины оказался больше радиуса области контакта на 37 %.

Исследование показало, что, зная усилие образования кольцеобразной трещины при вдавливании шара в хрупкий прозрачный материал, а также радиус этой трещины, можно получить оценки предельного растягивающего напряжения и критического коэффициента интенсивности напряжений материала путём моделирования образования кольцеобразной трещины с помощью критерия средних напряжений. Сравнение полученных оценок прочностных характеристик стекла со значениями, определенными при изгибе стеклянных балок, подтвердило наличие масштабного эффекта при разрушении стеклянных образцов.

ВЛИЯНИЕ ПЛОТНОСТНОЙ СТАТИФИКАЦИИ НА ИНТЕНСИВНЫЕ ВНУТРЕННИЕ ВОЛНОВЫЕ БОРЫ

В. В. Новотрясов

Тихоокеанский океанологический институт им. В. И. Ильичева, ДВО РАН, Владивосток

Интенсивные внутренние волновые боры - новое нелинейное явление прибрежной зоны океанов. Его динамика исследуется в рамках различных приближений и в том числе с использованием расширенного за счёт кубической нелинейности уравнения Кортевега – де Вриза (РКдВ) [1, 2].

Как известно, знак коэффициента квадратичной нелинейности уравнения РКдВ не влияет на нелинейную динамику бора. В тоже время знак коэффициента кубической нелинейности является принципиальным для его динамики. По определению коэффициенты квадратичной и кубической нелинейности определяются фоновой стратификации прибрежной зоны. В работе с использованием трёх-параметрической зависимости частоты плавучести, параметра характеризующего фоновую стратификацию, исследовано влияние максимума частоты плавучести, глубины залегания пикноклина и его ширина на квадратичную и кубическую нелинейности прибрежной зоны. Таким образом изучено влияние стратификации на динамику волновых боров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпидевский В. Ю., Новотрясов В. В. и др. *Внутренний волновой бор в прибрежной зоне моря*. ПМТФ. 2017. Т. 58. № 5. С. 60–71.
2. Новотрясов В. В., Пермяков М. С. *Экспериментально-теоретическое определение предельной амплитуды и минимальной длительности уединённых волн в слабо диспергирующем мелком море*. ПМТФ. 2019. Т. 60. № 3. С. 67–72.

МОДЕЛИРОВАНИЕ МГД-ТЕЧЕНИЙ С ДИСПЕРСНОЙ ПРИМЕСЬЮ

Р. С. Окадьев^{1,2}, И. В. Колесниченко¹

¹*Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь*

²*Пермский государственный национальный исследовательский университет*

Большинство жидких металлов, используемых в промышленности, являются многофазными средами и содержат примеси, которые имеют электрическую проводимость, отличную от проводимости металла. Некоторые примеси (например оксиды) являются плохо проводящими. В процессах, связанных с кристаллизацией возможно появление кристаллических частиц в объеме жидкого металла. В таком случае проводимость примеси будет выше, чем проводимость основной фазы. Технологически важными являются задачи управления распределением примеси в жидких металлах (процессы сепарации и перемешивания). При разработке соответствующих устройств активно используется математическое моделирование.

Можно выделить три принципиально разных подхода к описанию многофазных МГД-течений. Наиболее простым из них представляется модификация уравнения

Навье-Стокса с учетом эффективных параметров среды (плотности, вязкости, электропроводности), которые полагаются зависящими от пространственного распределения объемной доли дисперсной фазы [1]. Более физически обоснованным является лагранжев подход, в рамках которого для каждой частицы примеси решается индивидуальное уравнение движения. Тем не менее, такой подход оказывается слабо применим в задачах, в которых необходимо знать именно распределение примеси. В таком случае компромиссом между вычислительной сложностью и физической обоснованностью модели оказывается построение моделей в рамках многоскоростных континуумов [2]. Основной сложностью во всех моделях является определение электромагнитной силы, действующей на дисперсную фазу.

В работе представлены примеры моделирования МГД-течений в рамках трех описанных подходов. Обсуждаются вопросы применимости, достоинства и недостатков моделей.

Исследование выполняется за счет гранта Российского научного фонда и Пермского края № 22-19-20106, <https://rscf.ru/project/22-19-20106/>.

ЛИТЕРАТУРА

1. Окатьев Р. С., Фрик П. Г., Колесниченко И. В. *Течение Гартмана в слое жидкости с пространственно неоднородными свойствами*. Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, Механика, Физика». 2023. Т. 15. № 3. С. 34–42.
2. Нигматулин Р. И. *Динамика многофазных сред*. М.: Наука, 1987.

«БЕЗМАШИННОЕ» ЭНЕРГОРАЗДЕЛЕНИЕ В ГАЗОВЫХ И ГАЗОКАПЕЛЬНЫХ ПОТОКАХ

А. Н. Осипцов

Институт механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва

Безмашинным энергоразделением (БЭ) газового потока называется такая организация течения, при которой однородный поток преобразуется в два потока с существенно различающимися температурами торможения без совершения работы или подвода тепла из внешних источников. Наиболее известным способом БЭ является использование вихревых трубок Ранка—Хилша, которые могут обеспечить разность температур торможения выходящих потоков до сотни градусов, однако имеют недостаток, связанный с высокими потерями полного давления. Одной из альтернатив является схема БЭ, предложенная в [1]. В этой схеме часть газа, втекающего в энергоразделяющее устройство, проходит через сопло Лавала и разгоняется до сверхзвуковой скорости. Далее, до- и сверхзвуковой потоки газа, имеющие одинаковые исходные параметры торможения, движутся в канале, будучи разделенными теплопроводной перегородкой. Вследствие теплообмена между до- и сверхзвуковым потоками осредненные температуры торможения на выходе из устройства в этих потоках могут заметно различаться. Данная схема обеспечивает малые потери полного давления, но требует дальнейшей модификации для повышения ее эффективности.

В докладе обсуждаются общие физические механизмы безмашинного энергоразделения, обусловленные влиянием диссипативных и нестационарных процессов в потоке газа, а также возможные способы повышения эффективности энергоразделения по схеме Леонтьева при добавлении в сверхзвуковую часть потока малой концентрации жидких капель, как с учетом, так и без учета их испарения.

В первой части доклада на основании параметрических численных расчетов показано, что схема Леонтьева оказывается достаточно эффективной для газов с низкими числами Прандтля (Ar, Xe). Далее рассматривается ряд течений, в которых в пограничный слой сверхзвукового потока добавляются мелкодисперсные испаряющиеся жидкие капли, оседающие на разделяющую перегородку. В том числе рассмотрены схемы течения с организацией слабых косых скачков уплотнения в газодисперсном потоке, усиливающих эффект осаждения капель на разделяющую перегородку. На основании параметрических расчетов показано, что добавление даже малой концентрации жидких капель может резко увеличить эффективность схемы энергоразделения по схеме Леонтьева [2, 3].

Вторая часть доклада посвящена анализу роли нестационарности потока на процесс БЭ. На примере численного решения задачи поперечного обтекания круглого цилиндра сжимаемым вязким газом в режиме периодического схода вихрей в ближний след дано объяснение парадоксального эффекта Эккерта–Вайса (снижения равновесной температуры поверхности адиабатического цилиндра вблизи задней критической точки до температур ниже статической температуры набегающего потока) [4]. Проведен детальный анализ роли различных диссипативных механизмов и нестационарности течения на распределение осредненной по времени температуры торможения газа в ближнем следе [5]. Сформулированы некоторые идеи о возможности управления процессом энергоразделения в нестационарных газовых потоках.

ЛИТЕРАТУРА

1. Леонтьев А. И. *Газодинамический метод энергоразделения газовых потоков*. Теплофизика высоких температур. 1997. Т. 35 №. 1 С. 157–159.
2. Азанов Г. М., Осипцов А. Н. *Влияние мелких испаряющихся капель на температуру адиабатической стенки в сжимаемом двухфазном пограничном слое*. Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2016. № 4 С. 67–76.
3. Голубкина И. В., Осипцов А. Н. *Влияние примеси неиспаряющихся капель на структуру течения и температуру адиабатической стенки в сжимаемом двухфазном пограничном слое*. Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2019. № 3 С. 58–69.
4. Eckert E., Weise W. *Messungen der Temperaturverteilung auf der Oberflache schnell angestromter unbeheizter Korper*. Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens A, 1942. Т. 27 С. 246–254.
5. Aleksyuk A. I., Osiptsov A. N. *Direct numerical simulation of energy separation effect in the near wake behind a circular cylinder*. International Journal of Heat and Mass Transfer. 2018. Т. 119 P. 665–677.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ СТРУКТУРЫ ГЕТЕРОМОДУЛЬНЫХ КЕРАМИК НА ОСНОВЕ КАРБИДА ЦИРКОНИЯ НА ВЯЗКОСТЬ РАЗРУШЕНИЯ

А. А. Пажин, М. О. Еремин, Ю. А. Мировой, С. П. Буякова

Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск

Керамические материалы на основе оксидов, карбидов, боридов и нитридов некоторых металлов в настоящее время широко применяются в качестве огнеупорных материалов. Однако область применения керамики не ограничивается способностью выдерживать высокие температуры до 2500°C . Свойства керамики позволяют использовать ее в качестве защиты от износа, коррозии, ударных нагрузок и т.д. В то время как прочность керамики на сжатие сравнима или превышает прочность классических конструкционных материалов, вес керамики значительно ниже. В то же время существенным недостатком керамических материалов является их хрупкость, обусловленная типом химической связи.

В настоящее время разрабатываются различные методы повышения трещиностойкости различных керамических изделий. Наиболее распространенными методами являются введение упрочняющих частиц из различных материалов. В работе изучалось улучшение свойств гетеромодульной керамики на основе карбида бора при добавлении меди и марганца к порошкам карбида на стадии пиролиза. Отмечен немонотонный характер влияния объемной доли низко модульного материала на свойства всей композиции. Последнее позволяет сделать оптимальный выбор для обеспечения требуемых свойств. Как пример механизма упрочнения Кука-Гордона. Суть механизма заключается в создании композита, где основная фаза имеет высокие модули упругости, а вторая фаза, наоборот, имеет значительно более низкие модули упругости. Частицы с низким модулем упругости замедляют развитие трещин в материале, поглощают и рассеивают энергию упругих деформаций, возникающих при распространении трещин. Это приводит к повышению стойкости к тепловому удару и увеличению общей прочности материала по сравнению с материалом с равной пористостью без добавления частиц с низким модулем упругости.

Согласно обзору литературы, большинство рассмотренных исследований гетеромодульных керамических материалов основаны на лабораторных экспериментах. Количество исследований по численному моделированию значительно меньше. Использование современных численных методов позволяет описывать процессы деформации и разрушения материала с явным учетом микроструктуры. Это позволяет детально изучить механизмы разрушения и выявить влияние микроструктурных особенностей на физико-механические свойства, в частности, вязкость разрушения.

Новизна настоящего численного исследования обусловлена новым методом определения КИС, основанным на мезообъемном отклике. Мезообъем спроектирован с явным учетом микроструктуры, основанной на бинаризации СЭМ-моделей полированных поверхностей образцов.

Целью данной работы является численная оценка влияния содержания низко модульной фазы (углерода) на вязкость разрушения композитов ZrC-C. Проведено сравнение с экспериментальными данными. Рассмотрен механический отклик двумерных мезообъемов при одноосном сжатии.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИФПМ СО РАН, тема FWRW-2021-000

О СТРУКТУРЕ ФРОНТА УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ГЕТЕРОГЕННОЙ СМЕСИ ВЯЗКИХ ГАЗОВ

А. В. Панов¹, Н. А. Гуль²

¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

²Челябинский государственный университет

Рассматривается система уравнений

$$\begin{aligned}\partial_t \rho_1 + \partial_x(\rho_1 u_1) &= 0, \\ \partial_t(\rho_1 u_1) + \partial_x(\rho_1(u_1^2 + c_1^2) - \mu_1 \partial_x u_1) &= \tau^{-1} \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} (u_2 - u_1), \\ \partial_t \rho_2 + \partial_x(\rho_2 u_2) &= 0, \\ \partial_t(\rho_2 u_2) + \partial_x(\rho_2(u_2^2 + c_2^2) - \mu_2 \partial_x u_2) &= \tau^{-1} \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} (u_1 - u_2),\end{aligned}$$

описывающая динамику гетерогенной смеси изотермических вязких газов. Здесь $\rho_{1,2}$ — плотности, $u_{1,2}$ — скорости, а $\mu_{1,2}$ — вязкости первой и второй компоненты смеси. При записи системы учтено, что изотермические уравнения состояния газов имеют вид: $P_{1,2} = c_{1,2}^2 \rho_{1,2}$. Правая часть отвечает за силы трения между компонентами, а τ — характерное время взаимодействия фаз [1].

Для этой системы исследуются решения типа бегущей волны. В докладе будет рассказано о попытке обоснования разрывных решений, рассматриваемых в идеальной среде [1], как «пределов» непрерывных решений уравнений с вязкостью при стремлении последней к нулю [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 23-11-00142).

ЛИТЕРАТУРА

1. Буряков О. В., Куропатенко В. Ф. *Структура фронта ударной волны в гетерогенной смеси двух изотермических газов при наличии сил взаимодействия компонент*. ВАНТ. Сер. мет. и прогр. числ. реш. задач матфизики. 1985. № 3. С. 19–24.
2. Воронин С. М., Адарченко В. А. и др. *Структура фронта ударной волны в гетерогенной смеси двух изотермических газов с вязкостью*. Челяб. физ.-мат. журн. 2018. Т. 3, № 4. С. 461–475.

О КОРРЕКТНОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ОДНОЙ МОДЕЛИ ФИЛЬТРАЦИИ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ В ПОРОУПРУГОЙ СРЕДЕ

А. А. Папин, М. А. Токарева

Алтайский государственный университет, Барнаул

В работе рассматривается квазилинейная система составного типа, описывающая нестационарное неизотермическое движение несмешивающихся жидкостей в вязкоупругой среде. Уравнения модели в отсутствие фазовых переходов и с учетом зависимости параметров среды от пористости и температуры имеют вид [1] – [3]:

$$\frac{\partial(1-\phi)\rho_3}{\partial t} + \nabla \cdot ((1-\phi)\rho_3 \mathbf{v}_3) = 0, \quad \frac{\partial(\rho_i s_i \phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \phi s_i \mathbf{v}_i) = 0, \quad i = 1, 2,$$

$$s_i \phi (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_3) = -K_0(\phi) \frac{k_{0i}(s_i)}{\mu_i(\theta)} (\nabla p_i - \rho_i \mathbf{g}), \quad i = 1, 2,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_3 = -\phi(\alpha(\theta)p_e + \beta(\theta) \frac{dp_e}{dt}), \quad p_e = (1-\phi)(p_3 - p_f),$$

$$p_{tot} = \phi p_f + (1-\phi)p_3, \quad p_f = s_1 p_1 + s_2 p_2,$$

$$\nabla p_{tot} = \rho_{tot} \mathbf{g} + \nabla \cdot ((1-\phi)\eta(\theta) \left(\frac{\partial \mathbf{v}_3}{\partial \mathbf{x}} + \left(\frac{\partial \mathbf{v}_3}{\partial \mathbf{x}} \right)^* \right)), \quad \rho_{tot} = \phi(s_1 \rho_1 + s_2 \rho_2) + (1-\phi)\rho_3,$$

$$(\rho_1 c_1 s_1 \phi + \rho_2 c_2 s_2 \phi + \rho_3 c_3 (1-\phi)) \frac{\partial \theta}{\partial t} +$$

$$+(\rho_1 c_1 s_1 \phi \mathbf{v}_1 + \rho_2 c_2 s_2 \phi \mathbf{v}_2 + \rho_3 c_3 (1-\phi) \mathbf{v}_3) \nabla \theta = \nabla \cdot (\lambda_{tot}(\phi) \nabla \theta),$$

где ρ_i, \mathbf{v}_i - истинная плотность и скорость i -ой фазы (1,2 - жидкости, 3 - твердый вязкоупругий скелет), ϕ - пористость, θ - температура среды ($\theta_i = \theta$, $i=1,2,3$), $s_i, p_i, k_{0i}(s_i), \mu_i(\theta)$ - насыщенность, давление, проницаемость, динамическая вязкость жидкой фазы ($i = 1, 2$), \mathbf{g} - вектор ускорения силы тяжести, $\alpha(\theta), \beta(\theta)$ - заданные параметры среды, p_{tot} - общее давление, $p_e = p_{tot} - p_f$ - эффективное давление, ρ_{tot} - общая плотность, $\eta(\theta)$ - вязкость пористого скелета, $c_i = const > 0$ - теплоёмкость i -ой фазы; λ_{tot} - коэффициент теплопроводности среды в целом. Фазовые давления p_1 и p_2 различаются на величину капиллярного скачка: $p_2 - p_1 = p_c(s_1)$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-10045, <https://rscf.ru/project/23-71-10045/>

ЛИТЕРАТУРА

1. Athy L. F., *Density, porosity, and compaction of sedimentary rocks*. AAPG Bulletin. 1930. Vol. 14(1). P. 1–24.
2. Muskat M., *The flow of homogeneous fluids through porous media*. Ann Arbor. 1937.
3. Tokareva M. A., Papin A. A., *Mathematical model of fluids motion in poroelastic snow-ice cover*. Journal of siberian federal university. Mathematics and physics. 2021. Vol. 14, (1). P. 47-56.

О ПОСТРОЕНИИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДОЗВУКОВЫХ РЕАГИРУЮЩИХ ТЕЧЕНИЙ В ПРИСУТСТВИИ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Е. Е. Пескова, О. С. Язовцева, Е. Ю. Макарова, Н. А. Тиньгаева

*Национальный исследовательский Мордовский государственный университет,
Саранск*

Исследование воздействия лазерного излучения на многокомпонентные реагирующие смеси с целью получения водорода и этилена из природного газа проводится на лабораторном уровне в Институте катализа им. Г.К. Борескова [1, 2] и является нетривиальной задачей. Современное развитие математического аппарата, численных методов и компьютерной техники способствуют расширению знаний об указанных химических процессах. Многокомпонентные реагирующие течения в лабораторных реакторах с лазерным излучением имеют следующие особенности: они являются существенно дозвуковыми, характеризуются значительными локальными изменениями температуры за счет подвода лазерного излучения, эндотермическими химическими реакциями с изменением компонентного состава, которое, в свою очередь, запускает активные диффузионные и тепловые процессы. Указанные особенности существенно влияют на выбор и построение математических моделей и численных алгоритмов.

Ранее был построен вычислительный алгоритм для исследования дозвуковой динамики химически активной смеси с лазерным излучением на основе схемы расщепления по физическим процессам [3]. Математическая модель описана модифицированной системой уравнений Навье-Стокса в приближении малых чисел Маха [4], дополненной уравнением для интенсивности лазерного излучения. Однако, в этом алгоритме учет многокомпонентной диффузии, которая является функцией температуры и претерпевает значительные изменения за счет энергии, вводимой лазерным излучением, накладывает значительные ограничения на шаг интегрирования по времени всей системы. В настоящей работе предлагается использовать метод локальных итераций на основе упорядочивания корней полинома Чебышева [5] для расчета диффузионной составляющей модели. Ряд вычислительных экспериментов показал, что данный подход позволяет проводить расчеты с шагом по времени большим, чем для явного счета процессов диффузии, что значительно сокращает общее расчетное время практических задач. Расчеты на последовательности сгущающихся сеток показали сходимость построенного алгоритма. Получены картины распределения компонент смеси, температурного поля и интенсивности лазерного излучения по химическому реактору.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00202, <https://rscf.ru/project/23-21-00202/>.

ЛИТЕРАТУРА

1. Snytnikov V.I., Snytnikov V.N., Masyuk N.S., Markelova T.V. *The Absorption of CO₂ Laser Radiation by Ethylene in Mixtures with Methane* // Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 2020. V. 253. 107119: 1-6.
2. Снытников В.Н., Снытников Вл.Н., Масюк Н.С., Маркелова Т.В., Пармон В.Н. *Стенд лазерного катализа* // Приборы и техника эксперимента, 2021. № 3. С. 129-137.

3. Пескова Е.Е., Снытников В.Н., Жалнин Р.В. *Вычислительный алгоритм для изучения внутренних ламинарных потоков многокомпонентного газа с разномасштабными химическими процессами* // Компьютерные исследования и моделирование. 2023. Т. 15, №5. С. 1169-1187.
4. Борисов В.Е., Якуш С.Е. *Численное моделирование распространения метанового пламени в зазоре между параллельными пластинами* // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 4. 20 с. DOI: 10.20948/prepr-2019-4. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-4>.
5. Жуков В.Т., Феодоритова О.Б., Новикова Н.Д., Дубень А.П. *Явно-итерационная схема для интегрирования по времени системы уравнений Навье-Стокса* // Математическое моделирование. 2020. Т. 32, № 4. С. 57-74. DOI 10.20948/mm-2020-04-05.

АНАЛИЗ ЗАДАЧИ ЭМБОЛИЗАЦИИ АВМ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

И. А. Петренко¹, А. А. Черевко², Т. С. Шарифуллина²

¹Владимирский государственный университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых

²Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Совместное течение крови и эмболического агента внутри артериовенозной мальформации (далее – АВМ) в одномерном приближении моделируется на основе начально-краевой задачи для уравнения двухфазной фильтрации

$$\frac{\partial S(t, x)}{\partial t} + (q_b(\bar{S}(t)) + u(t)) \frac{\partial f(S(t, x))}{\partial x} = 0,$$

$$S(0, x) = 1, \quad f(S(t, 0)) = \frac{q_b(\bar{S}(t))}{q_b(\bar{S}(t)) + u(t)},$$

где $S(t, x)$ – концентрация крови в сечении АВМ, $\bar{S}(t)$ – средняя концентрация крови, $u(t)$ – расход эмболического агента на входе (управление), $q_b(\bar{S})$ – расход крови на входе (клинические данные), $f(S)$ – невыпуклая функция Баклея-Левретта. Данная начально-краевая задача решается в области: $t \in [0, T]$ – время; $x \in [0, L]$ – координата вдоль АВМ.

Задача оптимального управления заключается в минимизации функционала

$$\frac{1}{L} \int_0^L S(T, x) dx$$

при выполнении ограничений на управление $u(t)$

$$u(t) \geq 0, \quad q_b(\bar{S}(t)) + u(t) \leq \bar{Q}$$

а также фазовую переменную и входное давление

$$S(t, L) = 1, \quad p(t) \leq p_{max}$$

где \bar{Q} , p_{max} – постоянные ограничения на суммарный расход и входное давление.

Для этой задачи с помощью принципа максимума Понтрягина построено оптимальное управление

$$u^*(t) = -V\bar{S}'(t),$$

где V – объем АВМ, которое находится с помощью решения задачи Коши

$$q_b(\bar{S}(t)) - V\bar{S}'(t) = \bar{Q}, \quad \bar{S}(0) = 1.$$

Найденное оптимальное управление обеспечивает наименьшее достижимое значение целевого функционала (доля крови в объеме АВМ) в каждый момент времени. Таким образом, найденный режим эмболизации является точной нижней гранью всех допустимых режимов.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект No 22-11-00264).

ОБ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ ДОННЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

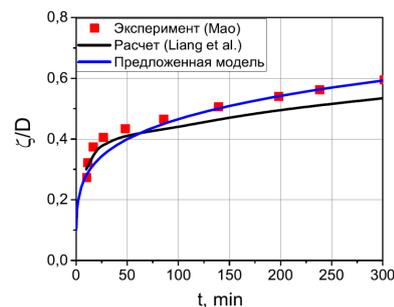
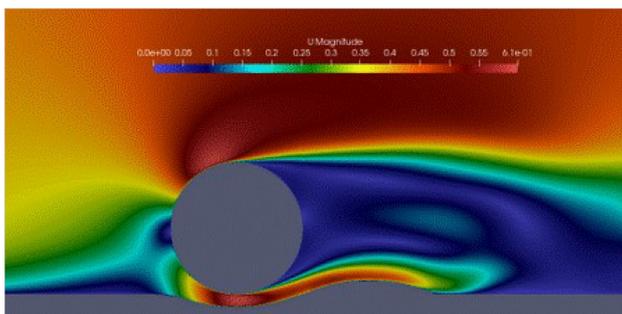
А. Г. Петров¹, И. И. Потапов², А. С. Епихин³

¹Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлунского РАН, Москва

²Хабаровский федеральный исследовательский центр ВЦ ДВО РАН, Хабаровск

³Институт системного программирования им. В. П. Иванникова РАН, Москва

На основе анализа экспериментальных [1] и численных [2] исследований деформирования донной поверхности при механическом воздействии на нее текущей жидкости сделан вывод об автомодельном характере эволюции донной поверхности. Донная волна имеет вид близкий к одному периоду синусоиды с изменяющейся во времени длиной волны и постоянной крутизной (отношение амплитуды к длине волны постоянно). Предложен метод построения автомодельной зависимости донной поверхности от времени и пространственной координаты в аналитическом виде. Для этого из серии автомодельных форм донной поверхности достаточно выделить четыре поверхности с заданными длинами волн. Для соответствующих четырех длин волн определяются средние значения напряжений и по ним вычисляются скорости изменения длин волн. Находится степенная аппроксимация зависимости от длины волны, ее скорость изменения и затем строится точное решение соответствующего дифференциального уравнения. Сравнение с экспериментальными данными и численными решениями показывает, что погрешность решения не превышает несколько процентов, а расчетное время сокращается в 25-30 раз.



На рисунке приведено сравнение эксперимента [1] и численного расчета [2] с найденной теоретической зависимостью от времени t амплитуды донной волны $\zeta/D = 0.17t^{0.22}$ под круглой трубой, обтекаемой жидкостью.

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-10091.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mao, Y. (1986). "The interaction between a pipeline and an erodible bed." Ser. Paper 39, Institute of Hydrodynamics and Hydraulic Engineering, Technical Univ. of Denmark, Lyngby, Denmark.
2. Liang, D.; Huang, J.; Zhang, J.; Shi, S.; Zhu, N.; Chen, J. Three-Dimensional Simulations of Scour around Pipelines of Finite Lengths. J. Mar. Sci. Eng. 2022, 10, 106. <https://doi.org/10.3390/jmse10010106>

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ РЕЛАКСИРУЮЩИХ ЖИДКОСТЕЙ

А. Г. Петрова

Алтайский государственный университет, Барнаул

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Рассматривается неньютоновская жидкость, обладающая свойствами релаксации и ретардации с уравнением состояния Олдройда в виде [1]:

$$\mathbf{S} + \lambda_1 \frac{D}{Dt} \mathbf{S} = 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{v}) + 2\mu\lambda_2 \frac{D}{Dt} \mathbf{D}(\mathbf{v}), \quad \mathbf{S}|_{t=t_0} = \mathbf{S}_0.$$

Здесь λ_1 - время релаксации напряжения при постоянной деформации; λ_2 - время ретардации, т.е. время релаксации деформации при постоянном напряжении; μ - вязкость; таким образом, произведение $\lambda_2\mu$ можно назвать релаксационной вязкостью; тензор \mathbf{D} - тензор скорости деформации; символ D/Dt - оператор дифференцирования по времени. Если $\lambda_1 = 0$, а D/Dt - инвариантная вращательная производная, то уравнение состояния будет моделировать жидкость 2-го порядка (Ривлин - Эриксен, [2]). Параметры λ_1 и $\lambda_2\mu$ считаются малыми. Управляющие уравнения для движения жидкости с рассматриваемым реологическим законом имеют вид

$$\rho(\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}) = -\nabla p + \operatorname{div} \mathbf{S}; \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Обсуждается постановка начально-краевых задач для этого уравнения. Исследуется поведение решения при стремлении малых параметров к нулю, наличие погранслоев и регулярность вырождения решений к решению соответствующих задач для вязкой несжимаемой жидкости. Показывается, что в случае $\lambda_1 = 0$ вырождение при $\lambda_2\mu$ стремящемся к нулю может быть регулярным, поскольку задача не требует дополнительных условий по сравнению с уравнениями Навье-Стокса. Между тем при малых отличных от нуля значениях λ_1 необходимо дополнительное начальное условие, что приводит к возникновению погранслоя. Предлагается асимптотический

подход к решению, предполагающий выделение пограничного слоя вблизи начального момента времени. Приводится пример аналитического решения, иллюстрирующий структуру решения с ненулевым временем релаксации и содержащий функцию погранслоя.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. G. Oldroyd *On the formulation of rheological equations of state*. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. 1950. V. 200, 1063, 523-541.
2. R. S. Rivlin, J. L. Ericksen *Stress-deformation relations for isotropic materials*. J. Rational Mech. Anal. 1955, 4, 323-425.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ТЕОРИИ ОПТИМИЗАЦИИ ФОРМЫ

П. И. Плотников

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Доклад посвящен применению теории геометрических потоков к задачам оптимизации формы. Рассматривается применение этой теории к обратной задаче об определении формы включения внутри материального объекта по данным дополнительных измерений на поверхности этого объекта. Обратная задача сводится к вариационной задаче для функционала Кона-Вогелиуса, зависящего от формы включения. Применение метода скорейшего спуска для построения решения вариационной проблемы приводит к задаче о градиентном потоке для функционала типа Кона-Вогелиуса. На практике обычно рассматриваются геометрические регуляризации вариационных задач оптимизации формы. Регуляризаторами являются периметр включения и интеграл от квадрата средней кривизны по поверхности включения. Построение экстремумов регуляризованного функционала Кона-Вогелиуса сводится к задаче о возмущении градиентных геометрических потоков. В докладе рассматриваются математические аспекты этой проблемы. Особое внимание уделяется построению гессианов функционала Кона-Вогелиуса и геометрического функционала Уиллмора. Показывается, что градиентные потоки этих функционалов описываются системами уравнений составного типа. Исследуется корректность задачи Коши для этих уравнений.

О НЕЛОКАЛЬНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Н. С. Попов¹, С. В. Попов^{1,2}

¹*Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова, Якутск*

²*Академия наук Республики Саха (Якутия), Якутск*

В работе изучается интегро-дифференциальное уравнение с интегральными условиями на боковой границе и доказывается теорема существования и единственности регулярного решения.

Пусть Ω — ограниченная область пространства \mathbb{R}^n с гладкой границей Γ , Q — цилиндр $\Omega \times (0, T)$, $S = \Gamma \times (0, T)$, $c(x, t)$, $f(x, t)$ заданные в цилиндре \overline{Q} функции, $u_0(x)$, $u_1(x)$ — на множестве $\overline{\Omega}$, $N(t)$ — при $t \in [0, T]$ и $K_i(x, y, t)$ — при $x \in \overline{\Omega}$, $y \in \overline{\Omega}$, $t \in [0, T]$.

В цилиндре Q рассматривается уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \left((Au)_t - \Delta u \right) - \Delta u + cu = f, \quad Au = \int_0^t N(t - \tau)u(x, \tau) d\tau. \quad (1)$$

Для уравнения (1) выполняются условия

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u(x, t)|_{(x,t) \in S} = \int_{\Omega} K_1(x, y, t)u(y, t)dy|_{(x,t) \in S} \quad (3)$$

или

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu(x)} \Big|_{(x,t) \in S} = \int_{\Omega} K_2(x, y, t)u(y, t)dy \Big|_{(x,t) \in S}. \quad (4)$$

Доказательство разрешимости проводится методами перехода к нагруженному уравнению с однородными краевыми условиями, продолжения по параметру, априорных оценок, доказываются регулярные разрешимости поставленных краевых задач (1)–(3) или (1), (2), (4).

Отметим, что исследованию краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений с вырождением и с нелокальными граничными условиями посвящена работа [1]. Исследования для псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений третьего порядка с интегральным условием на боковой границе проводились в работах [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Кожанов А.И. *Краевые задачи для одного класса нелокальных интегро-дифференциальных уравнений с вырождением* Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2017. Т. 23, № 4. С. 19–24.
2. Popov N.S. *Solvability of a Boundary Value Problem for a Pseudoparabolic Equation with Nonlocal Integral Conditions* Diff. Equations. 2015. V. 51. № 3. pp. 362–375.

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ЖЕВРЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

С. В. Попов^{1,2}, М. Н. Попова²

¹Академия наук Республики Саха (Якутия), Якутск

²Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова, Якутск

Теория сингулярных интегро-дифференциальных операторов на кусочно-ляпуновских кривых, охватывающая классические сингулярные операторы с ядром Коши,

интегральные операторы типа Винера-Хопфа (в мультипликативном варианте) и функциональные операторы со сдвигом построена в монографии Солдатова А.П. (1991). Случай чисто интегральных операторов подробно изложен в статье [1], где, в частности, охвачены и неограниченные кусочно-ляпуновские кривые (точнее, кусочно-ляпуновские кривые на расширенной комплексной плоскости, рассматриваемой как сфера Римана). Уравнения этого типа возникают в многочисленных приложениях, к ним сводятся эллиптические краевые задачи в кусочно-гладких областях. В работе [2] вместо кусочно-ляпуновской кривой рассмотрен отрезок $[0, 1]$ действительной оси.

В работе рассматриваются задачи Жевре для параболических уравнений с весовыми условиями сопряжения (склеивания). В случае непрерывных условий сопряжения разрешимость задачи Жевре следует из общей теории сингулярных интегральных уравнений с особым ядром, а в случае весовых условий сопряжения разрешимость следует, в том числе, из корректности интегральных уравнений с ядром, однородным степени -1 . Задача Жевре для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, непрерывными условиями сопряжения редуцируется к интегральному оператору типа Винера-Хопфа вида $N = \frac{4}{\sqrt{3}} + i[\rho K \rho^{-1} - \rho^2 K \rho^{-2}]$, $\rho = t^{2/3}$, где K — сингулярный оператор Коши.

Задача Жевре для параболических уравнений шестого порядка сводится сингулярному оператору $N = A - iR$,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} r_{11} & \frac{1}{2}r_{12} & \frac{\sqrt{3}}{2}r_{13} \\ r_{21} & \frac{1}{2}r_{22} & \frac{\sqrt{3}}{2}r_{23} \\ \sqrt{3}r_{31} & \frac{\sqrt{3}}{2}r_{32} & \frac{3}{2}r_{33} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} r_{11} &= R_{0+} + 2K_3, r_{12} = R_{0+} - \sqrt{3}R_{1+} - 4K_3, r_{13} = R_{0-} - \sqrt{3}R_{1-}, r_{21} = R_{0+} - 4K_3, \\ r_{22} &= R_{0+} + 3\sqrt{3}R_{1+} + 8K_3, r_{23} = R_{0-} + 3\sqrt{3}R_{1-}, r_{31} = R_{0-}, R_{32} = R_{0-} + 3\sqrt{3}R_{1-}, \\ r_{33} &= R_{0+} + \sqrt{3}R_{1+}, R_{0\pm} = K_7 \pm K_5, R_{1\pm} = K_2 \pm K_4, K_j = \rho^j K \rho^{-j}, \rho = t^{1/6}. \end{aligned}$$

Получены критерии фредгольмовости полученных операторов в весовых пространствах Гельдера и Лебега, приведены формулы их индекса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Солдатов А.П. *Об Одном Классе Сингулярных Интегральных Уравнений*. Математические заметки СВФУ. 2022. Т. 29. № 4. С. 37–61.
2. Popov S.V., Soldatov A.P. *To the Theory of Singular Integral Equations of Non-Classical Type on a Segment of a Line*. Lobachevskii journal of mathematics. 2023. V. 44, № 8. P. 3522–3534.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ О СОПРЯЖЕНИИ ТОНКИХ АНИЗОТРОПНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ В ДВУМЕРНОМ УПРУГОМ ТЕЛЕ ПРИ НАЛИЧИИ ОТСЛОЕНИЯ

Т. С. Попова

Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, Якутск

Задачи о сопряжении тонких включений в упругом теле представляют интерес как с точки зрения самостоятельной математической проблемы, так и с точки зрения дальнейших приложений в исследовании поведения композитных материалов. Настоящая работа посвящена изучению корректности постановок задач о сопряжении тонких полужестких включений в двумерном упругом теле. Данный класс задач соответствует моделям коротких включений, хаотически расположенных в матрице и контактирующих между собой. Рассмотрены два случая контакта включений: в концевых точках включений [1], а также во внутренней точке одного из них (примеры для изотропных включений можно найти в [2]). К особенностям модели можно отнести контакт тел различных размерностей, поскольку включение моделируется как одномерный объект в двумерной матрице, а также описание анизотропной модели включения. Под анизотропией модели понимается различные предположения о требованиях на искомую функцию перемещений точек включения. Так, в одном из направлений перемещения предполагаются упругими и соответствующими модели тонкой упругой балки, а в другом направлении функции перемещений удовлетворяют определенным условиям на их структуру и соответствуют жестким перемещениям. Предполагается, что одно из включений отслаивается от упругой матрицы с образованием трещины, и на ее берегах, как на части границы, заданы краевые условия типа неравенств. Данные условия приводят к нелинейности задачи и требуют специальных методов исследования. С применением метода вариационных неравенств доказана однозначная разрешимость поставленных задач, получена полная дифференциальная постановка, включающая систему условий сопряжения в общей точке включений, рассмотрены предельные переходы по параметру жесткости включения. Для поставленных задач разработаны методы численного решения, построены алгоритмы и приведены примеры численной реализации.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 23-21-00469).

ЛИТЕРАТУРА

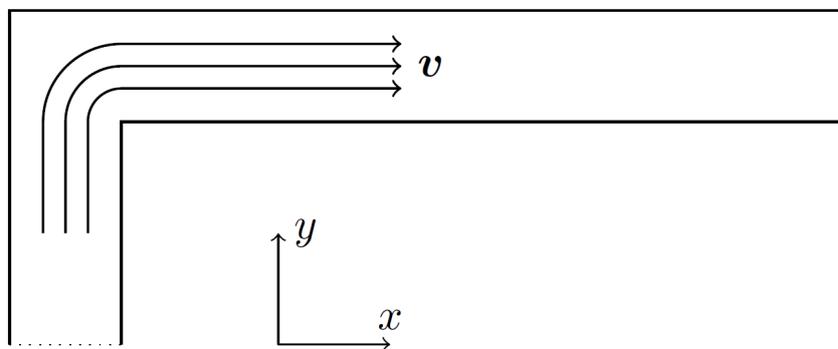
1. Хлуднев А. М., Попова Т. С. *Задача сопряжения упругого включения Тимошенко и полужесткого включения*. Математические заметки СВФУ. 2018. Т. 25. № 1. С. 73–86.
2. Попова Т. С. *Задача о T-образном сопряжении двух тонких включений Тимошенко в двумерном упругом теле*. Математические заметки СВФУ. 2023. Т. 30. № 2. С. 40–55.

УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ В ИЗОГНУТОМ КАНАЛЕ

А. В. Проскурин

Алтайский государственный технический университет, Барнаул

В изогнутом канале, показанном на рисунке, могут реализовываться различные режимы течения вязкой несжимаемой жидкости. В зависимости от числа Рейнольдса могут существовать ламинарное течение, области рециркуляции, возникать дорожка вихрей за углом канала или турбулентное движение. Некоторые из этих режимов двумерные вследствие двумерной геометрии канала. Трехмерные течения возникают при увеличении числа Рейнольдса после потери устойчивости двумерных течений. Рассматриваемая задача была изучена экспериментально Ямаситой с соавторами [1].



Движение жидкости описывается системой уравнений Навье-Стокса

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} &= -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{V}, \\ \nabla \cdot \mathbf{V} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Устойчивость стационарного двумерного течения исследовалась в линейном приближении: изучены собственные значения и функции. Расчеты производились спектрально-элементным методом при помощи программного комплекса *Nektar++* аналогично работе [2], в которой изучена устойчивость течения в плавно изогнутом канале.

ЛИТЕРАТУРА

1. Yamashita H. et al. *Fluid flow and heat transfer in a two-dimensional miter-bend: 1st report, experiments and analyses.* //Bulletin of JSME. – 1986. – Т. 29. – №. 258. – С. 4164-4169.
2. Proskurin A. *Linear stability of flow in a 90° bend* //Physics of Fluids. – 2022. – Т. 34. – №. 3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КВАЗИНУЛЕВОЙ ЖЕСТКОСТИ ПРИ ЗАКРИТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК С НЕЗАМКНУТЫМ СЕЧЕНИЕМ

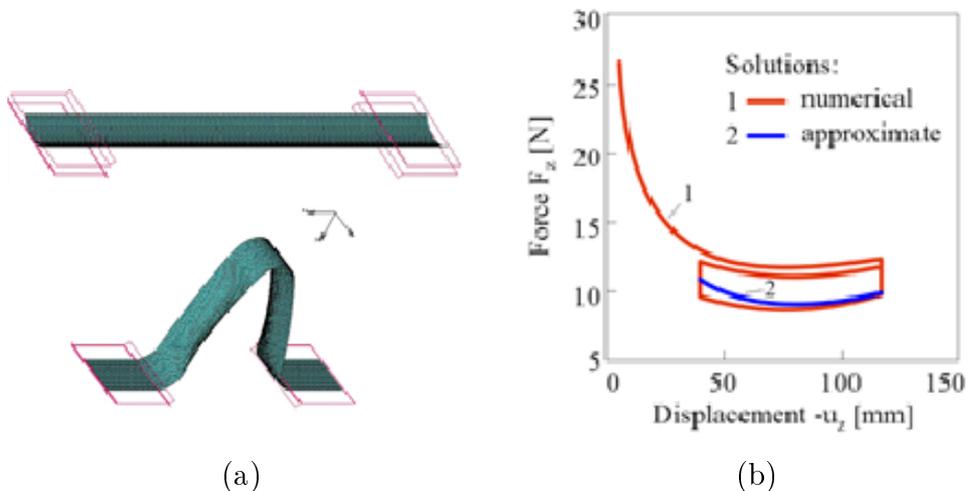
А. Н. Прохоров^{1,2}, А. Ю. Ларичкин^{1,3}, Е. В. Карпов^{1,3}

¹Московский политехнический университет

²Тюбол-Центр НСК, Новосибирск

³Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН

В аэрокосмической отрасли активно применяются механические активаторы и упругие элементы на основе изогнутых тонких пластинок (tape spring) для создания узлов разворачивающихся конструкций. Использование данных конструктивных элементов позволяет проектировать механические системы не только с положительной, но и квазинулевой жесткостью, которые способствуют виброизоляции бортового оборудования космических аппаратов. В данной работе предложен геометрико-аналитический метод определения квазинулевой жесткости тонких незамкнутых оболочек при закритическом деформировании, а также приведено сравнение с данными экспериментов. При продольном сжатии длинной тонкой пластинки незамкнутого сечения, преодолев критическую силу по Эйлеру, могут быть получены большие закритические перемещения торца пластинки. Достигая определенного диапазона перемещений, такая пластинка ведет себя, как упругий элемент с квазинулевой жесткостью по моменту сил. Данный эффект возникает вследствие того, что накопление энергии в месте изгиба тонкой оболочки происходит благодаря изменению формы сечения, то есть при деформации часть длины оболочки с сечением в виде серпа, приобретает плоское сечение. Для применения эффекта квазинулевой жесткости предлагается использовать стержень при его деформации в закритической области, в виде представленном на Рис.1 (а). В пластинке при деформировании возникают четыре упругих шарнира, в каждом из которых реализуется эффект квазинулевой жесткости по моменту сил, при этом осевая компонента продольной силы F_z имеет нелинейную связь с перемещением, что показано на Рис.1 (b).



Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда, проект № 23-19-00258 (<https://rscf.ru/project/23-19-00258/>).

ВИНТОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ И ИХ ДВУМЕРНЫЕ АНАЛОГИ

В. В. Пухначев

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет*

Винтовыми течениями называются течения, в которых векторы скорости и ее вихря коллинеарны. Класс таких течений был открыт И.С. Громекой (1881) и независимо Э. Бельтрами (1889). Интерес к исследованию винтовых течений стимулировал выход монографии О.Ф. Васильева (1958). Громека, Бельтрами и Васильев изучали стационарные винтовые течения идеальной несжимаемой жидкости. В.А. Стеклов (1896) нашел винтовые течения вязкой жидкости, которые с необходимостью являются нестационарными. Замечательным свойством винтовых течений является существование интеграла Бернулли для движений как идеальной, так и вязкой жидкости, хотя движение непотенциально. Доклад содержит известные примеры винтовых течений, построенные О.И. Богоявленским (1997), В.П. Ковалевым, Е.Ю. Просвиряковым и Г.Б. Сизых (2017), В.А. Галкиным (2023). Найдены плоские и вращательно симметричные аналоги винтовых течений. Дано обобщение этих результатов на случай движения жидкости второго порядка. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 24-21-00213.

ВЛИЯНИЕ БИМЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ НА ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СТАЛЬНОГО УДАРНИКА С МЕТАЛЛОКЕРАМИЧЕСКОЙ ПРЕГРАДОЙ

П. А. Радченко, А. В. Радченко, С. П. Батуев, А. В. Кануткин

Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск

В работе численно исследуется влияние биметаллической оболочки на взаимодействие стального ударника с металлокерамической преградой. Рассматривается нормальное и косое взаимодействие. Моделирование проводится численно в трехмерной постановке. В качестве материалов биметаллической оболочки рассматриваются свинец и медь. Верхний слой преграды – керамика, карбид бора; нижний слой – алюминий. Поведение металлических материалов описывается упругопластической средой, в качестве критерия разрушения используется предельная величина интенсивности пластических деформаций.

Поведение керамики описывается в рамках упругохрупкой модели, для описания разрушения используется деформационный критерий. Численное моделирование проводится методом конечных элементов, реализованным в авторском программном комплексе EFES.

Проведены параметрические исследования влияния вращения ударника и биметаллической оболочки на кинематику процесса взаимодействия ударника с преградой и разрушение взаимодействующих тел для различных углов и скоростей взаимодействия.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00421, <https://rscf.ru/project/24-21-00421/>.

МЕТОД РАСЧЕТА РЕЛАКСАЦИИ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ПОВЕРХНОСТНО УПРОЧНЕННОМ ПРИЗМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗЦЕ С ПОЛУКРУГЛЫМ НАДРЕЗОМ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

В. П. Радченко¹, М. Н. Саушкин¹, Д. М. Шишкин¹

¹Самарский государственный технический университет, Самара

²Сызранский филиал Самарского государственного технического университета, Сызрань

Существование мелких концентраторов напряжений на поверхностях деталей и элементов конструкций газотурбинных двигателей обусловлено как эксплуатационными факторами (сколы, царапины, вмятины), так и конструктивной необходимостью (канавки, выточки, пазы). Несмотря на природу своего происхождения, их наличие в конструкциях негативно сказывается на прочностном ресурсе силовых агрегатов и установок, работающих в условиях высоких температур.

Применение методов опережающего поверхностного пластического деформирования (ОППД) для наведения сжимающих остаточных напряжений (ОН) в области концентраторов напряжений позволяет локально повысить прочность таких деталей, однако длительное влияние эксплуатационных силовых и температурных нагрузок, нередко сопровождающихся процессом ползучести, приводит к релаксации введенных упрочнением ОН сжатия. В этой связи возникает необходимость в разработке метода оценки кинетики ОН в деталях с концентраторами напряжений в условиях высокотемпературного реологического деформирования.

В настоящей работе на примере поверхностно упрочненного призматического образца $100 \times 10 \times 10$ мм из сплава ЭП742 с полукруглым сквозным надрезом $\rho = 0.1; 0.2; 0.3; 0.5$ мм, находящегося в условиях температурной выдержки при температуре $T_2 = 650$ °С в течение $t = 300$ ч без силового нагружения (термоэкспозиция), представлена численная методика расчета релаксации ОН при ползучести в программном конечно-элементном пакете ANSYS.

Работа является логическим продолжением исследования [1], поэтому полученные результаты о распределении ОН в образце в «холодном» состоянии ($T_1 = 20$ °С) после процедуры ОППД использовались в качестве исходных данных для решения задачи в условиях ползучести. В дальнейшем предполагалось, что образец «мгновенно» прогревается до температуры $T_2 = 650$ °С и выдерживается по времени до $t = 300$ ч, после чего осуществляется его температурная разгрузка. Для всех значений радиуса надреза ρ установлено, что за время выдержки 300 часов в условиях ползучести после температурной разгрузки все еще наблюдается значительная величина ОН, что свидетельствует об эффективности ОППД в условиях высоких температур. Из сопоставления полученных результатов с результатами для аналогичного упрочненного гладкого «бездефектного» образца установлено, что для случаев гладкого образца и образца с надрезом $\rho = 0.1$ мм для всех компонент ОН $\sigma_i = \sigma_i(y, t)$ ($i = x, y, z$) и при любых значениях времени $t \in [0; 300]$ ч наблюдается наибольший уровень релаксации напряжений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 23-29-00434).

ЛИТЕРАТУРА

1. Радченко В. П., Шишкин Д. М. *Метод реконструкции остаточных напряжений в призматическом образце с надрезом полу-круглого профиля после опережающего поверхностного пластического деформирования*. Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, В. 4. С. 478–492.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КОСМИЧЕСКОГО МУСОРА С МОНОЛИТНОЙ И СЛОИСТОЙ ОБОЛОЧКОЙ**П. А. Радченко, А. В. Радченко, С. П. Батуев, А. В. Кануткин***Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск*

Расширение масштаба человеческой деятельности в космосе сопровождается нарастающим непрерывным накоплением разнообразных фрагментов в околоземном пространстве, среди которых: прекратившие свое активное существование спутники, последние ступени ракетносителей, элементы систем отделения спутников от носителей, разгонные блоки, обломки спутников и ракетносителей, образовавшиеся в результате случайных или запланированных взрывов и т. д. Все эти фрагменты, накапливаясь на околоземных орбитах, образуют так называемый космический мусор, чрезмерное обилие которого уже в настоящее время представляет реальную опасность для функционирования разнообразных космических аппаратов и для жизни космонавтов. Осколки техногенного мусора имеют довольно широкий спектр по массам, формам и скоростям столкновения их с запускаемыми космическими объектами. При этом возможные скорости встречи таких осколков с действующими космическими аппаратами при догонных и лобовых столкновениях колеблются в широких пределах (от 0 до 15 км/с). Для защиты космических аппаратов широко применяются разнесенные конструкции, состоящие из одного или двух тонких экранов (щит Уиппла). При взаимодействии с тонким экраном космическая частица разрушается, и ее поражающая способность существенно снижается, что позволяет сохранить защищаемую конструкцию. Поэтому решение задач по взаимодействию осколков космического мусора с защитным корпусом летательного аппарата является актуальной задачей.

В работе численно исследуется взаимодействие стального шара, моделирующего частицу космического мусора, с монолитной стальной оболочкой и двухслойной оболочкой, состоящей из слоя ортотропного композита и алюминия. Рассмотрен диапазон скоростей взаимодействия 1–10 км/с. Численное моделирование проводится лагранжевым методом конечных элементов с целью исследования динамики ударно-волновой картины и развития разрушения в ударнике и оболочке. В методе реализован алгоритм эрозионного разрушения, обеспечивающий выполнение уравнения неразрывности и неискажение расчетной сетки.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00421, <https://rscf.ru/project/24-21-00421/>.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗРУШАЮЩЕЙ НАГРУЗКИ ПЛАСТИН С ОТВЕРСТИЕМ

Е. И. Романенко^{1,2}, И. А. Банщикова^{2,3}, А. Н. Пель²

¹СибНИА им С. А. Чаплыгина, Новосибирск

²Новосибирский государственный технический университет

³Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Подтверждения лётной годности летательных аппаратов согласно авиационным правилам [1] необходимо проводить по разрушающим нагрузкам. Однако, общепринятые прочностные расчёты авиационных конструкций с использованием конечно-элементных пакетов проводятся в пределах упругих деформаций и не предполагают определение разрушающих нагрузок. Их определение представляется возможным только после испытаний натурных конструкций самолета до разрушения, что является очень затратным и трудоемким процессом. На данный момент не существует общепринятых методов и алгоритмов для определения разрушающей нагрузки с помощью метода конечных элементов, хотя современные пакеты предоставляют возможность проведения расчётов с учётом физической и геометрической нелинейности.

Разработана программа, реализующая алгоритм определения разрушающей нагрузки с использованием метода конечных элементов в пакете ANSYS. Валидация алгоритма выполнена на пластинах с круглым отверстием. Исследованы как однородные пластины, изготовленные из одного из сплавов Д16Т или В95, так и комбинированные образцы, состоящие из двух пластин, одна из которых изготовлена из сплава Д16Т, а вторая из сплава В95. В комбинированных образцах в растягиваемой области, где пластины соприкасаются, полагается, что трение возникающее между их поверхностями слабо влияет на результаты решения, т.е. отсутствует задание каких-либо условий контакта. В области захватов пластины сильно прижимаются друг к другу и жестко фиксируются в захватывающих устройствах. В расчетах используются упругопластические параметры материалов, полученные из испытаний на растяжение гладких образцов без отверстий. Построены условные и истинные диаграммы деформирования материалов. Для образцов с отверстием различие разрушающей нагрузки, полученной из испытаний на разрывной машине, от нагрузки, найденной методом конечных элементов, составило не более 2%. Предельная нагрузка для пластин с отверстием, вычисленная с использованием модели идеально жестко-пластического материала в условиях плоской деформации [2], оказалась значительно ниже экспериментальной разрушающей нагрузки, поскольку расчет по модели идеальной пластичности не учитывает эффект упрочнения материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нормы лётной годности гражданских легких самолетов: Авиационные правила, часть 23*. СПб: ООО «СЗ РЦАИ», 2021.
2. Малинин Н. Н. *Прикладная теория пластичности и ползучести. Учебник для студентов вузов*. М.: Машиностроение, 1975.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В. Г. Романов

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Рассматриваются обратные задачи для гиперболических уравнений, содержащие нелинейности в младших членах. Определению подлежат коэффициенты при нелинейных членах. Типичная постановка рассматриваемых задач заключается в следующем. Предполагается, что неоднородность локализована в некотором шаре B трёхмерного пространства. Вне этого шара дифференциальный оператор задан и совпадает с волновым оператором. Из однородного пространства на неоднородность падает плоская волна с направлением $\nu \in \mathbb{S}^2$. Прохождение этой волны через нелинейную неоднородность наблюдается на границе S области B для моментов времени близких к приходу бегущей волны в точки S и для различных значений ν . Получаемая таким образом информация о решениях дифференциального уравнения, используется для постановки и анализа обратных задач. Показывается, что обратные задачи о построении искомым функций сводятся к задаче томографии в том случае, когда главная часть гиперболического оператора постоянна в B , или к задаче интегральной геометрии с заданным весом, когда дифференциальный оператор в B определён на римановом многообразии. Приведены оценки устойчивости решения рассматриваемых обратных задач.

Результаты сообщения основаны на работах [1]-[3].

Работа выполнена в соответствии с государственным заданием Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (проект FWNF-2022-0009).

ЛИТЕРАТУРА

1. Романов В. Г., Бугуева Т. В. *Задача об определении коэффициента при нелинейном члене квазилинейного волнового уравнения // Сиб. журн. индустр. матем., 2022. Т. 25, № 3, 154-169.*
2. Романов В. Г. *Обратная задача для полумлинейного волнового уравнения // ДАН, 2022, Т. 504, № 1, 36-41.*
3. Романов В. Г. *Оценка устойчивости в обратной задаче для нелинейного гиперболического уравнения // Сиб. матем. журн. 2024 (в печати).*

ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ВОЛНОВЫХ АТТРАКТОРОВ

Я. Е. Рудая, Н. Д. Шмакова, Э. В. Макридин, Е. В. Ерманюк

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Изучение баланса энергии в динамике стратифицированной жидкости позволяет отследить переток энергии с больших масштабов, на которых происходит нагнетание, до малых, где имеет место диссипация. В случае, когда область течения замкнута, а

нагнетание происходит за счет движений малой амплитуды, за поток энергии отвечают пограничные слои и поле генерируемых внутренних волн.

В данной работе исследуются внутренние волны в трапецевидной геометрии, генерируемые колебаниями вертикальной пластины. В такой постановке ввиду специфического дисперсионного соотношения, волны фокусируются, а волновая энергия концентрируется на волновом аттракторе [1].

Экспериментальные оценки величин, участвующих в таком процессе, затруднительны: для измерения мощности в системе необходимо знать поля скорости и давления в каждой точке подвижной границы. В работе [2] использовался полуаналитический метод, а именно, поле скорости измерялось при помощи метода PIV в центральной вертикальной плоскости, перпендикулярной волнопродуктору. Далее, используя измеренное поле скорости, восстанавливается градиент давления из линеаризованных уравнений Эйлера, который, в свою очередь, интегрируется в пакете Matlab. Показано, что описанная процедура позволяет достаточно точно оценить баланс энергии только в линейном случае. В связи с этим в рамках данной работы выполнена оценка нагнетаемой мощности при помощи следующих подходов: прямое двумерное численное моделирование с помощью пакета Nek5000, измерения мощности с помощью датчиков угловых колебаний и датчика линейных перемещений, закрепленных на волнопродукторе, а также описанный выше полуаналитический метод.

Были получены графики мощности тремя описанными выше способами, для линейного и нелинейного случаев. Отмечается удовлетворительное соответствие между тремя методами. Данные, полученные с датчиков ниже оценок, полученных при помощи моделирования и при помощи полуаналитического метода ввиду трехмерности области и отсутствия в оценках диссипации на горизонтальных стенках. В нелинейном случае в численных расчетах наблюдаются сильные осцилляции после 30 периодов колебаний, связанные с возникновением триадного резонанса и волновой турбулентности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Maas, L.R.M., Benielli, D., Sommeria, J., Lam F.-P.A. *Observation of an internal wave attractor in a confined, stably stratified fluid*. Nature 1997. V. 388. P. 557–561.
2. Davis G., Dauxois T., Jamin T., Joubaud S. *Energy budget in internal wave attractor experiments*. J. Fluid Mech. 2019. V. 880. P. 743–763.

ОСРЕДНЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТЕРМОУПРУГОГО ТЕЛА, АРМИРОВАННОГО ТОНКИМИ ВОЛОКНАМИ

Е. М. Рудой, С. А. Саженок

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

В рамках плоской теории упругости изучается динамическая модель термоупругого тела, содержащего тонкие включения (волокна). Включения параллельны друг другу, и, таким образом, задача содержит малый положительный параметр ε , который описывает расстояние между двумя соседними включениями. Опираясь на слабую формулировку задачи, мы исследуем поведение решений при ε стремящимся к

нулю. В результате мы получаем хорошо поставленную гомогенизованную (осредненную) модель анизотропного композита, в которой нет необходимости учитывать каждое отдельное включение. Процесс гомогенизации основан на использовании теории двухмасштабной сходимости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fankina I.V., Furtsev A.I., Rudoy E.M., Sazhenkov S.A. *PMultiscale analysis of stationary thermoelastic vibrations of a composite material*. Philos. Trans. Roy. Soc. A. 2022. V. 380. 20210354.
2. Fankina I.V., Furtsev A.I., Rudoy E.M., Sazhenkov S.A. *The homogenized quasi-static model of a thermoelastic composite stitched with reinforcing threads*. Journal of Computational and Applied Mathematics. 2023. V. 234. 115346.
3. Fankina I.V., Furtsev A.I., Rudoy E.M., Sazhenkov S.A. *A quasi-static model of a thermoelastic body reinforced by a thin thermoelastic inclusion*. Mathematics and Mechanics of Solids. 2024. DOI: 10.1177/10812865231217043

ЗАДАЧА О БЕГУЩЕЙ ДИСЛОКАЦИИ

В. М. Садовский, О. В. Садовская

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

Наряду с медленно растущими трещинами сдвига, в твердых горных породах на глубинах сейсмической активности в земной коре наблюдаются разрывы, которые растут с аномально высокой скоростью, сравнимой со скоростями упругих волн. Для объяснения этого эффекта профессор Б. Г. Тарасов предложил оригинальный механизм. По его представлениям, в вершине разрыва под действием бокового давления, препятствующего продвижению основной трещины, образуется веерная структура из домино пластин (см. рисунок). Пластины поворачиваются при возникновении относительно небольших касательных напряжений в окружающем массиве и, что самое главное, сохраняют свою целостность при вращении, снижая тем самым трение практически до нулевой отметки.



Задача о равновесии веерной системы, возникающей на поверхности раздела двух упругих блоков горной породы, в двумерной постановке рассмотрена в [1]. Для определения статического напряженно-деформированного состояния вокруг равновесного веера разработан метод суперпозиции дислокаций. Для решения динамической задачи построена неявная разностная схема с контролируемой диссипацией энергии [2].

На многопроцессорной кластерной системе ИВМ СО РАН выполнены расчеты динамики веера на этапе страгивания. Для вычисления предельного момента сил трения при страгивании получено его аналитическое выражение через инвариантный интеграл по замкнутому контуру, охватывающему веер.

При описании движения сдвигового разрыва с постоянной скоростью применяется модель бегущей краевой дислокации Вольтерра. В рамках этой модели исследованы варианты медленного и быстрого движения дислокации относительно скоростей продольных и поперечных упругих волн.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2023-912).

ЛИТЕРАТУРА

1. Tarasov B. G., Sadovskii V. M., Sadovskaya O. V., Cassidy M. J., Randolph M. F. *Modelling the static stress-strain state around the fan-structure in the shear rupture head*. Applied Mathematical Modelling. 2018. V. 57. P. 268–279.
2. Sadovskii V. M., Sadovskaya O. V. *Numerical algorithm based on implicit finite-difference schemes for analysis of dynamic processes in blocky media*. Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2018. V. 33, Iss. 2. P. 111–121.

СКОРОСТЬ СТАЦИОНАРНОЙ ДЕТОНАЦИОННОЙ ВОЛНЫ С ДВУХСТАДИЙНОЙ РЕАКЦИЕЙ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Р. Е. Семенко^{1,2}, Х. Р. Рауфов³

¹Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

²Новосибирский государственный университет

³Совместный Белорусско-Узбекский межотраслевой институт прикладных технических квалификаций, Ташкент

Рассматривается задача об одномерной стационарной детонационной волне в пористой среде. Процесс детонации моделируется уравнениями Эйлера с реакцией и с учетом потерь импульса за счет взаимодействия продуктов горения с препятствиями. Реакция описывается двумя стадиями, первая из которых является экзотермической, а вторая – эндотермической.

Расчет детонации с потерями осложнен наличием звуковой точки в зоне реакции, что с одной стороны является критерием определения скорости детонационной волны, а с другой – представляет проблему численного расчета решения, проходящего через эту точку. Известно, что кривая зависимости скорости детонации и величины потерь может иметь S-образный профиль [1], разбивающий множество решений на несколько ветвей. В работе [2] было показано, что учет потерь как импульса, так и тепла приводит к возникновению континуальной области решений на этой кривой. Вместе с тем, добавление эндотермической стадии реакции также, независимо от наличия потерь, может приводить к возникновению звуковой точки в зоне реакции [3]. Настоящее исследование посвящено случаю, когда оба этих фактора – порети

импульса и эндотермическая реакция – работают одновременно. Показано, что в отдельных случаях такая постановка задачи приводит к возникновению двух звуковых точек и потенциальному разрушению решения.

Работа Р.Е. Семенко выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2022-281.

ЛИТЕРАТУРА

1. Brailovsky I., Sivashinsky G. *Effects of momentum and heat losses on the multiplicity of detonation regimes*. Combustion and Flame. 2002. Vol. 128, No 1, P. 191–196.
2. Semenko R., Faria L. M., Kasimov A. R., Ermolaev B. S. *Set-valued solutions for non-ideal detonation*. Shock Waves. 2016. Vol. 26, No 2. P. 141–160.
3. Kabanov D. I., Kasimov A. R. *Linear stability analysis of detonations via numerical computation and dynamic mode decomposition*. Phys. Fluids. 2018. Vol. 30, 036103.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЯЗКОСТИ БИОЛОГИЧЕСКИХ ЖИДКОСТЕЙ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ФИЗИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ

А. Б. Семёнов, П. П. Гулевцов, А. Иванов

Новосибирский государственный медицинский университет

Количественное значение вязкости крови даёт ценные сведения для диагностики и лечения заболеваний в гемологии, при заболевании крови и органов кроветворения. По значению коэффициента вязкости в гигиене питания судят о качестве некоторых продуктов (сахара, сиропа, соков). Знание вязкости необходимо для установления механизмов многих явлений: обмена веществ и энергии, диффузия веществ сквозь мембраны клеток, подвижности ионов в биосистемах. Данный доклад посвящён исследованию методов изучения вязкости крови в различных физических условиях. В докладе для количественной оценки вязкости крови предлагается использовать кровезаменяющие жидкости в разной концентрации, изменение концентрации кровезаменяющей жидкости позволит моделировать изменение концентрации в крови некоторых веществ: например сахара. Для проведения исследования используется метод капиллярных трубок. В процессе исследования также варьируется температура. После проведения исследований проводится количественная оценка вязкости.

Порядок выполнения измерений следующий:

- 1 Наполняют бюретку дистиллированной водой, после чего с помощью секундомера определяют время истечения определённого объёма воды.
- 2 Подобные измерения выполняют с растворами постепенно возрастающих концентраций.
- 3 По рабочей формуле определяют величину коэффициента вязкости исследуемых растворов.
- 4 Результат измерения представлен в виде графика.

УПРАВЛЕНИЕ ВОЗНИКНОВЕНИЕМ ГИДРОАКУСТИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА В ТЕЧЕНИИ БИОЛОГИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ

А. Б. Семёнов, Д. Рогалев

Новосибирский государственный медицинский университет

Значение знаний о динамике развития резонансных явлений в движущемся потоке крови очень велико: при развитии акустического резонанса потоке крови может привести к образованию пузырьков и тромба. Данный доклад посвящён исследованию методов управления и подавления возможных резонансных явлений в потоке биологических жидкостей. В докладе для количественной оценки акустических явлений применяется модельный эксперимент. В качестве физической модели крови применяется течение жидкости по гибкому шлангу с неоднородностями внутри него в виде микропластинок при определённых длине и ширине микропластинки в канале образуются пузырьки, также, следует добавить, что если в потоке уже есть крупные пузырьки, то с ними можно бороться расположив в потоке препятствия - микропластинки определённой длины и толщины. В процессе исследования были предложены определённые значения размеры препятствий опасные для возникновения пузырьков, этими препятствиями могут быть, например, отложения холестерина. В докладе приводятся результаты экспериментальной оценки резонансных течений модельной жидкости (модель крови) вблизи препятствий.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МДТТ

С. И. Сенашов, И. Л. Савостьянова

Сибирский государственный университет науки и технологий им. М. Ф. Решетнева, Красноярск

Л.В.Овсянников считал, что законы сохранения дифференциальных уравнений есть часть группового анализа дифференциальных уравнений, включив их описание в свою монографию [1]. Позднее законам сохранения уже большее внимание уделил его ученик – Н.Х.Ибрагимов [2]. Они отмечали существенную роль законов сохранения в ряде вопросов, возникающих при решении задач математической физики (в силу нелокальности этих законов).

Л.В. Овсянников поставил вопрос: «Могут ли средства группового анализа помочь при решении краевой задачи и в чем именно может выразиться эта помощь?» [1, стр. 367]. Первые результаты в этом направлении получены в работе [3].

В предлагаемом докладе показано, как законы сохранения могут быть использованы для решения некоторых краевых задач уравнений теории идеальной пластичности и линейной теории упругости. Тем самым получен частичный ответ на вопрос Л.В. Овсянникова.

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсяников Л. В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений*. М.: Наука, 1978
2. Ибрагимов Н. Х. *Группы преобразований в математической физике*. М.: Наука, 1983
3. Сенашов С. И. *Законы сохранения и точное решение задачи Коши для уравнений идеальной пластичности*. Докл. РАН. 1995. Т. 345. № 5. С. 619–620.

МОДЕЛЬ ТЕРМОДИНАМИКИ СИСТЕМЫ ТИТАН—НИКЕЛЬ ПРИ
ВЫСОКИХ ПЛОТНОСТЯХ ЭНЕРГИИН. Н. Середкин¹, К. В. Хищенко^{1,2,3}¹Объединенный институт высоких температур РАН, Москва²Московский физико-технический институт, Долгопрудный³Южно-Уральский государственный университет, Челябинск

В численном моделировании ударно-волновых процессов для замыкания системы уравнений механики сплошной среды — законов сохранения массы, импульса и энергии — необходимо знать уравнение состояния среды [1, 2].

В настоящей работе предложена модель уравнений состояния для индивидуальных веществ в форме $E = E(V, T)$ и $P = P(V, T)$, где E — удельная внутренняя энергия; P — давление; V — удельный объем; T — температура. Также предложена модель термодинамики смесей на основе уравнений состояния компонентов в следующем виде:

$$V_{1N}(P, T) = \sum_{i=1}^N \alpha_i V_i(P, T), \quad E_{1N}(P, T) = \sum_{i=1}^N \alpha_i E_i(P, T), \quad (1)$$

где V_{1N} и E_{1N} — удельный объем и удельная внутренняя энергия смеси; V_i , E_i и α_i — удельный объем, удельная внутренняя энергия и массовая доля i -того компонента; N — количество компонентов.

Модель (1) применена для описания свойств системы титан—никель. Результаты расчета ударных адиабат титана, никеля и их смесей находятся в хорошем согласии с имеющимися данными ударно-волновых экспериментов при высоких плотностях энергии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. *Механика сплошной среды. Том 1*. М.: Наука, 1970.
2. Канель Г. И., Разоренов С. В., Уткин А. В., Фортов В. Е. *Ударно-волновые явления в конденсированных средах*. М.: Янус-К, 1996.

МОДЕЛИРОВАНИЕ КРОВОТОКА В ОБЛАСТЯХ СОЕДИНЕНИЯ СОСУДОВ С ПОМОЩЬЮ ФИЗИЧЕСКИ ИНФОРМИРОВАННЫХ НЕЙРОСЕТЕЙ

С. С. Симаков^{1,2,3}, А. А. Исаев², Т. К. Добросердова², А. А. Данилов^{2,3}

¹Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

²Институт вычислительной математики им. Г. И. Марчука РАН, Москва

³Сеченовский университет, Москва

Анализ динамики кровотока в областях соединения сосудов играет важную роль для детального моделирования гемодинамики при наличии сердечно-сосудистых заболеваний и разработки эффективных стратегий лечения. Оценка с высокой точностью параметров кровотока для конкретного пациента, включая давление и потоки, позволяет повысить качество и скорость принятия клинических решений, например, по поводу проведения сосудистых операций. Сложность геометрии обсуждаемых областей и физических условий (высокие числа Рейнольдса, сложные формы линий тока и др.) создают трудности, которые могут быть преодолены с помощью математического моделирования.

Новым перспективным направлением является использование методов глубокого обучения для вычислительной гидродинамики [1]. Физически информированные нейросети позволяют использовать на этапе обучения предварительных знаний о фундаментальных физических законах, что позволяет ускорить процесс обучения, существенно снизить требования к объему набора данных для обучения, повысить надежность и корректность результатов предсказания.

В данной работе используется регуляризация путем модификации функции ошибки с использованием законов сохранения массы в области соединения сосудов и симметрии потока в случае бифуркации. Рассмотрены две конфигурации: бифуркация [2] и область, сформированная четырьмя сосудами в результате проведения операции Фонтана [3]. Данные для обучения сгенерированы с использованием трехмерных стационарных уравнений Навье-Стокса без учета подвижности границ. Относительная погрешность на тестовых выборках составила соответственно 2.5% и 6%;

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 21-71-30023).

ЛИТЕРАТУРА

1. Kutz J. *Deep learning in fluid dynamics*. J. Fluid Mech. 2017. Vol. 814. P. 1–4.
2. Isaev A., Dobroserdova T., Danilov A., Simakov S. *Physically informed deep learning technique for estimating blood flow parameters in arterial bifurcations*. Lobachevskii J. Math. 2024, Vol. 45, No. 1, P. 238-249.
3. Isaev A., Dobroserdova T., Danilov A., Simakov S. *Physically informed deep learning technique for estimating blood flow parameters in four vessel junction after the Fontan procedure*. Computation. 2024 (in press).

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ В ОКРЕСТНОСТИ ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ

Е. В. Симонова, А. А. Грисьяк

*Самарский национальный исследовательский университет имени академика
С. П. Королева*

Определение тензорных полей в окрестности вершины трещины упругопластических тел в виде многопараметрического разложения является одной из актуальных задач механики сплошной среды. В основе рассматриваемого подхода принята предложенная в работе [1] методология трехчленных асимптотических полей для определения полей напряжений и перемещений в окрестности вершины трещины в упрочняющемся материале при степенном законе вида $\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2}B\sigma_e^{n-1}s_{ij}$.

Функция Эри представляется в виде многочленного разложения:

$$F(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k r^{\lambda_k+1} f_k(\theta) = A_1 r^{\lambda_1+1} f_1(\theta) + A_2 r^{\lambda_2+1} f_2(\theta) + A_3 r^{\lambda_3+1} f_3(\theta) + \dots, \quad (1)$$

в котором собственные значения λ_k и амплитудные коэффициенты A_k связаны с параметрами первых двух слагаемых разложения:

$$\lambda_3 = 2(\lambda_2 - \lambda_1) + \lambda_1, \quad \lambda_4 = 3(\lambda_2 - \lambda_1) + \lambda_1, \quad \dots, \quad \lambda_k = (k - 1)(\lambda_2 - \lambda_1) + \lambda_1, \quad \dots$$

$$A_3 = \frac{A_2^2}{A_1}, \quad A_4 = \frac{A_2^3}{A_1^2}, \quad \dots, \quad A_k = \frac{A_2^{k-1}}{A_1^{k-2}}, \quad \dots$$

Указанные коэффициенты определяются следующим образом: $\lambda_1 = \frac{n}{1+n}$, где n – прочностной показатель материала; λ_2 на основе данных работы [1]; A_1, A_2 из вычислительного эксперимента с помощью программного комплекса SIMULIA Abaqus.

Проведенный асимптотический анализ позволил получить многопараметрические разложения компонент тензоров напряжений и деформаций в виде:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_2^{k-1}}{A_1^{k-2}} r^{(k-1)(\lambda_2-\lambda_1)+\lambda_1-1} \sigma_{ij}^{(k)}(\theta),$$

$$\varepsilon_{ij}(r, \theta) = \frac{3}{4}B \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{n-1} \sum_{k=1}^{\infty} A_1^{n-(k-1)} A_2^{k-1} r^{n(\lambda_1-1)+(k-1)(\lambda_2-\lambda_1)} \varepsilon_{ij}^{(k)}(\theta),$$

для которых угловые компоненты тензоров $\sigma_{ij}^{(k)}(\theta)$ и $\varepsilon_{ij}^{(k)}(\theta)$ связаны с собственными функциями $f_k(\theta)$ разложения (1) соотношениями:

$$\sigma_{rr}^{(k)}(\theta) = (\lambda_k + 1)f_1(\theta) + f_k''(\theta), \quad \sigma_{\theta\theta}^{(k)}(\theta) = \lambda_k(\lambda_k + 1)f_k(\theta), \quad \sigma_{r\theta}^{(k)}(\theta) = -\lambda_k f_k'(\theta);$$

$$\varepsilon_{rr}^{(k)}(\theta) = -\varepsilon_{\theta\theta}^{(k)}(\theta) = \frac{3}{4}B\sigma_e^{n-1} \left(\sigma_{rr}^{(k)}(\theta) - \sigma_{\theta\theta}^{(k)}(\theta) \right), \quad \varepsilon_{r\theta}^{(k)}(\theta) = \frac{3}{2}B\sigma_e^{n-1} \sigma_{r\theta}^{(k)}(\theta).$$

Собственные функции $f_k(\theta)$ определяются из решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, получаемой из условия совместности деформаций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nikishkov G.P. *An algorithm and a computer program for the three-term asymptotic expansion of elastic-plastic crack tip stress and displacement fields*. Engineering Fracture Mechanics. 1995. V. 50. № 1. P. 65–83.

**О СУЩЕСТВОВАНИИ ГЛОБАЛЬНЫХ КЛАССИЧЕСКИХ
РЕШЕНИЙ С КОМПАКТНЫМИ НОСИТЕЛЯМИ СМЕШАННОЙ
ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ВЛАСОВА-ПУАССОНА В
ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ**

А. Л. Скубачевский

Российский университет дружбы народов им. П. Лумумбы, Москва

Рассматривается система уравнений Власова-Пуассона с внешним магнитным полем в полупространстве с краевым условием Неймана для потенциала электрического поля и условиями упругого отражения на границе. Эта задача моделирует кинетику высокотемпературной двухкомпонентной плазмы. Для произвольных начальных функций распределения плотности заряженных частиц получены достаточные условия на внешнее магнитное поле, при выполнении которых существует глобальное классическое решение с компактными носителями функций распределения плотности заряженных частиц, лежащими на некотором расстоянии от границы.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (мегагрант соглашение N 075-15-2022-1115).

ЛИТЕРАТУРА

1. Скубачевский А. Л. *Уравнения Власова-Пуассона для двухкомпонентной плазмы в однородном магнитном поле*. УМН, 2014, Т. 69, В. 2, С. 107–148.
2. Скубачевский А. Л. *О существовании глобальных слабых решений с компактными носителями системы Власова-Пуассона с внешним магнитным полем*. Дифференциальные уравнения, 2023, Т. 59, № 11, С. 1471–149.

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МОРСКИХ ВОЛН
И ВОЛН-УБИЙЦ В РАМКАХ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА**

А. В. Слюняев

*Институт прикладной физики им. А.В. Гапонова-Грехова, Нижний Новгород
НИУ - Высшая школа экономики, Нижний Новгород
Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева ДВО РАН,
Владивосток*

Можно сказать, что решение проблемы т.н. “волн-убийц” – необычно высоких волн, возникающих на морской поверхности неожиданно часто, сводится к поиску эффектов, не учитываемых современными прогностическими (кинетическими) моделями. Численное моделирование динамики ансамблей морских волн в рамках исходных уравнений гидродинамики слишком трудозатратно, потому обычно используют

“почти полные” уравнения гидродинамики, в частности, потенциальные уравнения Эйлера. Большой интерес привлекают процессы нелинейных когерентных волновых взаимодействий, приводящие к нарушению предположений случайного гауссового процесса, лежащих в основе современных вероятностных моделей морских волн.

Для описания доминирующих в случае не слишком крутых волн на глубокой воде четырехволновых взаимодействий в первом приближении используется нелинейное уравнение Шредингера и его решения [1]. Большое внимание получают задачи описания спонтанной модуляционной неустойчивости и солитонного газа с использованием аппарата обратной задачи рассеяния. Для понимания практической значимости этих результатов, их приложения к задачам морской инженерии необходимо сопоставление приближенных решений с реалистичным моделированием морских волн, в том числе, с учетом реализуемых в настоящем море условий.

В настоящей работе приводится обзор собственных результатов, связанных с численным моделированием ансамблей нерегулярных гравитационных волн на поверхности воды в рамках потенциальных уравнений Эйлера [2, 3]. Обсуждается самопроизвольное возникновение нелинейных когерентных волновых структур, которые могут существовать на протяжении сотен периодов, проявляют себя в пространственно-временных спектрах волн и ассоциируются с солитонами огибающей [4, 5].

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект РНФ 22-17-00153).

ЛИТЕРАТУРА

1. Слюняев А. В., Пелиновский Д. Е., Пелиновский Е. Н. *Морские волны-убийцы: наблюдения, физика и математика*. УФН. 2023. Т. 193. С. 155–181.
2. Слюняев А. В., Кокорина А. В. *Численное моделирование «волн-убийц» на морской поверхности в рамках потенциальных уравнений Эйлера*. Изв. РАН. ФАО. 2020. Т. 56. С. 210–223.
3. Slunyaev A., Kokorina A. *On the probability of down-crossing and up-crossing rogue waves*. Phys. Fluids. 2023. V. 35. P. 117109.
4. Slunyaev A. V. *Effects of coherent dynamics of stochastic deep-water waves*. Phys. Rev. E. 2020. V. 101. P. 062214.
5. Slunyaev A. V. *Persistence of hydrodynamic envelope solitons: detection and rogue wave occurrence*. Phys. Fluids. 2021. V. 33. P. 036606.

ЭЛЕКТРООСМОТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ В МИКРОКАНАЛЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРЕМЕННОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Б. Л. Смородин

Пермский государственный национальный исследовательский университет

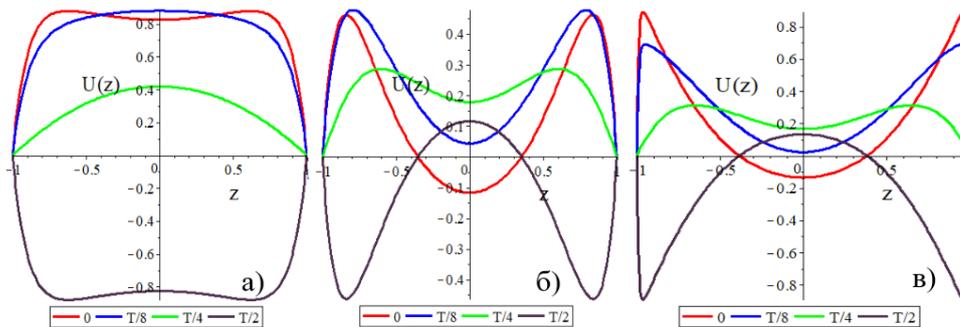
Микрофлюидные системы и в частности микроканалы применяются в медицине, фармацевтике, экологии. Среди методов немеханического управления в микрофлюидике наибольший интерес представляют электрокинетические методы [1].

Рассмотрено электроосмотическое течение, возникающее в горизонтальном длинном микроканале высотой $2h$, под действием переменного электрического поля, направленного вдоль его жестких границ $E = E_0 \cos \Omega t$. Распределение потенциала

в электролите описывается уравнением Пуассона-Больцмана. Безразмерная система уравнений, характеризующая течение, содержит частоту ($\omega = \Omega h^2/\nu$), безразмерную длину Дебая ($De = l_D/h = \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon k_B T / 2z^2 e^2 n_0 / h}$), соотношение дзета потенциалов границ ($\zeta = \zeta_2/\zeta_1$), электроосмотический параметр $U_0 = \varepsilon_0 \varepsilon \zeta_1 E_0 h / \eta \nu$. Получено распределение поля скорости, которое в частном случае равенства дзета потенциалов границ ($\zeta = 1$), если их величина не превышает 25 mV может быть записано в виде:

$$U(z, t) = \frac{U_0}{(1 + \omega^2 De^4)} \Re \left(\left(\frac{\cosh((1+i)\sqrt{\omega/2}z)}{\cosh((1+i)\sqrt{\omega/2})} - \frac{\cosh(z/De)}{\cosh(1/De)} \right) (1 + i\omega De^2) \exp(i\omega t) \right).$$

Профили скорости в различные доли периода внешнего поля $T = 2\pi/\omega$ представлены на рисунке для случая $U_0 = 1$: а) $De = 0.1, \omega = 1$; б) $De = 0.1, \omega = 10$; в) $De = 0.01, \omega = 10$.



Устойчивость электроосмотического течения $U(z, t)$ изучена с помощью метода Флоке. Для различных частот внешнего поля получены нейтральные кривые, а также пороги возникновения неустойчивости и критические волновые числа.

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00344, <https://rscf.ru/project/23-21-00344/>.

ЛИТЕРАТУРА

1. Squires T. M., Quake S. R. *Microfluidics: Fluid physics at the nanoliter scale*. Rev. Mod. Phys. 2005. V. 77. № 3. С. 977–1023.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПЛОСКОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

А. П. Солдатов

Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" РАН,
Москва

Предложены новые интегральные представления решений системы Ламе плоской анизотропной теории упругости в области, ограниченной простым ляпуновским контуром. Эти представления являются аналогом классических потенциалов двойного слоя для гармонических функций и не связаны с фундаментальной матрицей решения системы Ламе. Они позволяют осуществить непосредственную эквивалентную редукцию задачи Дирихле к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода на границе.

КОНТИНУАЛЬНОЕ И АТОМИСТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПОЛЕЙ У ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ В АНИЗОТРОПНЫХ ЛИНЕЙНО УПРУГИХ ТЕЛАХ С РАЗЛИЧНЫМИ ВИДАМИ СИММЕТРИЙ УПРУГИХ СВОЙСТВ

Л. В. Степанова, К. А. Мушанкова

Самарский национальный исследовательский университет им. акад. С. П. Королева

Анализ полей напряжений у вершины трещины в анизотропных линейно упругих материалах с различными видами сингоний упругих свойств является одной из актуальных проблем современной механики разрушения [1], [2]. Со стремительным развитием вычислительных технологий стало возможным наряду с классическим континуальным описанием полей у вершины трещины исследовать напряжения методом молекулярной динамики (МД), учитывающим кристаллическое строение материала. Нами проведены 1) МД расчеты механических полей у вершины трещины в материалах с кубической симметрией упругих свойств, в ГЦК монокристаллических материалах (меди, алюминии, никеле) в программном комплексе Large-scale Atomic/Molecular Massively Parallel Simulator с применением потенциала внедренного атома для различных условий нагружения: от нормального отрыва до форм, близких к поперечному сдвигу; 2) сопоставления угловых распределений напряжений, полученных с помощью решений классической теории упругости анизотропных сред, и распределений, полученных посредством метода МД (рис.1).

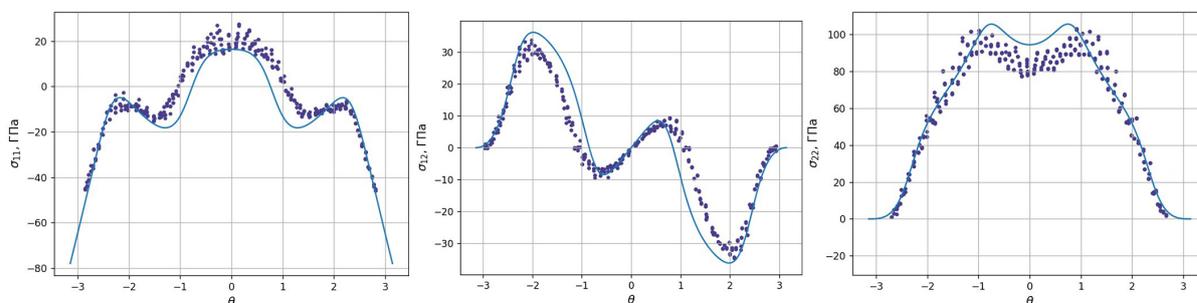


Рис. 3: Сравнение атомистического и континуального решений: а) компонента σ_{11} ; б) σ_{12} ; в) σ_{22} ; точки - МД расчет, сплошные линии - аналитическое решение

Из рис. 1 видно, что континуальный и дискретный подходы хорошо согласуются между собой и представления классической механики разрушения могут быть использованы на атомистических расстояниях [1], [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 21-11-00346).

ЛИТЕРАТУРА

1. Stepanova L. V., Belova O. N. *Coefficients of the Williams power expansion of the near crack tip stress field in continuum linear elastic fracture mechanics at the nanoscale*. Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2022. V. 119. 103298.

2. Stepanova L.V., Belova O.N. *Stress intensity factors, T-stresses and higher order coefficients of the Williams series expansion and their evaluation through molecular dynamics simulations*. Mechanics of Advanced Materials and Structures. 2023. V. 30(19). P. 3862-3884.

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССОВ НАКОПЛЕНИЯ ПОВРЕЖДЕНИЙ У ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

Л. В. Степанова, Д. В. Чаплий, О. Н. Белова

Самарский национальный исследовательский университет им. акад. С. П. Королева

Целью настоящего исследования является конечно-элементное моделирование зон активного накопления повреждений у вершины трещины в условиях ползучести в смешанном режиме нагружения (при комбинированном приложении нагрузок, вызывающих нормальный отрыв и поперечный сдвиг). Конечно-элементный анализ выполнен для степенного закона ползучести и степенного кинетического уравнения накопления повреждений (эволюционного уравнения Качанова -Работнова). В КЭ пакет SIMULIA Aباqus с помощью пользовательской процедуры UMAT введено кинетическое уравнение, постулирующее степенной закон аккумуляции повреждений. Построены зоны активного накопления повреждений и проанализировано поведение полей у вершины трещины. Обнаружена степенная асимптотика полей напряжений и сплошности у вершины трещины (рис. 1). На рис. 1 показаны распределения поврежденности для следующих значений показателя ползучести $n = 3, 4, 5$.

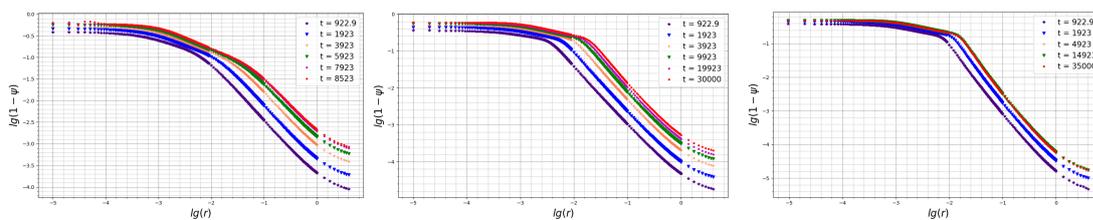


Рис.1. Распределения поврежденности на продолжении трещины в двойных логарифмических координатах для различных значений материальных постоянных

Из рис. 1 видно, что на графиках для различных времен имеется четко выраженный прямолинейный участок, отвечающий степенной зависимости повреждений от расстояния от кончика трещины [1], [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 21-11-00346).

ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплий Д. В., Степанова Л. В., Белова О. Н. *Параметрическое исследование полей, ассоциированных с вершиной трещины, в условиях ползучести с учетом процессов накопления поврежденности с использованием UMAT*. Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2023. Т. 27, № 3. С. 509–529.

2. Чаплий Д. В., Степанова Л. В., Белова О. Н. *Воздействие аккумуляции повреждений на асимптотическое поведение напряжений в окрестности вершины трещины*. Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2023. Т. 29, № 1. С. 47–63.

ГРУППОВОЙ И ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ БЮРГЕРСА — ХОПФА ДЛЯ ГАЗОДИСПЕРСНОЙ СРЕДЫ

О. П. Стояновская¹, Г. Д. Турова², Н. М. Юдина³

¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

²Челябинский государственный университет, Челябинск

³Новосибирский государственный университет

В работе исследована система нестационарных одномерных уравнений, представляющая собой параболическое уравнение Бюргерса для скорости вязкого газа и гиперболическое уравнение Хопфа для скорости твердых частиц. Уравнения Бюргерса и Хопфа связаны в систему за счет релаксационных слагаемых, моделирующих обмен импульсом между несущей фазой (газом) и дисперсной фазой (частицами). Интенсивность обмена импульсом обратно пропорциональна времени релаксации скорости частиц к скорости газа.

Построено дисперсионное соотношение для этой системы и частное решение, отвечающее затуханию малого возмущения покоя. Для бесконечно малого времени скоростной релаксации вычислена эффективная вязкость газопылевой среды, определяемая вязкостью газа и массовой долей частиц в смеси.

Найдена алгебра Ли симметрий данной системы. Выведены инвариантные подмодели относительно базисных операторов алгебры симметрий. Эти подмодели проинтегрированы явно, кроме одной, задающей стационарные движения. Для этой модели разработан код для численной генерации частных решений системы. Показано, что инвариантное решение, определяемое этой подмоделью, в предельном случае также позволяет получить эффективную вязкость газопылевой среды, которая совпадает со значением вязкости, определяемой из дисперсионного соотношения [2].

Исследование выполнено за счет средств РНФ грант 23-11-00142.

ЛИТЕРАТУРА

1. Stoyanovskaya O.P., Turova G.D., Yudina N.M. *Dispersion and Group Analysis of Dusty Burgers Equations*. LOBACHEVSKII JOURNAL OF MATHEMATICS. accepted.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МИКРО-ВЗРЫВНОГО РАСПАДА ДВУХЖИДКОСТНЫХ КАПЕЛЬ

П. А. Стрижак, Д. В. Антонов, Р. М. Федоренко

Национальный исследовательский Томский политехнический университет

Эффективность многих газопарокапельных технологий напрямую зависит от интенсивности испарения жидкости при взаимодействии с греющей газовой средой [1]. Интенсивность испарения, в свою очередь, определяется площадью контакта с греющим теплоносителем, т.е. максимальная интенсивность испарения соответствует минимальным размерам капель и максимальной площади поверхности испарения. Благодаря эффектам микро-взрывного распада при нагреве гетерогенных капель можно получить мелкодисперсный аэрозоль с размерами капель менее нескольких десятков микрон.

Для моделирования распада двухжидкостной капли предложены три подхода [1]. Первый основан на критерии перегрева границы раздела «вода/топливо» выше температуры начала взрывного кипения. Предполагалось, что сферическая капля воды представляет ядро и располагается по центру, а топливо – оболочку. Температурное распределение в двухжидкостной капле в пространстве и времени описывается уравнением энергии. Второй подход основывался на критерии микро-взрывного распада по критическому размеру (радиусу) пузыря в двухжидкостной капле. Модель основана на предположении, что в центре водяного ядра концентрируется паровой пузырь, а капля топлива представляет собой оболочку. В качестве третьего подхода использовалась модель тепломассопереноса до условий микро-взрывного распада по превышению давления в паровой пленке. При моделировании учитывался баланс сил, действующих на каплю в процессе нагрева со стороны силы поверхностного натяжения, силы давления паров воды и силы давления со стороны атмосферы. Критерием микро-взрывного распада являлось достижение условия превышения силы давления в паровой пленке по сравнению с силами поверхностного натяжения и давления атмосферы.

По результатам работы установлено, что два критерия (необходимых условия) микро-взрывного распада капель (превышение температуры начала взрывного кипения воды на границе раздела «вода/топливо»; достижение критического соотношения размеров капли после и до нагрева за счет роста пузыря) правомерно использовать при математическом моделировании.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-69-10006).

ЛИТЕРАТУРА

1. Volkov R. S., Strizhak P. A. *Motion of water droplets in the counter flow of high-temperature combustion products*. Heat Mass Transf. 2018. V. 54. P. 193-207.
2. Antonov D. V., Kuznetsov G. V., Strizhak P. A. *The micro-explosive fragmentation criteria of two-liquid droplets*. Int. J. Heat Mass Transf. 2022. V. 196. P. 123293.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКОВОГО УДАРА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МУЛЬТИПОЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ

В. Г. Судаков, А. С. Щеглов

Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н. Е. Жуковского, Жуковский

Проектирование гражданского сверхзвукового самолета требует оценки громкости звукового удара у поверхности земли, т.е. на большом расстоянии от самолета [1]. Для расчета характеристик звукового удара необходимо определять сигнатуры избыточного давления, генерируемые летательным аппаратом. Одним из наиболее часто употребляемых подходов является проведение численного моделирования в ближнем возмущенном поле в рамках уравнений Эйлера или Рейнольдса, а затем использование полученных распределений избыточного давления для моделирования распространения волны звукового удара в атмосфере на основе классической квазилинейной теории и подходов геометрической акустики [2] или с использованием дополненного уравнения Бюргерса. Для корректного расчета распространения звукового удара начальное распределение следует брать на таком удалении от обтекаемого тела, где азимутальные возмущения малы относительно продольных. Для реальных компоновок самолетов эти условия могут быть обычно удовлетворены на расстояниях больше пяти длин самолета. Чтобы уменьшить погрешность расчета и уменьшить расстояние, на котором необходимо определить начальное избыточное давление для задачи распространения звукового удара, можно применить метод мультипольного разложения [3]. В этом случае избыточное давление можно брать на более близких расстояниях от летательного аппарата, потом применить процедуру коррекции этой эпюры для учета поперечного течения, а затем скорректированные возмущения использовать для задачи распространения звукового удара до земли. В настоящей работе разработан метод расчета звукового удара от сверхзвукового пассажирского самолета (СПС) с использованием мультипольного разложения с численно-аналитическим прямым способом решения возникающих интегральных уравнений второго порядка точности. Метод не имеет расходимости даже на малых расстояниях от летательного аппарата ~ 0.25 его длины. Проведено сравнение интенсивности звукового удара для простого осесимметричного тела и компоновки крыло-фюзеляж с использованием мультипольного разложения и без него. Показано, что разработанный метод сходится к корректному решению и позволяет применять избыточное давление из ближнего поля с расстояния до 1 длины летательного аппарата для задачи распространения звукового удара до земли.

Публикация подготовлена в рамках реализации НЦМУ "Сверхзвук" (соглашение о предоставлении гранта от 17 мая 2022 г. № 075-15-2022-1023).

ЛИТЕРАТУРА

1. Чернышев С.К. *Звуковой удар*. М.: Наука, 2011.
2. Жилин Ю.Л. *О звуковом ударе*. Уч. зап. ЦАГИ. 1971. Т. 2. № 3. С. 1–11.
3. George A. *Reduction of sonic boom by azimuthal redistribution of overpressure*. AIAA J. 1969. V. 7. № 2. P. 291–297.

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ СЛОЖНОГО ТЕПЛООБМЕНА МЕЖПЛАНЕТНЫХ ЗОНДОВ

С. Т. Суржиков

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлунского РАН, Москва

При разработке компьютерных кодов, предназначенных для прогнозирования конвективного нагрева космических зондов, спускаемых в атмосферах планет с гиперзвуковой скоростью, часто используются лабораторные экспериментальные данные по ламинарному и турбулентному нагреву, полученные в работах [1, 2].

В работе [1] выполнено экспериментальное исследование обтекания затупленного конуса с углом полураствора 9° молекулярным азотом при числе Маха $M=10.6$ под разными углами атаки $\alpha = 0^\circ, 2.5^\circ, 5^\circ, 10^\circ$ и 15° . Получены данные по ламинарному и турбулентному конвективному нагреву.

В работе [2] представлены экспериментальные данные по конвективному нагреву поверхности модели марсианского спускаемого аппарата (СА) Mars Science Laboratory (MSL) в условиях ламинарного, переходного и турбулентного режимов течения при числах Маха 6, 8 и 10. Основная серия экспериментов выполнялась на гиперзвуковой аэродинамической трубе AEDC Tunnel 9 [2]. Условия испытаний были таковы, что обеспечивались режимы ламинарного, переходного и турбулентного обтекания. Числа Рейнольдса набегающего потока при $M=8$ изменялись в диапазоне $Re_\infty = 1.3 \cdot 10^7$ 1/м - $16 \cdot 10^7$ 1/м и при $M=10$: $Re_\infty = 0.39 \cdot 10^7$ 1/м - $62 \cdot 10^7$ 1/м. В этой же работе приведены результаты расчетной интерпретации экспериментальных данных с использованием модели параболизированных уравнений Навье-Стокса и алгебраических моделей турбулентности Себечи-Смита и Болдуина-Ломакса.

В работе [3] обсуждаются расчетные и, что принципиально важно, летные экспериментальные данные, свидетельствующие о наличии ламинарно-турбулентного перехода на лобовом аэродинамическом щите спускаемого марсианского аппарата MSL. Значительный интерес специалистов к этой проблеме возник в связи с тем, что аэродинамический щит СА MSL имел диаметр $D=4.5$ м, что значительно превосходил размеры аэродинамических щитов ранее реализованных космических миссий: Viking – $D=3.5$ м, Pathfinder, Mars Exploration Rover, Mars Phoenix – $D=2.5$ м. Анализ конкретных полетных условий MSL показал, что в данном случае может наблюдаться ламинарно-турбулентный переход на подветренной стороне лобового аэродинамического щита.

В настоящей работе алгебраические модели турбулентного смешения используются для замыкания усредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса с целью интерпретации экспериментальных данных [2, 3] по конвективному нагреву поверхности СА MSL. Помимо сравнительного анализа расчетных и экспериментальных данных обсуждается способ использования алгебраических моделей турбулентного смешения применительно к полным уравнениям Навье-Стокса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Widhopf G.F. *Turbulent heat transfer measurements on a blunt cone at angle of attack*. AIAA J. 1971. V. 8. №. 9 С. 1574-1580.
2. Hollis B.R., Collier A.S. *Turbulent Aeroheating Testing of Mars Science Laboratory Entry Vehicle in Perfect-Gas Nitrogen*. AIAA paper 2007-1208. 2007. 20 p.

3. Edquist K. T., Hollis B. R., Johnston C. O., Bose D., White T. R., Mahzari M. *Mars Science Laboratory Heat Shield Aerothermodynamics: Design and Reconstruction*. JSR. 2014. V. 51. № 4. С. 1106–1124.

ГИДРОУДАР

С. В. Сухинин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Термин гидравлический удар (гидроудар) впервые введен в работе Н.Е. Жуковского [1] в 1899 году. Под термином гидродар автор понимал волны в трубах для которых существенным является не только упругость жидкости но и упругость стенок канала. Необходимо отметить, что гидроупругие волны (гидравлический удар) могут быть как простыми так и разрывными (сильный разрыв, wave hummer). Доклад посвящен математическим вопросам связанным с описанием распространения нелинейных и разрывных волн в однородных каналах с упругими стенками заполненных невязкой сжимаемой жидкой средой движущейся с постоянной скоростью. Для удобства изложения далее эти волны будут называться гидроупругими волнами. В рамках длинноволнового приближения предложена система уравнений для описания этих волн. Показано, что эта система является квазилинейной и гиперболической. Описаны скорости распространения волн в каналах с упругими стенками. Показано, что скорость распространения гидроупругих волн меньше скорости распространения волн по сжимаемой жидкой среде, заполняющей канал с упругими стенками. Найдены инварианты Римана. Получены условия на сильных разрывах и описаны разрывные решения - аналог ударных волн в газе. Показано, что возможны разрывные решения с повышением и понижением давления за разрывом. Получено уравнение Риккати, описывающее распространение слабых разрывов гидроупругих волн по каналу. Уравнение Риккати позволяет описать возникновение градиентных катастроф гидроупругих волн. Проведены численно-аналитические исследования образования и распространения сильных разрывов с повышением и понижением давления за разрывом.

Описание и методы прогнозирования качественных особенностей распространения длинных волн в однородных каналах с упругими стенками имеют многочисленные приложения в технике и технологиях связанных с транспортировкой жидких сред и с методами неразрушающего контроля трубопроводных систем. Первые основополагающие исследования гидроупругих волн в трубопроводных системах были проведены Н.Е. Жуковским в конце 19 века, изложение результатов этих работ содержится в работе [2]. Нелинейные явления связаны, как правило, с укрупнением волн и образованием сильных разрывов, начало которых можно описать при помощи теории градиентных катастроф. В настоящей работе исследования влияния нелинейности и возникновения градиентных катастроф в каналах с упругими стенками проводится при помощи методов теории распространения слабых разрывов [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. *О гидравлическом ударе в водопроводных трубах* Бюллетень Политехнического общества». 1889. №. 5.

2. Жуковский Н. Е. *О гидравлическом ударе в водопроводных трубах*. М.-Л.: Гостехиздат. 1949. 104 с.
3. Овсянников Л. В. *Лекции по основам газовой динамики*. М.: Наука, 1981. 368 с.

ОБ ИЕРАРХИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ИНВАРИАНТНЫХ РЕШЕНИЙ

А. А. Талышев

Новосибирский государственный университет

Дифференциально-инвариантные решения являются обобщением инвариантных и частично инвариантных решений [1]. Каждое дифференциально-инвариантное решение характеризуется последовательностью размерностей орбит d_0, d_1, \dots этого решения в продолженных пространствах [2], [3], [4], где d_j — размерность орбиты решения в j -ом продолженном пространстве.

В работах [1] и [5] описан алгоритм построения оптимальной системы подалгебр. Оптимальная система подалгебр позволяет построить оптимальную систему инвариантных и частично инвариантных решений. Что упрощает задачу перечисления всех существенно различных инвариантных и частично инвариантных решений. Инвариантные и частично инвариантные решения относительно подобных подалгебр переводятся друг в друга преобразованиями группы.

В случае дифференциально-инвариантных решений ситуация несколько другая. Любое решение является дифференциально-инвариантным для любой подгруппы со своей последовательностью размерностей орбит d_0, d_1, \dots . И требование того, чтобы решение было одновременно дифференциально-инвариантным относительно нескольких подгрупп может приводить к более широкой «разрешающей» системе уравнений. Здесь обсуждается возможность использования этого факта для упрощения построения дифференциально-инвариантных решений. Например, в случае аналога «простых решений» [1], как показано в [2] это ничего не дает. «Простые решения» группы всегда являются «простыми решениями» любой подгруппы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений*. М.: Наука, 1978. 400 с.
2. Талышев А. А. *Об автоморфных системах конечномерных групп Ли*. Уфимский математический журнал. 2012. Т. 4, № 4. С. 130–138.
3. Talyshev A. A., *Automorphic Systems and Differential-Invariant Solutions*. Regularity and Stochasticity of Nonlinear Dynamical Systems, Nonlinear Systems and Complexity Springer International Publishing AG. 2018. P. 283–308.
4. Talyshev A. A., *Differential-Invariant Solutions*. Journal of Mathematical Sciences. 2018. 230, P. 167–174.
5. Овсянников Л. В. *Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика*. Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58, № 4. С. 30–55.

ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА РАСПЫЛА И ИСПАРЕНИЯ ЖИДКОГО УГЛЕВОДОРОДА В РЕАКТОРЕ ПО ПРОИЗВОДСТВУ ТЕХНИЧЕСКОГО УГЛЕРОДА

Д. Тарраф¹, С. Г. Черный²

¹Новосибирский государственный университет

²Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

Углеродная сажа производится из нефтесодержащего сырья нагреванием его примерно до 950 °С. При этом происходит его крекинг с образованием газа и порошковой углеродной сажи [1]. Наиболее сложным этапом процесса производства углерода является распыл жидкого углеводорода в потоке газа-теплоносителя. Необходимо, чтобы мелкость распыла сырья, равномерность распределения капель в потоке газа обеспечивали полное его испарение до начала пиролиза и оптимальную структуру технического углерода. А вероятность образования кокса (грита), загрязняющего продукт, была минимальной [2]. Сформулированные требования к процессу распыла и испарения сырья в потоке газа-теплоносителя могут быть выполнены только при возможности проведения трехмерного численного моделирования данного процесса. В работе строится такая модель на основе эйлерово-эйлерового VOF подхода [3]. Для VOF модели требуется достаточно подробная сетка для выделения границ между фазами. По этим границам-поверхностям определяется взаимодействие между двумя фазами. Из-за разномасштабности задачи (очень маленькие форсунки по сравнению со всей расчетной областью) использование равномерных сеток с мелкими элементами невозможно. Поэтому в работе используются динамически настраиваемые адаптивные сетки, локально измельчающиеся в областях больших градиентов рассчитываемых параметров. Создана методика численного моделирования трехмерных двухфазных (газ-теплоноситель и сырье) и трехфазных (газ-теплоноситель, сырье и продукты испарения сырья) течений в реакторе по производству технического углерода. Разработаны методы ускорения расчета, такие как сегментирование расчетной области и использование адаптивных сеток. Модели реализованы в ПК ANSYS [4]. Создан и реализован алгоритм формирования капель по распределению объемной доли сырья. Решена задача распада жидкой пленки с использованием VOF модели и адаптивной сетки. Алгоритм формирования капель был применен для расчета среднего диаметра Заутера. Получено хорошее совпадение с результатами других авторов [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гульмисарян Т. Г., Капустин В. М., Левенберг И. П. *Технический углерод: морфология, свойство, производство*. М.: Каучук и Резина, 2017. 586 с.
2. Орлов В. Ю., Комаров А. М., Ляпина Л. А. *Производство и использование технического углерода для резин*. Ярославль: Александр Рутман. 2002. 512 с.
3. Hirt C. W., Nichols B. D. *Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries*. Journal of Computational Physics, 1981. V.39 C. 201–226
4. Федорова Н. Н., Вальгер С. А., Захарова Ю. В. *Моделирование гидрогазодинамических процессов в ПК ANSYS 17.0*. Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2016. 168с.

5. Сипатов А. М., Карабасов С. А., Гомзиков Л. Ю., Абрамчук Т. В., Семаков Г. Н. *Моделирование процесса распыла с использованием адаптивных сеточных моделей*. Вычислительная механика сплошных сред. 2015. Т. 8. № 1. С 93-101.

ВЯЗКИЕ РЕШЕНИЯ АНИЗОТРОПНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А. С. Терсенов

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

В настоящем докладе мы рассмотрим следующее уравнение, имеющее большое количество приложений в механике:

$$u_t - \sum_{i=1}^n (|u_{x_i}|^{p_i(t,x)-2} u_{x_i})_{x_i} = \mathcal{B}(t, x, u, \nabla u) \quad \text{в } \Omega_T = (0, T) \times \Omega. \quad (1)$$

При изучении уравнений вида (1) используются методы вариационного исчисления, различные топологические, а также аппроксимационные методы. В силу вырожденности и даже сингулярности уравнений вида (1), решения краевых задач для него ищутся в классе слабых решений, в основном соболевских, понимаемых в интегральном смысле. Наиболее полное изложение результатов на сегодняшний день, дано в монографии [1].

Использование аппроксимационных методов, основанных на регуляризации, позволяющей доказать классическую разрешимость регуляризованной задачи, дает возможность получить решения максимальной гладкости, известной на сегодняшний день. Предельный переход по классическим решениям осуществляется с помощью метода монотонности Минти–Браудэра. Но этот подход реализуем в случае линейности $\mathcal{B}(t, x, u, \nabla u)$ по градиенту, поскольку иначе возникает непреодолимая проблема предельного перехода в нелинейных по градиенту членах.

Отметим, что в последние годы было получено много результатов о разрешимости краевых задач для (1) в классе вязких по Лионсу решений. Именно в этом классе слабых решений, которые, в отличие от соболевских, определяются поточечно, удалось решить проблему разрешимости в случае нелинейной по градиенту функции $\mathcal{B}(t, x, u, \nabla u)$. Преимущество указанного подхода заключается в том, что осуществление предельного перехода по вязким решениям, коими являются, в частности, и классические решения, возможно при более слабых априорных оценках на решения регуляризованной задачи.

Используя аппарат вязких решений, нам удалось доказать существование непрерывных по Лишцицу по пространственным переменным решений первой краевой задачи для уравнений вида (1) с переменными показателями анизотропности в случае, когда $\mathcal{B}(t, x, u, \nabla u)$ не удовлетворяет условию Бернштейна–Нагумо [2].

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0008).

ЛИТЕРАТУРА

1. Antontsev S., Shmarev S. *Evolution PDEs with Nonstandard Growth Conditions: Existence, Uniqueness, Localization, Blow-up, Atlantis Studies in Differential Equations*, V.4, Atlantis Press, Paris (2015).
2. Терсенов Ар. С. *О существовании вязких решений анизотропных параболических решений с переменными показателями анизотропности*. Сиб. журнал инд. мат. 2022. Т. 25. № 4. С. 24–31.

**ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ РАЗРЕШИМОСТИ
НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ РАВНОВЕСИЯ НЕПОЛОГИХ
ОБОЛОЧЕК ТИПА ТИМОШЕНКО С НЕЗАКРЕПЛЕННЫМИ
КРАЯМИ**

С. Н. Тимергалиев

Казанский государственный архитектурно-строительный университет

Рассматривается задача о равновесии упругой непологой изотропной неоднородной оболочки с незакрепленными краями в рамках сдвиговой модели Тимошенко, которая описывается системой из пяти дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка при статических граничных условиях. Дифференциальные уравнения и граничные условия линейны относительно углов поворота ψ_1, ψ_2 , нелинейны относительно тангенциальных перемещений w_1, w_2 и прогиба w_3 . Исследования ведутся в изометрических координатах. Предполагается, что гауссова и средняя кривизны срединной поверхности оболочки не равны нулю в области Ω , гомеоморфной срединной поверхности. Целью работы является вывод условий, при выполнении которых существует обобщенное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее граничным условиям.

Предложенный метод исследования задачи включает в себя три основных этапа. На первом этапе строятся интегральные представления для обобщенных перемещений, содержащие произвольные функции, в том числе, произвольные голоморфные функции. Эти представления составляют основу предложенного метода. На втором этапе произвольные функции находятся так, чтобы обобщенные перемещения удовлетворяли линейной системе уравнений и линейным граничным условиям, которые специальным образом выделяются из исходной нелинейной задачи. В результате нелинейная задача сводится к нелинейному операторному уравнению вида

$$a - L(a) - G(a) = a_* + \tilde{a}_F$$

относительно вектора $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2)$ обобщенных перемещений в соболевском пространстве $W_p^{(2)}(\Omega)$, $p > 2$, где L — линейный вполне непрерывный, G — нелинейный ограниченный операторы в $W_p^{(2)}(\Omega)$, $p > 2$, a_* и \tilde{a}_F — известные вектор-функции, зависящие соответственно от произвольных постоянных и внешних сил. Третий этап метода исследования посвящен исследованию разрешимости нелинейного операторного уравнения. При этом наиболее существенным моментом является

доказательство обратимости линейного оператора $I - L$, I – тождественный оператор. При помощи обратного оператора $(I - L)^{-1}$ предыдущее операторное уравнение преобразуется к эквивалентному виду

$$a - G_*(a) = a_F$$

с нелинейным ограниченным в $W_p^{(2)}(\Omega)$, $p > 2$ оператором G_* и с известной правой частью a_F , зависящей от внешних сил, разрешимость которого устанавливается с использованием принципа сжатых отображений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 23-21-00212).

ДИНАМИКА ЦЕРЕБРАЛЬНОЙ АНГИОАРХИТЕКТониКИ В НОРМЕ И ПРИ ПАТОЛОГИЯХ

Д. В. Тихвинский, Ю. О. Куянова, А. В. Бервицкий, Ю. А. Станкевич,
Д. С. Чутков, Д. В. Паршин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Заболевания сосудов головного мозга занимают лидирующие позиции в рейтинге ВОЗ учета наиболее опасных болезней [1]. Численное моделирование гемодинамики этих сосудов является на сегодняшний день одним из основных методов предоперационного моделирования [2]. Целью настоящей работы является определение морфологических и гемодинамических предикторов роста и/или образования малых церебральных аневризм, а также оценка влияния факторов стресса и адаптации к нему на ангиоархитектонику церебральных сосудов.

Для целей проведения исследования нами были проанализированы 2 выборки: пациентов ФНЦ (Новосибирск) с малыми церебральными аневризмами и молодых здоровых добровольцев без патологий развития церебральных сосудов. Первая группа подвергалась динамическому гемодинамическому мониторингу с использованием КТ-ангиографии. Вторая группа подвергалась психологическому тестированию, а также МР-ангиографии в различных по времени точках: в первой группа не испытывала воздействия заданного стрессового фактора, а во второй напротив испытывала воздействие стрессового фактора. Анкетирование добровольцев проводилось по методике оценки общего уровня стресса и его источников, уровня тревоги, депрессии и типа саморегуляции по контролю за действиями [5].

На данный момент выполнен первый этап исследования. Ожидается, что по результатам второго диагностического раунда и сопоставления данных анкетирования, реконструкции сосудов Вилизиева круга, а также показателей МР диффузии будут обнаружены различия между подгруппой добровольцев, не имеющих адаптации к стрессовому фактору, а также подгруппой добровольцев имеющих подобную адаптацию

Работа выполнена при поддержке РНФ, проект 20-71-10034.

ЛИТЕРАТУРА

1. *The top 10 causes of death. World Health Organization* <https://www.who.int/news-room/fact-sheets/detail/the-top-10-causes-of-death>

2. Tikhvinsky D. et. al. *Numerical Assessment of the Risk of Abnormal Endothelialization for Diverter De-vices: Clinical Data Driven Numerical Study.*, J. Pers. Med. 2022, V.12, С.652.
3. Шапкин С. А. *Экспериментальное изучение волевых процессов.* М. 1997. 140 с.

ЛИНЕЙНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СОСТОЯНИЯ ПОКОЯ ДЛЯ МГД ТЕЧЕНИЙ ПОЛИМЕРНОЙ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КАНАЛЕ (МОДЕЛЬ ВИНОГРАДОВА-ПОКРОВСКОГО)

Д. Л. Ткачев, Э. А. Бибердорф

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Изучается линейная устойчивость состояния покоя для течений несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости в бесконечном цилиндрическом канале в классе осесимметрических возмущений. В качестве математической модели используется структурно-феноменологическая модель Виноградова–Покровского [1, 2].

Сформулированы два уравнения, определяющие спектр задачи. Проведенные вычислительные эксперименты показывают, что с ростом частоты возмущений вдоль оси канала у первого спектрального уравнения для радиальной компоненты скорости появляются собственные значения с положительной реальной частью, что гарантирует линейную неустойчивость по Ляпунову состояния покоя [3].

Работа первого автора выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2022-281.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pokrovskii V. N., *The mesoscopic theory of polymer dynamics*, Springer Ser. Chem. Phys., 95, Springer, Dordrecht (2010).
2. Altukhov Yu. A., Gusev A. S., Pishnograï G. V., *Introduction into mesoscopic theory of flowing polymeric systems*, Alt. GPA, Barnaul (2012).
3. Tkachev D. L. and Biberdorf E. A., *Spectrum of a problem about the flow of a polymeric viscoelastic fluid in a cylindrical channel (Vinogradov-Pokrovski model)*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **20**(2), 1269–1289 (2023).

РАСSEЯНИЕ ВОЛН КРОМКОЙ ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА ПРИ НАЛИЧИИ СДВИГОВОГО ТЕЧЕНИЯ

Л. А. Ткачева

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Исследуется дифракция плоских поверхностных и изгибно-гравитационных волн на кромке плавающей упругой полубесконечной пластины при нормальном набегаии в жидкости конечной глубины при наличии течения со сдвигом скорости. Жидкость предполагается идеальной несжимаемой, конечной глубины. Течение ее

не потенциально, с линейным сдвигом скорости. Полубесконечный ледяной покров моделируется тонкой пластиной постоянной толщины. Решается двумерная задача в линейной постановке. В настоящее время задача дифракции волн на ледяном покрове изучена достаточно хорошо в условиях отсутствия течения. Однако в реальности существуют течения в морях и океане, где скорость жидкости меняется с глубиной как по величине, так и по направлению. Поэтому необходимы дальнейшие исследования в этом направлении.

Эта задача ранее решалась в работе [1] методом Винера - Хопфа, но решение не было закончено, не было проведено расчетов. В докладе приводится решение этой задачи также методом Винера - Хопфа, но другим способом. Особенностью данной задачи является высокий порядок производной в одном из краевых условий — пятый для уравнения Лапласа. Это приводит к тому, что решение зависит от констант, которые должны определяться из условий в кромке. Система уравнений для определения констант имеет сложный вид. Если отбросить малый несущественный член в уравнениях, который характеризует отношение инерции пластины к инерции воды, то эту систему удастся точно разрешить. Получены простые формулы для амплитуд отраженной и проходящей волн, коэффициентов отражения и прохождения и энергетические соотношения для них для двух случаев: падения гравитационных волн с моря и изгибно-гравитационных волн с ледяного покрова. Приводятся результаты численных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марченко А. В., Прохоров И. В., *О линейных волнах в потоке жидкости с постоянной завихренностью, находящейся под ледяным покровом* ПММ. 1991. Т. 55. № 2. С. 242-249.

О КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ В АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАЗМЕ

Ю. Л. Трахинин

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Уравнения Чу, Голдбергера и Лоу (ЧГЛ) [2] являются простейшей моделью механики сплошной среды, описывающей течение бесстолкновительной плазмы в магнитном поле. В этой модели тензор давления является анизотропным: $p = p_{\perp} I + \tau H \otimes H$, где p_{\parallel} и p_{\perp} — параллельное и перпендикулярные давления соответственно, I — единичная матрица, H — магнитное поле и $\tau = (p_{\parallel} - p_{\perp})/|H|^2$. Уравнения ЧГЛ течения анизотропной плазмы могут быть записаны в виде системы девяти законов сохранения. Их гоудоновская симметризация была найдена в [1]. Она гарантирует локальную корректность задачи Коши при выполнении соответствующих условий гиперболичности. Эта симметризация является к сожалению чрезвычайно громоздкой, что делает технически почти невозможным ее применение для начально-краевых задач.

Нашей целью является исследование локальной корректности задачи со свободной границей, которая разделяет анизотропную плазму и вакуум. Магнитное поле h в вакууме подчиняется системе предмаксвелловской динамики $\operatorname{div} h = 0$, $\nabla \times h = 0$.

Магнитные поля H и h на свободной границе $\Gamma(t)$ ей параллельны. Кроме того, имеет место сохранение полного давления на границе: $p_{\perp} + \frac{1}{2}|H|^2 = \frac{1}{2}|h|^2$ на Γ . Рассматриваемая задача является нелинейной гиперболично-эллиптической задачей со свободной границей, являющейся характеристикой гиперболической системы. Указанная выше трудность, связанная с громоздкостью найденной в [1] симметризации, преодолевается с помощью элементарной симметризации [4] линеаризованной системы ЧГЛ, использование которой приводит к линейной задаче, аналогичной линеаризованной задаче со свободной границей плазма — вакуум в классической МГД [3]. Это позволяет доказать теорему [4] о локальном существовании и единственности решений нелинейной задачи со свободной границей при том же условии неколлинеарности магнитных полей $H|_{\Gamma}$ и $h|_{\Gamma}$ на начальной границе, что и в изотропной МГД [3].

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2022-281.

ЛИТЕРАТУРА

1. Блохин А.М., Крымских Д.А. Симметризация уравнений магнитной гидродинамики с анизотропным давлением. *Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными*. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР. 1990, С. 3–19.
2. Chew G.F., Goldberger M.L., Low F.E. The Boltzmann equation and the one-fluid hydromagnetic equations in the absence of particle collisions. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*. 1956. V. 236(1204), P. 112–118.
3. Secchi P., Trakhinin Y. Well-posedness of the plasma-vacuum interface problem. *Nonlinearity*. 2014. V. 27. P. 105–169.
4. Trakhinin Y. Well-posedness for moving interfaces in anisotropic plasmas. *Z. Angew. Math. Phys.* 2023. V. 74, 142 (12 pp.).

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИКИ СТЕНКИ АНЕВРИЗМЫ АОРТЫ С ТРОМБОМ ПРИ ПОМОЩИ УЛЬТРАЗВУКОВОГО ИЗМЕРЕНИЯ ДЕФОРМАЦИЙ

А. Д. Тупицына¹, А. И. Липовка¹, Д. В. Паршин¹, М. С. Маус², А. А. Карпенко²

¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

²Национальный медицинский исследовательский центр имени академика Е.Н. Мешалкина

Аневризма брюшной аорты является широко распространенным и опасным заболеванием сердечно-сосудистой системы. Оценка риска её разрыва является важнейшей задачей современной медицины. Очевидно, что разрыв стенки сосуда неразрывно связан с её механическими свойствами, изучение которых может быть произведено различными методами. Исследование механических свойств сосуда *in vivo* часто может быть выполнено лишь в ограниченном объеме, однако предоставляет наиболее точные данные, так как сосуд находится и деформируется в естественной среде.

Одним из способов оценить деформацию стенки аневризмы является методика speckle-tracking [1], осуществляемая при помощи ультразвукового исследования. Специальное программное обеспечение фиксирует перемещение отдельных точек, захватываемых на стенке сосуда, и отслеживает их перемещение по время сердечного цикла. На основе этих данных строятся кривые время-деформация для отдельных секторов окружности сосуда, а также глобальной деформации стенки.

Аневризма аорты в большинстве случаев сопровождается тромбированием аневризматического мешка, что, безусловно, влияет на движение и свойства стенки. В этой работе были получены данные о деформации как стенки аневризмы (внешняя), так и внутреннего просвета (внутренняя), образованного тромбом. Была изучена связь между внутренней и внешней деформацией, особенности поведения отдельных секторов, изучена взаимосвязь между процентом тромбирования аневризмы, её диаметром и механическими показателями. Выполнено сравнение деформаций полученных на УЗИ с данными механического одноосного эксперимента.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (код проекта 20-71-10034-П).

ЛИТЕРАТУРА

1. Geyer H. et al. *Assessment of myocardial mechanics using speckle tracking echocardiography: fundamentals and clinical applications*. Journal of the American Society of Echocardiography. 2010. Т. 23. № 4. С. 351–369.

СИНХРОНИЗАЦИЯ ТЕРМОКОНЦЕНТРАЦИОННЫХ КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ В СМЕЖНЫХ ЯЧЕЙКАХ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

И. В. Тюлькина¹, Д. С. Голдобин^{1,2}

¹Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

²Пермский государственный национальный исследовательский университет

В данной работе строится фазовое описание колебательной термоконтрационной конвекции с учетом эффекта Соре в смежных прямоугольных ячейках пористой среды, подогреваемых снизу при наличии поля тяжести. Горизонтальные границы ячеек полагаются непроницаемыми (в том числе для примеси), тепловой поток через них — фиксированным. Вертикальные границы имеют малую теплопроводность. Уравнения для тепловой конвекции записываются в приближении Дарси–Буссинеска [1] и учитывают эффект Соре. Теплообмен между ячейками описывается с помощью слагаемого, формально соответствующего распределенному источнику тепла. Связь между ячейками происходит через поле температуры. Используя метод многих масштабов, можно получить уравнения для длинноволновой конвекции. Поскольку аналитическое описание системы, в рамках слабонелинейного анализа, можно построить только вблизи границы конвективной неустойчивости, а вопрос о коллективных эффектах актуален для колебательных режимов, в работе рассматривается исключительно случай колебательной неустойчивости. Выводятся уравнения для динамики амплитуд колебательных мод со связью и из них получаются уравнения для фаз колебаний [2], которые являются ключевыми уравнениями фазового

описания. Для этих уравнений найдены значения параметров, при которых в системе существует режим синхронизации течений, в частности, режим устойчивого синхронного состояния [3].

Хотя фазовое описание применялось к многочисленным проблемам в разных областях науки [4], его применение в области гидродинамики было ограничено, особенно в отношении синхронизации. Это связано с тем, что большинство гидродинамических задач — это распределенные системы, для которых полное математическое описание чрезвычайно трудоемко. Изучение синхронизации в гидродинамических системах может дать важные знания об управлении тепло- и массопереносом.

Работа выполнена в рамках бюджетной темы № 1023041300072-3-2.3.2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bird R. B., Stewart W. E., Lightfoot E. N. *Transport Phenomena*. Wiley, 2007.
2. Winfree T. *Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators*. Journal of Theoretical Biology. 1967. V. 16. Iss. 1. P. 15–42.
3. Тюлькина И. В., Голдобин Д. С. *Синхронизация конвективных течений двухкомпонентной жидкости в смежных ячейках пористой среды*. Вестник Пермского университета. Физика. 2023. № 2. С. 59–68.
4. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. *Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление*. М: Техносфера, 2003.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОБРАЗОВАНИЯ ВТОРИЧНЫХ ФРАГМЕНТОВ ПРИ МИКРО-ВЗРЫВНОМ РАСПАДЕ

Р. М. Федоренко, Д. В. Антонов, П. А. Стрижак

Национальный исследовательский Томский политехнический университет

Вторичное измельчение многокомпонентных капель жидкостей считается одним из наиболее актуальных направлений развития топливных технологий. Среди известных способов вторичного измельчения микро-взрывной распад считается наиболее продуктивным вследствие существенно большего роста площади поверхности жидкости в единицу времени [1]. Большинство существующих моделей микро-взрывного распада позволяют с высокой степенью точности прогнозировать время задержки микро-взрывного распада, но в то же самое время не дают представлений о количестве и средних размерах вторичных фрагментов, по причине отсутствия адекватных экспериментальных сведений и сложностей вычислений. В настоящей работе разработана математическая модель образования вторичных фрагментов при микро-взрывном распаде двухжидкостных капель.

Для моделирования распада двухжидкостной капли применялся метод VOF [2]. При моделировании распада двухжидкостной капли предполагалось, что вода внутри капли достигла состояния перегрева, т.е. условий микро-взрывного распада [3], в результате чего вблизи границы «вода/топливо» образовалась паровая прослойка. Увеличение размеров капли происходило за счет постоянного притока паров с границы «вода/топливо», давление паров задавалось в качестве постоянной величины.

По результатам работы была разработана математическая модель для прогнозирования последствий микро-взрывного распада двухжидкостных капель. При сравнении с экспериментальными данными модель демонстрирует хорошее соответствие. Настоящая модель может быть использована для создания новых комплексных подходов к моделированию микро-взрывного распада, позволяющих прогнозировать не только время задержки распада, но также его последствия в виде характеристик вторичных фрагментов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-69-10006).

ЛИТЕРАТУРА

1. Antonov D.V., Fedorenko R.M., Strizhak P.A. *Child droplets produced by micro-explosion and puffing of two-component droplets*. Appl. Therm. Eng. 2020. V.164. P.114501.
2. Hirt C.W., Nichols B.D. *Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries*. J. Comp. Phys. 1981. V.39. P.201-225.
3. Fedorenko R.M., Antonov D.V., Strizhak P.A., Sazhin S.S. *Time evolution of composite fuel/water droplet radii before the start of puffing/micro-explosion*. Int. J. Heat Mass Transf. 2022. V.191. P.122838.

МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОНЦЕНТРАЦИИ КОМПОНЕНТ В ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ РАСХОДОМЕТРИИ

Г. Ю. Филяков¹, К. В. Рымаренко¹, С. В. Сухинин²

¹Научно-производственная компания «СИАНТ», Новосибирск

²Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Контроль расхода газа, жидкости и газожидкостных смесей одна из главнейших задач в нефтегазодобывающей отрасли. Выбор конкретного устройства чаще всего происходит на основе сложившейся практики применения в конкретной компании. Широко используются накладные и стационарные расходомеры различного типа, включая ультразвуковые и сужающие устройства для замеров газлифтного газа в условиях нефтегазоконденсатного месторождения [1].

Определение концентрации компонент в многофазном потоке является трудной или не решаемой проблемой, особенно для малых концентраций одной из компонент гетерогенной среды. В настоящей работе описаны акустический и гидродинамический методы определения концентрации компонент в двухкомпонентной (двухфазной) сплошной среде. Кроме чисто научного интереса эти методы могут быть использованы для расходомерии компонент при добычи газового конденсата [2].

Акустический метод определения концентрации компонент основан на описании механики гетерогенной сплошной среды при помощи фононных кристаллов. Для малых концентраций одной из компонент (жидкой или газообразной) этот подход позволяет определить концентрацию компонент с высокой точностью при помощи измерения скорости звука для длинных акустических волн [3, 4].

Гидрогазодинамический метод определения концентрации компонент. Гипотезы: массовый расход в вертикальной скважине постоянен в каждом сечении, для всех координат; движение установившееся; поток изотермический (сохранение энергии); газовая компонента имеет малую объемную концентрацию, все термодинамические и механические параметры компонент известны. В этом случае концентрация компонент определяется при помощи контрольных измерений давления в потоке на разной глубине.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рымаренко К., Нухаев М. *Применение расходомеров различного типа для газлифтного газа в условиях Оренбургского нефтегазоконденсатного месторождения*. SPE-196824-RU.
2. Зозуля А. В., Баранов В. Е., Милецкий М. А., Рымаренко К. В. *Внедрение технологии инструментализованной виртуальной многофазной расходомерии на скважинах Восточно-Макаровского газоконденсатного месторождения*. SPE-202001-RU
3. Сухинин С. В. *Метод акустического зондирования неоднородной двухкомпонентной среды*. Динамика сплошной среды. 2010. Выпуск. 126. С. 142–145.
4. Saimanova Z., Sukhinin S., Zhumadillayeva A. *Acoustic method of quality control of two-component composite materials*. Appl. Sci. 2021, 11, 11594.

РАСТЕКАНИЕ СЛОЯ НА ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛОСКОСТИ В ВОДНОМ РАСТВОРЕ ПОЛИМЕРА

О. А. Фроловская

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Рассматривается вращательно-симметричное течение водного раствора полимера в слое, ограниченном снизу твердой стенкой, а сверху свободной поверхностью. В начальный момент времени покоящаяся жидкость заполняет слой $0 < z < s_0$, ограниченный твердой плоскостью $z = 0$ и свободной границей $z = s_0$. Далее плоскость $z = 0$ начинает вращаться вокруг оси z с заданной угловой скоростью $\Omega(t)$, увлекая за собой жидкость. При этом граница слоя $z = s(t)$ является свободной поверхностью. На твердой стенке выполняются условия прилипания, на свободной границе искомые функции удовлетворяют кинематическому и динамическому условиям.

В данной работе задача о растекании слоя на вращающейся плоскости изучается для модели жидкости второго порядка [1], которая используется для описания движения водных растворов полимеров. По сравнению с классической моделью Навье–Стокса исследуемая модель содержит дополнительный параметр — коэффициент релаксационной вязкости. Еще одно отличие данной задачи от аналогичной для ньютоновской жидкости [2] состоит в том, что здесь давление является квадратичной функцией радиальной переменной.

В рассматриваемой задаче свободная граница является плоской, и заранее ее положение неизвестно. С помощью лагранжевых координат эта задача сводится к задаче в фиксированной области. Изучено влияние релаксационной вязкости на изменение толщины слоя жидкости со временем для различных режимов вращения

плоскости. Показано, что толщина слоя монотонно зависит от коэффициента релаксационной вязкости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 24-21-00213).

ЛИТЕРАТУРА

1. Rivlin R. S., Ericksen J. L. Stress-deformation relation for isotropic materials // Arch. Rational Mech. Anal. 1955. Vol. 4. P. 323–425.
2. Лаврентьева О. М., Волкова Г. Б. Предельные режимы растекания слоя на вращающейся плоскости // Динамика сплошной среды. 1996. Вып. 111. С. 125–137.

О РАВНОВЕСИИ ГИПЕРУПРУГОГО ТЕЛА С ЖЕСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ И ТРЕЩИНОЙ С ОДНОСТОРОННИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

А. И. Фурцев

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет*

Рассматривается деформируемое тело, содержащее жесткое включение с трещиной на части границы включения. Предполагается, что тело гиперупругое, оно может испытывать большие деформации, поэтому описывается в рамках нелинейной теории. Отличительной особенностью работы является условие, которое не позволяет противоположным берегам трещины проникать друг в друга. Указанное условие непроникания по своей природе является односторонним ограничением на заранее неизвестные положения точек включения и окружающей его гиперупругой среды. Обсуждается краевая задача, соответствующая задаче равновесия описанного тела. Основным объектом нашего исследования является задача минимизации энергии, представляющая слабую постановку краевой задачи. С помощью вариационных методов показано, что данная задача имеет решение.

ВОЗНИКНОВЕНИЕ КОНЦЕНТРАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ В ДЛИННОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ ПРИ МОДУЛЯЦИИ ВНЕШНЕГО ФИЛЬТРАЦИОННОГО ПОТОКА

М. Р. Хабин¹, Б. С. Марышев^{1,2}

¹*Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь*

²*Пермский государственный университет*

Исследуется возникновение концентрационной конвекции в вытянутой прямоугольной области высотой H и длиной L заполненной пористой средой при модуляции внешнего горизонтального потока. Фильтрационный поток сквозь область обусловлен наличием перепада давления между вертикальными границами, который зависит от времени по заданному гармоническому закону. Между вертикальными границами задается потоянный перепад концентрации. Горизонтальные границы области предполагаются непроницаемыми для несущейжидкости и примеси.

Для описания течения смеси используется ММ (mobile/immobile media) подход [1], основная идея которого заключается в разделении примеси на мобильную и немобильную компоненты. В рамках ММ подхода движение модальной компоненты описывается уравнением адвекции-диффузии, которое должно быть дополнено кинетическим уравнением. Последнее позволяет описать переход примеси между компонентами. В используемой модели рассматривается нелинейное кинетическое уравнение, которое учитывает наличие предельного значения концентрации примеси в немобильной компоненте, которую способна удержать твердая матрица среды [2]. Фильтрационное течение моделируется в приближении Дарси-Буссинеска [3], что позволяет учесть влияние гравитации на течение неоднородного по плотности флюида. Пористость среды меняется линейным образом уменьшаясь с ростом концентрации немобильной компоненты. Влияние изменения пористости среды на проницаемость среды моделируется с помощью соотношения Козени-Кармана, жидкость считается не сжимаемой.

Задача решена методом многих масштабов [4]. Уравнения описывающие динамику в первом порядке малости по числу Релея-Дарси удается свести к одномерной задаче. К сожалению она не может быть решена аналитически, в связи с чем решается численно методом конечных разностей. В результате решения, получены поля концентрации и давления для различных значений параметров задачи с учетом модуляции параметра, описывающего интенсивность фильтрации в горизонтальном направлении.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (номер проекта 20-11-20125).

ЛИТЕРАТУРА

1. Deans H. A. *A mathematical model for dispersion in the direction of flow in porous media*. SoPEJ. 1963. Т. 3. № 1. С.49–52.
2. Selim H. M. *Prediction of contaminant retention and transport in soils using kinetic multireaction models*. ЕНР. 1989. Т. 83. С.69–75.
3. Nield D. A. Bejan A. *Convection in porous media*. Springer, 2017.
4. Найфэ А. *Введение в методы возмущений*. М.: Наука, 1984.

ГРУППОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ РЕЛАКСИРУЮЩИХ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ СРЕД

С. В. Хабиров

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Обобщение классической газовой динамики дает уравнение состояния, зависящее от времени (релаксация) в силу реологии или в результате энергетического усреднения физико-химических процессов в элементарном объеме многофазной среды. Дифференциальные уравнения движения можно записать в виде системы

$$DV = V\nabla \cdot \vec{u}, D\vec{u} = V(e_{VV}\nabla V + e_{VS}\nabla S), e_S DS + e_t = 0,$$

где ε — удельная внутренняя энергия, $\varepsilon = \varepsilon(V, S, t)$ — уравнение состояния, V — удельный объем, S — энтропия, \vec{u} — скорость частицы, $D = \partial_t + \vec{u} \cdot \nabla$, $\nabla = \partial_{\vec{x}}$.

Групповая классификация по уравнению состояния начинается с вычисления преобразований эквивалентности, не меняющих вид системы, но изменяющих функцию e .

Для функции e общего вида алгебра Ли преобразований эквивалентности задается базисом операторов

$$\{X_i, i = 1, 2, 3\} = \partial_{\vec{x}}, \{X_{3+i}\} = t\partial_{\vec{x}} + \partial_{\vec{u}}, \{X_{6+i}\} = \vec{x} \times \partial_{\vec{x}} + \vec{u} \times \partial_{\vec{u}}, X_{10} = \partial_t,$$

$$X_{11} = t\partial_t + \vec{x} \cdot \partial_{\vec{x}}, X_{12} = \vec{x} \cdot \partial_{\vec{x}} + \vec{u} \cdot \partial_{\vec{u}} + 2e\partial_e, X_{13} = V\partial_V, X_{14} = V\partial_e,$$

$$X_{15} = \partial_e, \langle \eta(t, S) \rangle = \eta(t, S)\partial_S, \eta — произвольная функция.$$

Для специальных функций e появляются операторы проективных преобразований. Полная групповая классификация проведена в работах [1, 2, 3, 4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Хабилов С. В. *Групповая классификация газодинамических релаксирующих сред по преобразованиям эквивалентности*. СМЖ. 2023. Т. 64. № 4. С. 936–954.
2. Хабилов С. В. *К групповой классификации идеальных газодинамических релаксирующих сред*. Труды ИММ УрО РАН. 2023. Т. 29. № 2. С. 260–270.
3. Хабилов С. В. *К групповой классификации релаксирующей газовой динамики методом оптимальной системы подалгебр*. СМЖ. (в печати)
4. Хабилов С. В. *Методы групповой классификации релаксирующей газовой динамики*. ПММ. (в печати)

МНОГОФАЗНОЕ УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ВИСМУТА В ШИРОКОМ ДИАПАЗОНЕ ПЛОТНОСТЕЙ И ТЕМПЕРАТУР

К. В. Хищенко

*Объединенный институт высоких температур РАН, Москва
Московский физико-технический институт, Долгопрудный
Южно-Уральский государственный университет, Челябинск*

Решение задач математического моделирования нестационарных процессов в материалах при интенсивных импульсных воздействиях для замыкания системы уравнений движения требует знание уравнения состояния среды во всей области реализуемых термодинамических параметров [1]. В процессах высокоскоростного соударения тел, взаимодействия интенсивного лазерного излучения с твердотельными мишенями, электрического взрыва проводников при нагреве мощным импульсом тока состояние вещества меняется в широких пределах по давлению (P), удельному объему ($V = 1/\rho$, где ρ — плотность) и температуре (T). При этом вещество может претерпевать фазовые превращения (например, плавление и испарение). Уравнение состояния материала, который может быть в различных фазах (твердой, жидкой, газообразной), представляет интерес для решения задач моделирования таких процессов методами механики сплошных сред.

В этой работе представлено уравнение состояния для висмута с учетом плавления и испарения при высоких давлениях и температурах. В предложенной модели термодинамики металла свободная энергия записывается в виде суммы трех слагаемых, соответствующих энергии при нулевой температуре (F_c) и тепловому вкладу атомов (F_a) и электронов (F_e):

$$F(V, T) = F_c(V) + F_a(V, T) + F_e(V, T). \quad (1)$$

Слагаемые уравнения (1) записываются по-разному для разных фаз [2].

Для иллюстрации качества полученного многофазного уравнения висмута проведено сравнение результатов расчета термодинамических характеристик этого металла на изобарах, изотермах, изоэнтропах и ударных адиабатах с имеющимися данными экспериментов при высоких плотностях энергии.

Построенное уравнение состояния висмута может быть использовано для решения задач механики сплошных сред в широком диапазоне удельных объемов и температур.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. *Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений*. М.: Наука, 1966.
2. Бушман А. В., Канель Г. И., Ни А. Л., Фортов В. Е. *Теплофизика и динамика интенсивных импульсных воздействий*. Черноголовка: ОИХФ АН СССР, 1988.

О РАВНОВЕСИИ ДВУХ УПРУГИХ ПЛАСТИН С ТОНКОЙ ПЕРЕМЫЧКОЙ

А. М. Хлуднев

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Исследуется краевая задача о равновесии двух упругих пластин, соединенных тонкой упругой перемычкой в случае граничных условий Неймана на внешней границе одной из пластин. Перемычка описывается в рамках модели тонкой упругой балки Бернулли-Эйлера. Рассматриваемые условия на внешних границах пластин соответствуют некоэрцитивной краевой задаче. Доказано существование решений рассматриваемой задачи при подходящих условиях на внешние нагрузки. Дано обоснование предельных переходов по параметру жесткости тонкой перемычки при стремлении параметра жесткости к нулю и к бесконечности. Проведено исследование предельных моделей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Khludnev A. M. *Asymptotics of solutions for two elastic plates with thin junction*. SEMR. 2022. V. 34. N 2. P. 484–501.
2. Khludnev A. M. *On the crossing bridge between two Kirchhoff-Love plates*. Axioms. 2023. 12(2). 120.

3. Khludnev A. M. *Asymptotic analysis of thin elastic junction between two elastic bodies*. *Applicable Analysis*. 2023. V. 102, N 3, P. 800-814.

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ СООТНОШЕНИЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ С ПОВЕРХНОСТЬЮ НАГРУЖЕНИЯ ХОСФОРДА

А. Д. Худякова, И. М. Курышев, Д. В. Сапронов

*Центральный институт авиационного моторостроения им. П. И. Баранова,
Москва*

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

Известно, что поверхность текучести многих металлических изотропных сплавов располагается между поверхностями, задаваемыми условиями Мизеса и Треска. Исследователями предложен ряд уравнений, позволяющих задавать такие поверхности, например, условие Хосфорда [1]:

$$\left(\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^a + (\sigma_2 - \sigma_3)^a + (\sigma_1 - \sigma_3)^a}{2} \right)^{1/a} = \sigma_y$$

где σ_1 , σ_2 и σ_3 – главные напряжения; σ_y – предел текучести при одноосном нагружении; a – параметр Хосфорда ($a = 2$ или $a = 4$ – условие Мизеса, $a = 1$ или $a = \infty$ – условие Треска).

В работах [2, 3] проведено сравнение результатов моделирования в MSC.Marc разгонных испытаний дисков с поверхностью нагружения Хосфорда для различных значений параметра a с результатами испытаний. Наилучшее соответствие результатам испытаний диска из жаропрочного деформируемого сплава показал расчет при $a = 6$, а из титанового сплава ВИТ-6 – при $a = 80$. Возможность выбора поверхности нагружения Хосфорда отсутствует в основных CAE-пакетах, используемых для моделирования разгонных испытаний в отрасли.

Доклад посвящен описанию алгоритма численной реализации соотношений модели пластического течения с поверхностью нагружения Хосфорда при изотропном упрочнении. Частные производные от функции поверхности нагружения выражены аналитически при помощи инвариантного представления через второй инвариант девиатора напряжений и угол вида напряженного состояния. Расчет организован по методу упругий предиктор/пластический корректор по неявной схеме с возвратом на поверхность нагружения. В доклад включены результаты расчетов с использованием описанного алгоритма.

С учетом актуальности импортозамещения результаты работы могут быть полезны разработчикам отечественных CAE-пакетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hosford W.F. *A generalized isotropic yield criterion*. *Journal of Applied Mechanics*. 1972. V. 39. №2. P. 607–609.
2. Кузьмин Е. П., Серветник А. Н. *Исследование поверхности нагружения материалов дисков газотурбинных двигателей при разгонных испытаниях модельных дисков*. Наука и образование. Сер.: научное издание. 2014. № 5. С. 330–339.

3. Серветник А. Н., Шадрин Д. В., Яковлев М. Г., Белоусов В. В., Кожуховский Я. А. *Несущая способность диска из деформируемого интерметаллидного титанового ортосплава ВИТ-6*. Титановые сплавы. 2021. № 2. С. 82–89.

РЕКОНСТРУКЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОНИЦАЕМОСТИ МЕЛКОСОСУДИСТЫХ ЦЕРЕБРАЛЬНЫХ ПАТОЛОГИЙ НА ОСНОВЕ ИНТРАОПЕРАЦИОННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

А. А. Черевко¹, Т. С. Шарифуллина¹, А. В. Горбатов²

¹*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск*

²*Национальный медицинский исследовательский центр имени академика
Е. Н. Мешалкина, Новосибирск*

Церебральная артериовенозная мальформация (АВМ) является патологией развития сосудов головного мозга, при которой артериальное и венозное кровеносные русла соединены клубком беспорядочно переплетенных выродившихся сосудов. Это опасное заболевание, влияющее на функционирование головного мозга, при котором велик риск внутримозгового кровоизлияния. Одним из методов лечения артериовенозной мальформации является эмболизация, представляющая собой внутрисосудистое заполнение клубка сосудов АВМ с помощью специального жидкого загустевающего вещества (эмболического агента) с целью блокирования кровотока через них. Данный способ хирургического вмешательства широко применяется, но до сих пор в некоторых случаях сопровождается периоперационным разрывом сосудов мальформации. В работе математическое моделирование процесса эмболизации рассматривается с точки зрения безопасности и эффективности процедуры [1].

Одним из параметров, характеризующих патологию является ее проницаемость, которая важна для изучения процесса эмболизации. Для реконструкции характеристик проницаемости патологий использованы данные, полученные при эмболизации АВМ (13 пациентов с общим количеством измерений 54). На основе анализа данных предложено разделение патологий на два класса по фильтрационным характеристикам, которое было подтверждено с помощью двух независимых подходов: экспертной оценки и корреляционного анализа. Аналитические аппроксимации относительной фазовой проницаемости для этих классов были получены с помощью обобщения модели Брукса-Кори и статистического подхода на основе смешанных регрессионных моделей (LME). Предложен и реализован метод реконструкции проницаемости сосудистых патологий с использованием интраоперационных измерений скорости и давления вблизи патологии [2]. Математическое моделирование эмболизации с использованием полученных относительных фазовых проницаемостей для предложенных классов показало различия в характере эмболизации. Это свидетельствует о том, что артериовенозные мальформации, относящиеся к разным классам, могут требовать различных подходов к эмболизации.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-11-00264).

ЛИТЕРАТУРА

1. Cherevko A. A., Gologush T. S., Petrenko I. A., Ostapenko V. V., Panarin, V. A. *Modelling of the arteriovenous malformation embolization optimal scenario*. Royal Soc. Open Sci. 2020. V. 7. №. 7. 191992. P. 1–16.
2. Khe A. K. et al. *Monitoring of hemodynamics of brain vessels*. J. App. Mech. Tech. Phys. 2017. V. 58. P. 763–770.

**О ДИНАМИЧЕСКИХ РЕЖИМАХ СТЕКАНИЯ ВЯЗКОЙ
НЕСЖИМАЕМОЙ КАПЛИ ПО НАКЛОННОЙ ПОДЛОЖКЕ****К. А. Чехонин^{1,2}**¹Хабаровское отделение Института прикладной математики, Хабаровск²Вычислительный центр Хабаровского ФИЦ ДВО РАН, Хабаровск

В работе рассматривается трехмерный процесс растекания и движения вязкой несжимаемой капли на наклонной поверхности под действием гравитационных, капиллярных и диссипативных сил. Диссипация энергии связана с вязкими эффектами жидкости, наличием трения-скольжения на твердой поверхности и линии трехфазного контакта, гистерезисными явлениями взаимодействия жидкости с гетерогенной поверхностью подложки. На основе уравнений Навье – Стокса и неразрывности предложена математическая постановка задачи в виде вариационных неравенств, которая сводится к функционалу Лагранжа с обеспечением проксимальных свойств. Исследуется разрешимость задачи. Ее численное решение производим методом конечных элементов в переменных Лагранжа с неявной линеаризацией сил поверхностного натяжения. Аппроксимацию основных переменных задачи (вектор скорости и давление) производим с выполнением условия совместности их сеточных пространств (LBB — условие). Для исключения сингулярности решения на линии трехфазного контакта предложена оригинальная модель скольжения с выбором длины скольжения в функции от определяющих параметров (критического и текущего капиллярного числа, параметров Рейнольдса и Стокса, гистерезиса динамического контактного угла смачивания).

Путем численного решения найдены значения определяющих параметров задачи, приводящие к условиям «прилипания» капли к наклонной поверхности, в том числе с начальной кинетической энергией. Показано влияние определяющих параметров на процесс стекания капли: скатывание, качение с инерционно-капиллярными и вязко-капиллярными динамическими режимами. Для условий доминирующего значения капиллярных сил получены асимптотические решения задачи о растекании капли на горизонтальной поверхности и шаре. Показана устойчивость и вычислительная эффективность модели, обладающей аппроксимационной сходимостью, консервативностью с повышением шага времени на два порядка относительно используемых в настоящее время схем интегрирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чехонин К. А., Власенко В. Д. *Моделирование заполнения вязкой жидкостью области в капиллярном коаксиальном зазоре*. Вычислительная механика сплошных сред. 2019. Т. 12. № 3. С. 313–324

2. Chekhonin K.A., Vlasenko V.D. *PThree-dimensional finite element Model of the Motion of a Viscous Incompressible Fluid with a Free Surface, Taking into Account the Surface Tension*. Journal of Physics: Conference Series. The conference on High Energy Processes in Condensed Matter (HEPCM-2021). 2023. P. 33–42.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЗМА ПЕРЕХОДА К ДИВЕРГЕНЦИИ КРЫЛА ПРИ ЕГО НЕСТАЦИОНАРНОМ ОБТЕКАНИИ

А. Д. Чичерина

Научно-исследовательский институт механики МГУ имени М.В. Ломоносова

Один из типов аэродинамической неустойчивости крыльев летательных аппаратов - это дивергенция. Она возникает вследствие взаимодействия возникающих при обтекании крыла аэродинамических сил и упругих сил его конструкции. Переход к дивергенции происходит при нулевой частоте колебаний. Общий механизм дивергенции, описанный в литературе, состоит в уменьшении одной из собственных частот до нуля за счет отрицательной аэродинамической жесткости, слиянии с ее парной частотой и (после слияния) преобразовании в одну затухающую и одну растущую частоту. В большинстве примеров этого механизма используется квазистационарная аэродинамика, которая подходит для анализа дивергенции из-за своей статической природы. Однако, в работе [1] было показано, что этот механизм меняется при использовании нестационарной аэродинамической теории. А именно, не происходит слияния частот, но "структурные" собственные частоты затухают. Мода расходимости не является продолжением естественной моды, а выделяется из непрерывного спектра, который существует в аэроупругой системе за счет следа за крылом при использовании нестационарной аэродинамики и отсутствует в квазистационарном случае.

В данной работе с целью исследования механизма перехода к дивергенции крыла при его нестационарном движении проводится численный расчет трехмерного безотрывного обтекания прямого крыла идеальной несжимаемой жидкостью. Специально разработанная для решения поставленной задачи компьютерная программа состоит из двух модулей: первый рассчитывает аэродинамические силы и моменты, действующие на тело, методом дискретных вихрей [2]; а второй решает уравнение балки с учетом изгиба и кручения [3]. Объединение двух модулей приводит к моделированию явлений аэроупругости во временной области. Малые возмущения в движение крыла вносятся посредством увеличения скорости потока, а переход к дивергенции отслеживается по спектру его собственных частот. Классические и неклассические механизмы перехода к дивергенции отличаются падением крутильной частоты до нуля в первом случае и сохранением существенно отличной от нуля во втором случае. Обсуждаются возможные применения полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vedenev V.V. *New mechanism of the aeroelastic divergence onset*. AIAA Journal. 2020. V. 58. No 6. P. 2716–2725.

2. Белоцерковский С. М., Ништ М. И. *Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью*. М.: Наука, 1978.
3. Левин И. А. *Методы расчета динамических характеристик лопасти несущего винта*. Тематический сборник научных трудов. 1991. 31–51.

КОМПЛЕКСНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РЕОЛОГИИ СЛОЖНЫХ СРЕД ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЗАДАЧАМ МЕДИЦИНЫ И СПОРТА

А. П. Чупахин^{1,3}, Д. В. Паршин^{1,3}, А. С. Бесов¹, Д. В. Тихвинский^{1,3}, А. И. Липовка^{1,3}, А. А. Карпенко^{3,4}, А. В. Коптюг^{1,2}

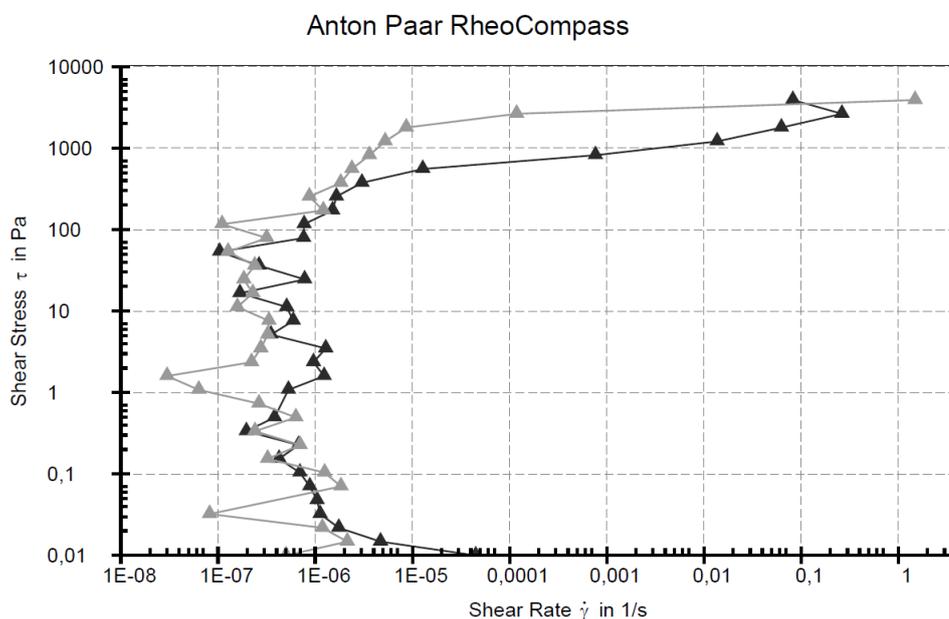
¹ *Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск*

² *Mid Sweden University, SportsTech Research Center, Ostersund, Sweden*

³ *Новосибирский Государственный Университет*

⁴ *НМИЦ им. ак. Е.Н. Мешалкина, Новосибирск*

Различные задачи медицины и спорта приводят к необходимости исследования прочностных свойств и реакции на внешнюю нагрузку сложных материалов в зависимости от различных видов нагрузок и внешних условиях. Биоматериалы, эмболизирующие флюиды и снег имеют сложную структуру, характеризующуюся несколькими масштабами характерных размеров, которые определяют их физические свойства. Для стенок кровеносных сосудов – это слоистость и сложная структура коллагеновых и эластиновых волокон. Для снега – это кристаллическая структура, зависящая как от истории нагружения, истории изменения внешней среды, так и от текущих температуры, влажности, атмосферного давления и воздействующей на него нагрузки. Для клеящих полимеров, которые используются в медицине – это концентрация в растворе, температура и модуль сдвига.



На эту крупномасштабную картину поведения сложного материала накладываются мелкомасштабные явления: течение крови в сосуде, скольжение лыжи по снежной поверхности, распределение эмболизирующего флюида в сети сосудов артериовенозной мальформации или опухоли. Адекватное описание процесса в целом должно включать в себя взаимодействие макро и микромасштабных явлений. В настоящее время эта тематика интенсивно развивается как с точки зрения математического и компьютерного моделирования [1, 2], так и экспериментальных исследований [4]. Для получения экспериментальных результатов нами использовался передовой реометр ANTON PAAR (Австрия) с набором измерительных систем типа конус-плоскость для испытания эмболизирующих флюидов (Рис), и типа плоскость-плоскость с песочной шероховатостью и при температуре $37\text{ }^{\circ}\text{C}$ (оба типа тестов) [3]. В работе приводится обзор результатов, полученных сотрудниками ИГиЛ СО РАН совместно с коллективом из НМИЦ им. ак. Е.Н. Мешалкина, а также Mid Sweden University, SportsTech Research Center, Ostersund, Sweden.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РНФ (коды проектов 22-29-01567 в части реологии снега и 21-15-00091 в части реологии ткани аорты).

ЛИТЕРАТУРА

1. Pukaluk A., Wolinski H., Viertler C., Regitnig P., Holzapfel G. A., Sommer G. *Changes in the microstructure of the human aortic adventia under biaxial loading investigated by multi-photon microscopy*. Acta Biomaterialia. 2023. V. 161. P. 39.
2. Dobroserdova T., Liang F., Panasenko G., Vassilevski Yu. *Multiscale models of blood flow in the compliant aortic bifurcation*. Applied Mathematics Letters. 2019. V. 93, P. 98–104.
3. Anton Paar GmbH. *Instruction Manual. MCR Series. Modular Compact Rheometer. MCR 102 / MCR 302. SmartPave 102. MCR 502 S*. Anton Paar GmbH: Graz, Austria, 2018. P. 51.
4. Kuianova I., Chupakhin A., Besov A., Gorbatykh A., Kislitsin D., Orlov K., Parshin D. *Rheological Properties of Non-Adhesive Embolizing Compounds—The Key to Fine-Tuning Embolization Process-Modeling in Endovascular Surgery*. Polymers. 2023. V. 15. № 2. 1060.

ЗАДАЧА О РАСПАДЕ РАЗРЫВА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ХОПФА С НЕВЫПУКЛОЙ ФУНКЦИЕЙ ПОТОКА

В. А. Шаргатов

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва

Численное решение задачи о распаде разрыва для обобщенного уравнения Хопфа

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \phi(v)}{\partial x} = 0, \quad v = v(x, t), \quad (1)$$

зависит от вида и параметров разностной схемы, поскольку решение задачи о распаде разрыва для этого уравнения в общем случае не единственно, если функция потока

$\phi(v)$ имеет несколько точек перегиба. Численное решение сходится к одному из бесконечного множества аналитических решений. Вид численного решения, определяется диссипативным и дисперсионным членами в дифференциальном приближении разностной схемы. Коэффициенты схемной диссипации и дисперсии зависят от вида разностной схемы, поэтому численные решения оказываются разными для разных разностных схем. Если начальные условия в задаче о распаде разрыва соответствуют некоторой ударной волне, то решение представляют собой либо один разрыв, для которого выполняется условие Лакса (классический разрыв), либо последовательность из особого разрыва, классического разрыва и простой волны. Особых разрывов может быть несколько, но устойчив только один, распространяющийся с наименьшей скоростью (подробнее см. [1]). Скорость этого устойчивого особого разрыва зависит от коэффициентов схемной диссипации и дисперсии, и именно этот разрыв является первым в последовательности волн.

Если функция потока выпуклая, то особых разрывов нет, и если устойчивая разностная схема обеспечивает "размазывание" разрывов, то для обобщенного уравнения Хопфа все численные решения задачи о распаде будут сходиться к одному и тому же решению.

Для всех разностных схемы, у которых дифференциальное приближение обладает большой диссипацией, численные решения будут близки.

Ни одно из полученных численных решений не является правильным или неправильным, если все что от него требуется, это быть решением уравнения Хопфа. Для того чтобы получить и выбрать единственное "правильное" решение, необходима информация о процессах дисперсии и диссипации в зоне ударного перехода. Вопрос параметрической «неустойчивости» результатов численного решения задачи не может быть решен в рамках гиперболической модели (т.е. обобщенного уравнения Хопфа в нашем случае) однозначным образом. Решение этой проблемы может быть получено, если привлечь информацию о процессах диссипации и дисперсии в зоне ударного перехода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шаргатов В. А., Чугайнова А. П., Томашева А. М. *Структуры классических и особых разрывов для обобщенного уравнения Кортевега–де Вриза–Бюргера в случае функции потока с четырьмя точками перегиба*. Труды МИАН. 2023. Т. 333. С. 266–281.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗРУШЕНИЯ КАПЛИ ЖИДКОСТИ ГЕРШЕЛЯ-БАЛКЛИ

А. А. Шебелева, А. В. Шебелев, А. В. Минаков

Сибирский Федеральный Университет, Красноярск

В данной работе представлены результаты численного исследования разрушения капли жидкости «естественного» размера $d_0 = 2.8$ мм на которую воздействует поток газа со скоростью 20 м/с. Физические свойства потока: $\rho_g = 1.7$ кг/м³,

$\mu_g = 1.789 \Delta 10^{-5}$ Па*с, коэффициент поверхностного натяжения $\sigma = 0.07$ Н/м. Свойства жидкости: $\rho_l = 1000$ кг/м³, реология рассматриваемой капли жидкости описывается моделью Гершеля-Балкли со следующими параметрами: предел текучести вязкопластической жидкости $\tau_0 = 14$ Па, индекс течения $n = 1$, индекс консистенции $k = 0.035$ Па*сⁿ. Число Бингама $Bn = 0.1$. В данной работе использовалась численная методика, основанная на сочетании VOF метода для разрешения межфазной границы, LES моделей для описания турбулентных потоков и технологий, адаптированных к границе подвижных сеток. Предложенная методика позволяет правильно описать поведение подвижной границы и основных турбулентных масштабов, которые участвуют в разрушении капли. Для численного исследования разрушения капли использовался программный пакет Ansys Fluent. Описание и верификация численной методики представлены в работе [1].

На Рис. 4 представлена форма поверхности капли в различные моменты времени. Это так называемый смешанный режим разрушения, на начальном этапе наблюдается сплющивание передней и задней поверхности капли, в момент времени 9500 мкс форма поверхности напоминает плоский диск, через 3000 мкс после этого начинает развиваться разрушение капли по типу парашют. Время индукции разрушения составляет $t \approx 14515$ мкс, отношения максимальной степени деформации ядра капли (перед началом ее разрушения) к начальному размеру капли $d_{max}/d_0 = 2.806$.

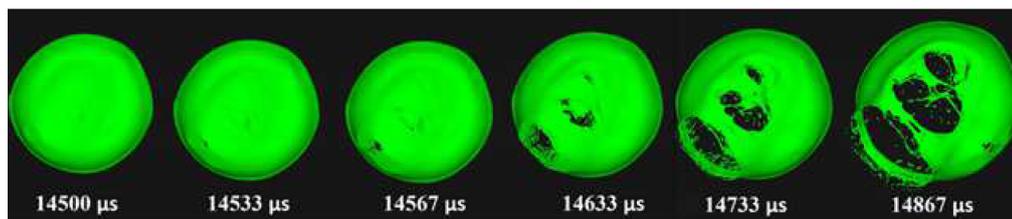


Рис. 4: Фронтальная проекция разрушения поверхности капли в различные моменты времени

Исследование осуществлено при поддержке КГАУ «Красноярский краевой фонд поддержки научной и научно-технической деятельности» в рамках научного проекта «Исследование особенностей вторичного дробления капель ОБУТ с целью совершенствования технологий его сжигания в арктических условиях» № 20231113-06407.

ЛИТЕРАТУРА

1. Minakov A.V. *Study of the Weber number impact on secondary breakup of droplets of coal water slurries containing petrochemicals*. Fuel. 2019. V. 254. Art. 115606. 1966.

СУСПЕНЗИИ ЧАСТИЦ НЕСФЕРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ: ТЕРМОДИНАМИКА И МИКРОСТРУКТУРА

В. В. Шелухин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

В рамках теории микрополярных жидкостей обоснован вывод термодинамически согласованных законов сохранения для суспензий несферических частиц. Термодинамический подход в данной работе восходит к методу математического моделирования Ландау-Халатникова, разработанного для описания сверхтекучести жидкого гелия II. В случае обратимых процессов этот метод позволяет однозначно определить силы взаимодействия частиц и жидкости путем согласования закона сохранения энергии как с другими законами сохранения, так и со вторым началом термодинамики. Для диссипативных процессов силы взаимодействия определяются в соответствии с принципами необратимой термодинамики де Гроота–Мазура.

Определяющие уравнения сформулированы таким образом, что они также согласуются с законами термодинамики, удовлетворяют принципу объективности и позволяют описывать анизотропные процессы, поскольку выражают реакцию напряжения не только на скорость деформации, но и на тензор микроинерции. Обращение к теории микрополярной жидкости связано с возможностью учета вращения частиц, что важно в ряде приложений. Ввиду вращения частиц необходимо привлекать закон сохранения внутренних моментов количества движения и тензор угловых моментов дополнительно к тензору напряжений Коши, который теряет симметричность.

Для указанных тензоров сформулированы реологические определяющие уравнения с использованием двух тензоров скоростей деформаций, которые позволяют вычислить локальное напряженное состояние при известных вязкостях. Для этого помимо сдвиговой вязкости введены кососимметричная и анизотропная вязкости.

Часть работы посвящена исследованию роли этих вязкостей для потоков суспензий нитеобразных частиц. Расчеты, проведенные для течений, вызванных перепадом давления, объясняют ряд известных экспериментальных эффектов, включая гистерезис, сдвиговые расслоения, развитие нематической фазы. Кроме того, расчеты предсказывают образование неоднородностей концентрации плавучих частиц. Применительно к транспортировке нефти по трубопроводам показано, что скорость потока определяется историей работы насосов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 20-19-00058).

ЛИТЕРАТУРА

1. Shelukhin V. *Lateral concentration inhomogeneities in flows of suspensions of rod-like particles: the approach of the theory of anisotropic micropolar fluid*. Mathematics. 2023. 11, 4740.

ПРИМЕНЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ТЕОРИИ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ К ЗАДАЧАМ ИДЕНТИФИКАЦИИ ТРЕЩИН В СТЕРЖНЯХ ПО СОБСТВЕННЫМ ЧАСТОТАМ КОЛЕБАНИЙ

Е. И. Шифрин

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва

Рассматриваются задачи обнаружения и идентификации поперечных трещин в стержнях по собственным частотам колебаний. Задачи рассматриваются в рамках моделей, в которых трещины заменяются невесомыми пружинами, работающими в случае продольных колебаний на растяжение, а в случае поперечных колебаний на поворот. Все задачи решаются с помощью единого подхода, основанного на использовании элементов теории обобщенных функций. Применяемый подход позволил свести задачи к обратным спектральным задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений на отрезке. Представлены следующие результаты.

Задача о продольных колебаниях стержня. Получено асимптотическое расщепление спектра. Доказано, что в случае n малых трещин они могут быть обнаружены, с точностью до симметричного расположения, с помощью $2n$ собственных частот, соответствующих стержню со свободными концами. Доказано, что любое количество трещин однозначно идентифицируется с помощью двух спектров, отвечающих условиям на концах: свободный – свободный и закрепленный – свободный. Последний результат распространяется также на случай стержня переменного сечения.

В задаче о поперечных колебаниях стержня Эйлера-Бернулли постоянного сечения доказано, что любое количество поперечных трещин однозначно восстанавливается с помощью трех спектров, отвечающих следующим условиям на концах: закрепленный – свободный, шарнирно опертый – свободный, скользящий – свободный. Некоторые соображения и численные расчеты показывают, что для идентификации трещин вероятно достаточно знать два спектра, однако, доказательство этого факта отсутствует.

В задаче о поперечных колебаниях балки Тимошенко рассмотрены два имеющих в литературе варианта моделирования трещины. В одном варианте трещина моделируется одной пружиной, работающей на поворот. В другом варианте трещина моделируется двумя пружинами, одна из которых работает на поворот, а другая на сдвиг. Для обеих моделей разработан эффективный метод решения прямой задачи. Доказано асимптотическое расщепление спектра, аналогичное случаю продольных колебаний. Часть представленных результатов опубликована в [1, 2].

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 123021700050-1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Shifrin E. I. *Inverse spectral problem for a rod with multiple cracks*. Mechanical Systems and Signal Processing. 2015. V. 56–57. P. 181–196.
2. Shifrin E. I., Lebedev I. M. *Identification of multiple cracks in a beam by natural frequencies*. European Journal of Mechanics – A/Solids. 2020. V. 84. 104076.

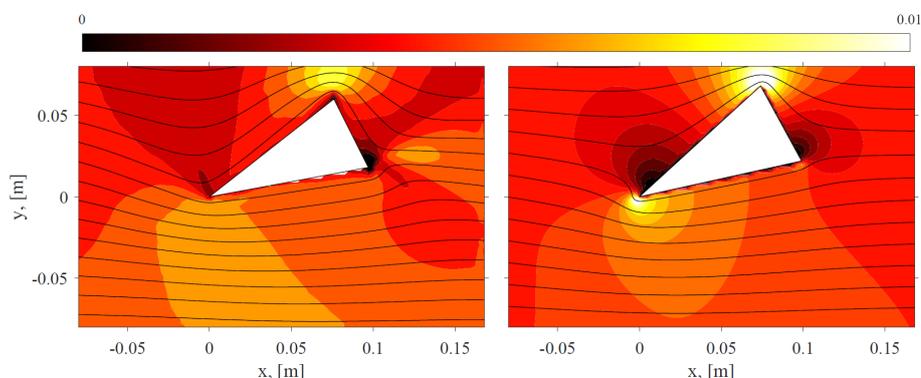
ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ПЕНЫ В ЯЧЕЙКЕ ХЕЛЕ-ШОУ ПРИ НАЛИЧИИ ПРЕПЯТСТВИЯ

Н. Д. Шмакова, А. А. Черевко

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Неоднородное строение жидких пен приводит к их сложному реологическому поведению в зависимости от силы внешнего воздействия [1]. Проявление упругих, пластических и вязких свойств пен используется во многих приложениях [2], таких как пищевая, косметическая и фармацевтическая промышленность, добыча ископаемых, восстановление почв. Понимание закономерностей, позволяющих осуществлять контроль течения пены в гетерогенных средах, представляются чрезвычайно важным для данных приложений [3].

В предыдущих работах [4, 5] было рассмотрено влияние геометрии проницаемого препятствия и жидкой фракции на квазидвумерное течение пены в ячейке Хеле-Шоу. В данной работе исследуется квазидвумерное обтекание пеной различных препятствий, полностью заполняющих миллиметровый зазор ячейки. Проведены исследования реологии пены для подбора параметров расчетов в Ansys и представлено сравнение экспериментальных и расчетных данных обтекания препятствия. На рисунке на примере клина под углом 27° к направлению потока приведены экспериментальные данные модуля скорости для пены, полученные в работе [6] (слева), и данные расчета для воды (справа).



ЛИТЕРАТУРА

1. Hohler R., Cohen-Addad S. *Rheology of liquid foams*. J. Phys. Condens. Matter. 2005. V. 17. R1041–R1069.
2. Khan S. A., Prudhomme R. *Foams*. Dekker, 1996.
3. Cantat I. *Foams, Structure and Dynamics*. Oxford University Press, 2013.
4. Shmakova N. D., Chevalier T., Puisto A., Alava M., Raufaste C., Santucci S. *Quasi-two-dimensional foam flow through and around a permeable obstacle*. Phys. Rev. Fluids. 2020. V. 5. 93301
5. Stennikova O., Shmakova N., Carrat J.-B., Ermanyuk E. *Liquid Fraction Effect on Foam Flow through a Local Obstacle*. Polymers. 2022. V. 14. 5307.
6. Новоселов И. В. *Исследование обтекания потоком пены клина различной геометрии и под различными углами атаки в ячейке Хеле-Шоу*. Выпускная работа бакалавра, рук. Чупахин А. П., Шмакова Н. Д., НГУ. 2023.

ЭРЗАЦ МОДЕЛЬ ДЛЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ ПРЕДСТАВИТЕЛЬНОГО ОБЪЁМНОГО ЭЛЕМЕНТА

А. В. Шутов, К. П. Уфимцев

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет*

В последние годы популярность набирает метод вычислительной гомогенизации FEM², также известный как многоуровневый метод конечных элементов [1]. Достоинство метода состоит в том, что он явно учитывает свойства анализируемых материалов, при этом структура определяется представительным объёмным элементом (ПОЭ). Исследуется применимость многоуровневого подхода к моделированию поведения повреждённого металлического материала; геометрия пор и их эволюция моделируются в явном виде решением упруго-вязкопластической задачи. В качестве модели материала выступает модель Simo & Miehe; применяются эффективные вычислительные алгоритмы, представленные в [3, 4]. Так как в рассматриваемой постановке задачи участвуют геометрические и физические нелинейности, прямое применение FEM² становится вычислительно затратным, поскольку в каждой точке интегрирования по Гауссу требуется полномасштабное КЭ моделирование поведения дискретизированного ПОЭ. Частичное решение этой проблемы было предложено в публикации [2] на основе введения упрощённых статистически подобных ПОЭ. В настоящем докладе предлагается значительно более эффективное решение с применением редукции модели. В рамках развитого подхода, для заданного дискретизированного ПОЭ создается его эрзац-модель (ЭМ), имитирующая механические (вязкопластические) свойства ПОЭ для произвольных непропорциональных путей нагружения. Отличительной особенностью полученных ЭМ является крайне малое число степеней свободы (порядка 10). В докладе предложены и протестированы алгоритмы автоматической калибровки и валидации ЭМ и продемонстрирована практическая применимость подхода, ведущая к многократному ускорению расчётов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (код проекта 23-19-00514)

ЛИТЕРАТУРА

1. Miehe C., Schotte J., Schröder J. *Computational micro-macro transitions and overall moduli in the analysis of polycrystals at large strains*. Comp. Mater. Sci. 2019. Т. 16. С. 372–382.
2. Schröder J., Balzani D., Brandts D. *Approximation of random microstructures by periodic statistically similar representative volume elements based on lineal-path functions*. Arch. Appl. Mech. 2011. Т. 81. С. 975–997.
3. Shutov A. V., Landgraf R., Ihlemann J. *An explicit solution for implicit time stepping in multiplicative finite strain viscoelasticity*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 2013. Т. 256. С. 213–225.
4. Shutov A. V. *Efficient time stepping for the multiplicative Maxwell fluid including the Mooney – Rivlin hyperelasticity*. Int. J. Num. Meth. Engrng. 2018. Т. 113. №. 12. С. 1851–1869

СТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ПОЛИМЕРНОЙ ЖИДКОСТИ С ПЕРЕМЕННЫМ РАСХОДОМ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ С ПЕРФОРИРОВАННЫМИ СТЕНКАМИ

Г. Н. Шукуров

Новосибирский государственный университет

Рассмотрим математическую модель Покровского-Виноградова [1,2,3], которая описывает гидродинамические течения несжимаемой полимерной жидкости. В этой работе мы строим стационарные течения в каналах с перфорированными стенками и с переменным расходом полимерной жидкости. В качестве основной проблемы мы будем рассматривать задачу о нахождении решений математической модели (1)-(5), описывающих гидродинамическое течение несжимаемой полимерной жидкости в плоском канале с перфорированными горизонтальными стенками. На стенках канала ($y = 0, 1$) выполнены краевые условия:

$$\begin{cases} y = 0 : u = q_0(t, x), v = f_0(t, x), t > 0, x \in R^1; \\ y = 1 : u = q_1(t, x), v = f_1(t, x), t > 0, x \in R^1; \end{cases} \quad (6)$$

где $f_{0,1}, q_{0,1}$ — некоторые функции, задающие законы движения полимерной жидкости через отверстия перфорированных стенок $y = 0, 1$.

Заметим, что стационарные течения с переменным расходом удалось построить только в некоторых частных случаях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алтухов Ю. А., Гусев А. С., Пышнограй Г. В. *Введение в мезоскопическую теорию текучих полимерных систем*. Барнаул: АлтГПА, 2012.
2. Блохин А. М., Бамбаева Н. В. *Стационарные решения уравнений несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости*. ЖВМиМФ. 2014, Т. 54, № 5. С. 55-65.
3. Блохин, А. М., Семенко Р. Е. *Стационарные магнитогидродинамические течения неизотермической несжимаемой полимерной жидкости в плоском канале*. Вестник ЮУрГУ. Серия "Математическое моделирование и программирование". 2018. Т. 11, № 4. С. 41-54.

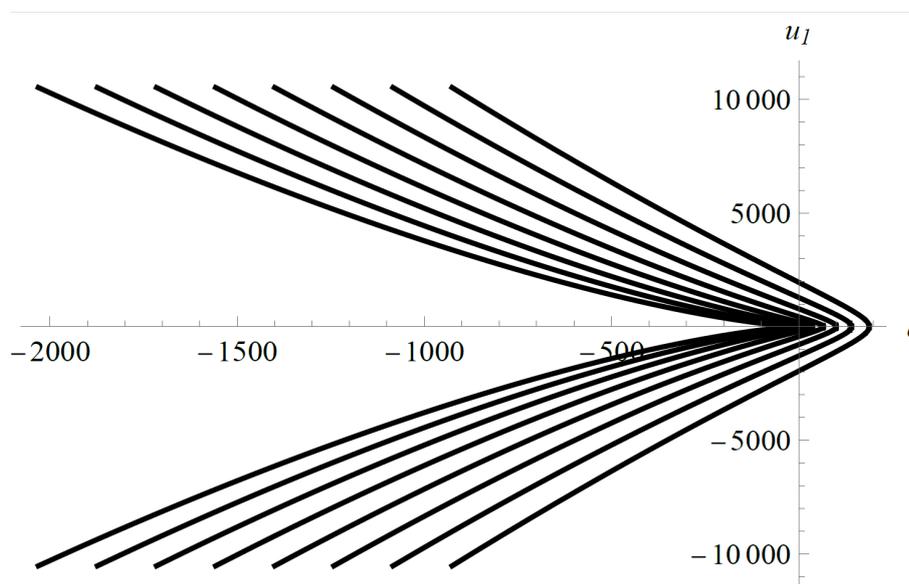
О НОВОМ КЛАССЕ КОНИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Н. И. Яворский

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

Рассматриваются трёхмерные течения вязкой несжимаемой проводящей жидкости, описываемой уравнениями магнитной гидродинамики, принадлежащие классу конических течений Джефффри-Гамеля [1]. В работе представлены точные решения

полных МГД уравнений, отвечающими стационарным осесимметричным пространственным течениям от линейного источника массы и магнитного поля, который может быть совмещён с линейным проводником электрического тока и линейной вихревой нитью. В работе[2] было показано, что в случае точечного источника массы задача Джеффри-Гамеля имеет бесконечное число решений, при этом решения отличаются количеством струй, симметрично расположенных в азимутальном направлении. Течение определяется независимым параметром a , который связан с заданием интенсивности особенности для давления в начале координат. Для задачи Джеффри-Гамеля такой параметр входит в получаемые уравнения. Все решения появляются в результате бифуркаций от классического решения для течения от точечного источника массы для плоской задачи. На рисунке ниже представлены эти бифуркации, где параметром порядка является число Рейнольдса q , построенное по интенсивности источника массы, $u_1 = u'(0)$ – производная радиальной скорости, возникающего многоструйного течения, при $\theta = 0$.



Из рисунка видно, что при $q = 0$, то есть при нулевом расходе, имеется бесконечное множество решений.

В настоящей работе показано, что в случае МГД течения появляются дополнительные бифуркации этих решений, которые соответствуют возникновению многоструйных течений в направлении оси z , перпендикулярной плоскости течения Джеффри-Гамеля. Соответственно, от каждого типа течения Джеффри-Гамеля ответвляется бесконечное множество решений, отличающихся количеством восходящих и нисходящих струй. Все эти решения сопровождаются генерацией осевой и радиальной компонент магнитного поля, порождающими электрический ток в объеме проводящей жидкости.

В работе обсуждаются дополнительные особенности новых решений, если на оси симметрии расположить линейный проводник электрического тока и вихревую нить. Указывается на возможность генерации завихренности при включении электрического тока в проводнике.

Работа выполнена при финансовой поддержке бюджетного проекта (код проекта FWNS-2021-0009).

ЛИТЕРАТУРА

1. Shtern V.N. *Counterflows: paradoxical fluid mechanics phenomena*. Cambridge, New York: Cambridge University Press, 2012.
2. Яворский Н.И. *Течение Джефффри-Гамеля для точечного источника*. Всероссийская конференция и школа для молодых ученых, посвященные 100-летию академика Л.В. Овсянникова «Математические проблемы механики сплошных сред», 13-17 мая 2019 г. Тезисы докладов. Новосибирск: Институт гидродинамики им М.А. Лаврентьева СО РАН. 2019. С. 227–228.

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ
В НЕПОДВИЖНОМ СЛОЕ КАТАЛИЗАТОРА**

О. С. Язовцева¹, А. С. Иншакова², И. М. Губайдуллин^{3,4}

¹Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва

²Национальный исследовательский Мордовский государственный университет, Саранск

³Уфимский государственный нефтяной технический университет

⁴Институт нефтехимии и катализа УФИЦ РАН, Уфа

В настоящее время актуальными являются вопросы ресурсосбережения. Это относится в равной степени как к природным ресурсам, так и к искусственным материалам. В области химической промышленности хорошо известна проблема восстановления эффективности катализатора после прогонки химических реакций на нем с целью его повторного использования. Снижение каталитической активности в первую очередь связывают с осаждением коксовых отложений различного состава на поверхности и в порах зерен катализатора [1]. Основным методом восстановления каталитической активности является окислительная регенерация катализатора [2]. Проблемы, возникающие в ходе регенерации, связаны в основном с перегревом катализатора в ходе течения экзотермических окислительных реакций. Это вызвано особенностями движения тепловой волны – фронта горения – по длине слоя [3]. С течением времени амплитуда волны достигает недопустимых величин [4]. Остро стоит вопрос об установлении причин и условий возникновения локальных перегревов. Как известно, для исследования процессов физической химии удобно применять методы математического моделирования [5]. В предлагаемой работе использована диффузионная модель регенерации неподвижного слоя катализатора, приведённая к безразмерному виду [4]. Целью работы является численное исследование волновых процессов в неподвижном слое катализатора. Настоящая работа является продолжением работ [6, 7].

В истории развития математического моделирования в химии можно проследить значительный подъем в послевоенные пятилетки – возросшие нужды промышленности дали существенный толчок научному развитию [8]. Похожие процессы наблюдаются и в наше время: усиливающиеся санкционные меры со стороны большинства стран существенно переориентировали науку и технику, потребность в отечественных разработках в последнее десятилетие остро возросла. Это выводит на особый

план разработки в сфере программного обеспечения. Многие заводы отказались от использования зарубежного программного обеспечения ввиду отсутствия гарантий его функциональности в ближайшее время.

Построение эффективного вычислительного алгоритма для численного исследования моделей физической химии является задачей повышенной трудности, поскольку описываемые процессы имеют различные характерные времена и протекают на различных пространственных уровнях. Большинство существующих программных решений так или иначе подразумевают упрощение модели, связанное с унификацией используемых в них алгоритмов.

Построенный для исследуемой задачи вычислительный алгоритм основан на методе конечных элементов [9]. Для ослабления условия устойчивости используемой явной разностной схемы для модели была предварительно выполнена гиперболизация системы [10]. Это позволяет вести счет с существенно большим шагом интегрирования по времени по сравнению с параболической задачей. Также для сокращения общего расчетного времени задачи при реализации алгоритма была применена технология параллельных вычислений OpenMP. Эта технология не требовательна к вычислительной технике и организации вычислений – современная вычислительная техника как правило имеет несколько процессоров. Благодаря возможности использования разработанного программного кода на персональном компьютере или ноутбуке проведение расчетов будет возможно без отрыва от производства.

С использованием разработанного программного кода было проведено исследование процесса окислительной регенерации слоя неподвижного катализатора, в том числе и с возможностью управления процессом с использованием переменных концентраций кислорода в реакционной смеси и переменной температуре подаваемого газа. Получены графики, отражающие движение тепловой волны по слою катализатора с сопутствующим выжигом коксовых отложений и определены условия, позволяющие не допускать локального перегрева слоя.

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда № 19-71-30012.

ЛИТЕРАТУРА

1. Буянов Р.А. *Закоксование катализаторов*. Новосибирск: Наука, 1983.
2. Масагутов Р.М., Морозов Б.Ф., Кутепов Б.И. *Регенерация катализаторов в нефтепереработке и нефтехимии*. М.: Химия, 1987. 144 с.
3. Балаев А.В., Дробышев В.И., Губайдуллин И.М., Масагутов Р.М. *Исследование волновых процессов в регенераторах с неподвижным слоем катализатора*. Распространение тепловых волн в гетерогенных средах. 1988. С. 233-246.
4. Reshetnikov S.I., Petrov R., Zazhigalov S., Zagoruiko A.N. *Mathematical modeling of regeneration of coked Cr-Mg catalyst in fixed bed reactors*. Chemical Engineering Journal. 2020. N 380.
5. Слинько М.Г. *Некоторые итоги развития и применения математического моделирования химических реакторов*. Управляемые системы. 1968. № 1. С. 74-82.
6. Gubaydullin I.M., Peskova E.E., Yazovtseva O.S., Zagoruiko A.N. *Numerical Simulation of Oxidative Regeneration of a Spherical Catalyst Grain*. Mathematical Models and Computer Simulations. 2023. V. 15. P. 485-495. DOI: 10.1134/S2070048223030079.

7. Yazovtseva O.S., Gubaydullin I.M., Peskova E.E., Sukharev L.A., Zagoruiko A.N. *Computer Simulation of Coke Sediments Burning from the Whole Cylindrical Catalyst Grain*. Mathematics. 2023. Vol. 11, No. 3. P. 669. DOI: 10.3390/math11030669.
8. Боресков Г.К. , Слинко М.Г. *Моделирование химических реакторов*. Теоретические основы химической технологии. 1967. Т. 1. № 1. С. 5-16.
9. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.
10. Б. Н. Четверушкин, О. Г. Ольховская, В. А. Гасилов. Явная схема для решения нелинейного уравнения теплопроводности // Математическое моделирование. 2022. Т. 34, № 12. С. 3-19. DOI 10.20948/mm-2022-12-01.

МЕХАНИЗМ ВЗРЫВНОЙ ФРАГМЕНТАЦИИ КАПЛИ РАСПЛАВА В ОБЪЕМЕ ХОЛОДНОЙ ЖИДКОСТИ

С. Е. Якуш, Н. С. Сиваков

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва

Быстрое перемешивание жидкостей с существенно различными температурами может приводить к резкому вскипанию более холодной из них, сопровождаясь возникновением волн давления (паровой взрыв). Подобные явления представляют интерес в атомной энергетике с точки зрения опасностей тяжелых аварий, сопровождающихся плавлением активной зоны и взаимодействием высокотемпературного коридора с теплоносителем (водой), поскольку воздействие ударных волн может привести к нарушению целостности корпуса реактора и контейнента [1].

В вопросе о механизмах преобразования тепловой энергии расплава в механическую энергию взрывной волны ключевую роль играет фрагментация начальных крупных капель высокотемпературного расплава в процессе взаимодействия, приводящая к возникновению субмиллиметровых вторичных капель со значительным увеличением площади поверхности теплообмена. Несмотря на многочисленные гипотезы о механизмах быстрой фрагментации (гидродинамический, термический, кавитационный и т. д.), в настоящее время общепринятая теория этого процесса отсутствует.

В данной работе эти процессы изучаются методом численного моделирования VOF (volume of fluid), математическая модель учитывает сжимаемость фаз и фазовые переходы [2]. Рассмотрено развитие неустойчивости поверхностей фаз, схлопывание и колебания парового пузыря при инициировании триггерным импульсом давления. Приведены результаты трехмерных расчетов для капли расплава, движущейся относительно объема неподвижной воды (например, за счет гравитационной седиментации), вследствие чего паровой пузырь имеет вытянутую форму в кормовой части капли. Показано, что в процессе колебаний пузыря происходит его схлопывание с формированием кратковременной высокоскоростной осевой струйки воды (подобной кумулятивной струйке при схлопывании кавитационного пузырька), удар которой по капле расплава приводит к быстрой фрагментации. На результатах численных расчетов продемонстрирована трансформация капли расплава с образованием мелкодисперсных капель и микроструек. Полученные результаты проливают свет на гидродинамические и теплофизические явления, ответственные за взрывную фрагментацию капель расплава в холодной воде, наблюдающуюся в экспериментах.

Работа выполнена по теме государственного задания ИПМех РАН (номер гос. регистрации 124012500440-9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Мелихов В. И., Мелихов О. И., Якуш С. Е. *Гидродинамика и теплофизика паровых взрывов*. М.: ИПМех РАН, 2020.
2. Yakush S. E., Sivakov N. S. *Numerical modeling of high-temperature melt droplet interaction with water*. *Annals of Nuclear Energy*. 2023. V. 185, 109718, P. 1–13.

ВОЛНЫ В ЛЕДЯНОМ ПОКРОВЕ ОТ ДВИЖУЩИХСЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

А. А. Ярошенко, Ж. В. Маленко

*Морской институт имени вице-адмирала В. А. Корнилова - филиал ФГБОУ ВО «ГМУ имени адмирала Ф. Ф. Ушакова», Севастополь
Севастопольский государственный университет*

В зимний период многие реки, озера и моря северных районов покрываются ледяным покровом. Для продления навигации возникает необходимость его разрушения. Одним из способов разрушения служит резонансный метод, для реализации которого применяют суда на воздушной подушке (СВП). СВП, двигаясь с определенной скоростью, создают изгибно-гравитационные волны, приводящие к разрушению ледяного покрова. Для повышения эффективности резонансного метода Козиным В. М. было предложено периодически изменять давление в подушке СВП. В данной работе ледяной покров моделируется тонкой упругой изотропной пластинкой, плавающей на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины. По поверхности пластины перемещается источник возмущений, совершающий периодические колебания. Для решения задачи применяется метод интегральных преобразований Фурье по горизонтальным координатам и Лапласа по времени. Анализ полученного в интегральной форме решения проведен методом стационарной фазы для многомерных интегралов. В результате проведенного исследования получено, что имеется шесть значений критических скоростей, при которых меняется характер волнового возмущения. В зависимости от скорости перемещения источника возмущений и частоты его колебаний образуется от одной до семи систем волн, которые распространяются в угловых зонах, как впереди источника, так и за ним. Значения угловых зон и критических скоростей зависят от толщины ледяного покрова, глубины жидкости, сил сжатия и растяжения ледяного покрова. При больших значениях сил сжатия существенно меняется характер волнового возмущения в волновом следе за источником возмущений. Происходит наложение волн за источником.

ABUNDANT SOLUTIONS AND THE CONSERVATION LAWS OF A NEW (3+1)-DIMENSIONAL FIFTH-ORDER NONLINEAR WAZWAZ EQUATION WITH THE THIRD-ORDER DISPERSION TERMS

O. D. Adeyemo, C. M. Khalique

Department of Mathematical Sciences, North-West University, Mmabatho, Republic of South Africa

In this talk, we present the analytical examination of a new (3+1)-dimensional fifth-order nonlinear Wazwaz equation with third-order dispersion terms [1] which is applicable in ocean physics and other nonlinear sciences. We first apply Lie group analysis [2, 3] to obtain various infinitesimal generators admitted by the equation.

This is followed by invoking the generators to reduce the understudy equation to achieve copious group- invariant solutions. Thus, various closed-form solutions of interest were obtained for the underlying equation. Besides, we construct the conservation laws [3, 4] of the equation.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wazwaz A. M. *New (3+ 1)-dimensional Painlevé integrable fifth-order equation with third-order temporal dispersion* Nonlinear Dynamics. 2021. V. 106. №. 1. P. 891–897
2. Ovsianikov L. V., *Group Analysis of Differential Equations*, Academic Press, New York, USA, 1982.
3. Olver P. J., *Applications of Lie Groups to Differential Equations, second ed.* Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1993.
4. Ibragimov N. H., *A new conservation theorem.* J. Math. Anal. Appl., 2007. V. 333 P. 311–328

THE IMPULSIVE KELVIN-VOIGT EQUATIONS FOR HOMOGENEOUS INCOMPRESSIBLE FLUIDS

S. N. Antontsev¹, I. V. Kuznetsov²

¹*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Novosibirsk*

²*Novosibirsk State University*

The present report follows the research on the Kelvin-Voigt equations

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_{nt} + \operatorname{div}(\mathbf{v}_n \otimes \mathbf{v}_n) = \operatorname{div}(\mu \nabla \mathbf{v}_n + \varkappa \nabla \mathbf{v}_{nt}) - \nabla \pi \\ \quad + \lambda \varphi_n \mathbf{v}_n \text{ in } Q_T, \\ \operatorname{div} \mathbf{v}_n = 0 \text{ in } Q_T, \\ \mathbf{v}_n(x, 0) = \mathbf{v}_0(x) \text{ in } \Omega, \\ \mathbf{v}_n(x, t) = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_T, \end{array} \right. \quad (1)$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ is bounded domain with smooth boundary $\partial\Omega$, $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $\Gamma_T = \partial\Omega \times (0, T)$, $\mathbf{v}_n(x, t)$ is the velocity field, μ is the viscosity kinematic coefficient, and \varkappa is the viscosity relaxation coefficient, the sequence $\varphi_n(t)$ approximates the Dirac delta function,

$\lambda = \pm 1$. For every natural n , $n \geq n_0 = \left\lceil \frac{1}{T} \right\rceil + 2$, the function $\varphi_n = \varphi_n(t)$ is defined by the formula $\varphi_n(t) = n\Phi(nt)$, $t \in [0, T]$, where Φ is a non-negative smooth function with $\text{supp } \Phi = [0, 1]$ and the unit mean: $\int_0^1 \Phi(\vartheta) d\vartheta = 1$. Here we apply results on impulsive pseudo-parabolic equations in [1] with references therein. The main novelty of this report is that we apply the results [2, 3, 4, 5] to impulsive differential equations. Namely, we apply the higher regularity results. The physical interpretation of the impulsive processes can be linked with formation of vortexes, see [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Antontsev S., Kuznetsov I., Sazhenkov S., Shmarev S., *Strong solutions of a semilinear impulsive pseudoparabolic equation with an infinitesimal initial layer*, J. Math. Anal. Appl. 530 (1) (2024) 127751,
2. Antontsev S. N., de Oliveira H. B., Khompysh Kh., *Regularity and uniqueness of Kelvin-Voigt models for nonhomogeneous and incompressible fluids*, J. Phys.: Conf. Ser. 1666 (2020) 012003.
3. Antontsev S. N., de Oliveira H. B., Khompysh Kh., *The classical Kelvin-Voigt problem for incompressible fluids with unknown non-constant density: existence, uniqueness and regularity*, Nonlinearity, 34 (2021) 3083–3111.
4. Antontsev S. N., Khompysh Kh. *Kelvin-Voigt equation with p -Laplacian and damping term: existence, uniqueness and blow-up*, J. Math. Anal. Appl. 446 (2017) 1255–1273.
5. Antontsev S. N., Khompysh Kh. *Generalized Kelvin-Voigt equations with p -Laplacian and source/absorption terms*, J. Math. Anal. Appl. 456 (1) (2017) 99–116.
6. Flandoli F., Huang R. *Noise based on vortex structures in 2D and 3D* J. Math. Phys. 64 (2023) 053101

LARGE SYMMETRIES AND CONSERVATION LAWS FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS, DIFFERENCE EQUATIONS AND SECOND-ORDER DELAY ODEs

V. A. Dorodnitsyn

Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Science, Moscow

We discuss the Noether theorem for differential and difference equations, Noether's operator identity and conservation laws. We also consider the Hamilton identity, which provides with simple and quick link to first integrals for ODEs and for difference ODEs. Based on the Lagrangian identity the method of adjoint equations gives the possibility to find conservation laws for equations without Lagrangian and Hamiltonian. We show the connection of this method with so called direct method. We discuss also the Lagrangian formalism for variational delay ordinary differential equations. The Noether operator identity is used to formulate the Noether-type theorems, which allow to find first integrals for delay ODEs. (based on joint works with **Roman Kozlov**, **Pavel Winternitz**, **Sergey Meleshko** and **Evgenii Kaptsov**)

CONSERVATION LAWS AND SOLUTIONS OF THE ZAKHAROV-KUZNETSOV EQUATION WITH DUAL POWER-LAW NONLINEARITY

Khalique C.M.

Department of Mathematical Sciences, North-West University, Mmabatho, Republic of South Africa

We apply Lie symmetry analysis [1, 2, 3] on a generalized Zakharov-Kuznetsov equation with dual power-law nonlinearity that appears in engineering and nonlinear science. Lie point symmetries of the equation are obtained and thereafter used to reduce the equation to certain ordinary differential equations which are then solved using different techniques to obtain exact solutions. Moreover, conservation laws are constructed using the general multiplier method and using Noether's theorem with Helmholtz criteria through the homotopy formula.

ЛИТЕРАТУРА

1. L.V. Ovsiannikov, Group Analysis of Differential Equations, Academic Press, New York, USA, 1982.
2. P.J. Olver, Applications of Lie Groups to Differential Equations, second ed., Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1993.
3. N.H. Ibragimov, CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Vols 1–3, CRC Press, Boca Raton, Florida, 1994–1996.

COMPARING SOFTWARE TOOLS TO COMPUTE MAXIMUM TSUNAMI WAVE HEIGHTS

M. M. Lavrentiev^{1,2}, K. F. Lysakov¹, K. K. Oblaukhov¹

¹*Institute of Automation and Electrometry SB RAS, Novosibirsk*

²*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk*

In this paper we compare maximum tsunami wave heights obtained using the Method Of Splitting Tsunami (MOST - the official modelling tool of the US Tsunami Warning Centers) software package on a single-processor computer platform, parallel implementation of the numerical scheme of splitting by spatial variables (used in the MOST software package) for the use with Graphic Processing Units (GPUs) and the McCormack finite-difference scheme optimized for execution on the ordinary Personal computer (PC) equipped with the Field Programmable Gates Array (FPGA) based co-processor. When analyzing the obtained results, the achieved computational performance is taken into account.

As a model for describing the dynamics of tsunami waves, the nonlinear system of shallow water differential equations was used [1]:

$$\begin{aligned} H_t + (uH)_x + (vH)_y &= 0, \\ u_t + uu_x + vu_y + gH_x &= gD_x, \end{aligned}$$

$$v_t + uv_x + vv_y + gH_y = gD_y,$$

where $H(x, y, t) = \eta(x, y, t) + D(x, y)$ is the entire height of water column, η being the sea surface disturbance (wave height), $D(x, y)$ – depth (which is supposed to be known at all grid points), u and v components of the flow velocity vector, g - acceleration of gravity.

For numerical calculations the Mac-Cormack finite difference scheme is used. This is an explicit difference scheme at three-points stencil of a “cross” type. At each stage the unknown values at a certain point depend on the previous time values at the same point and just two adjacent grid points, see details in [2].

A region near the north-east of Honshu Island and south of Hokkaido Island (Japan) extending from 140.25° to 146.25° E and from 39.0° to 44.0° N was selected. The computational grid spacing for this region was chosen to be 0.002° in both directions.

Qualitatively all three numerical methods provide similar results off the shelf. However, valuable differences in the computed tsunami wave maxima are observed at several locations along the coast. Additional studies are on demand.

ЛИТЕРАТУРА

1. Titov V. V., Gonzalez F.I. *Implementation and testing of the method of splitting tsunami (MOST) model*. NOAA Technical Memorandum ERL PMEL-112, USA, 1977.
2. Lavrentiev M., Lysakov K., Marchuk An., Oblaukhov K. *Fundamentals of Fast Tsunami Wave Parameter Determination Technology for Hazard Mitigation*. Sensors. 2022. V. 22, 7630, P.1–14.

PSEUDOCOMPONENT METHOD FOR MODELING COMPONENT-FRACTION COMPOSITION OF A FLUID DURING OIL AND GAS PRODUCTION

V. L. Litvinov¹, K. V. Litvinova²

¹Samara State Technical University

²Lomonosov Moscow State University

When designing oil and gas production processes, it is necessary to correctly model the component –fractional composition of the produced fluid. In modern hydrodynamic simulators, one of the main difficulties of modeling is to replace a large number of components in oil and natural gas with a much smaller number of pseudoparticles. In addition, it is necessary to describe the physicochemical properties of hypothetical oil and gas so that they describe phase transitions and filtration of a real fluid as accurately as possible. The paper proposes an automatic lambing scheme based on K – values. The error of the method is no more than 5%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Whitson C.H. and Torp S.B. *Evaluating Constant Volume Depletion Data*. JPT, 1983, Trans., AIME, P. 275
2. Reid R.C., Prausnitz J.M. and Sherwood T.K. *The properties of Gases and Liquids, - 3rd edition*. McGraw-Hill, New York, 1977.

3. Yau-Kun Li, Long X. Nghiem, Alan Siu *Phase behaviour computations for reservoir fluids: effect of pseudo-components on phase diagrams and simulation results*. Petroleum Society of Canada. Journal of Canadian Petroleum Technology, 1985, P. 24.

SOLUTION OF INJECTION DRIVEN FLOW AND HEAT TRANSFER INSIDE AN INCLINED CHAMBER: SYMMTRY ANALYSIS APPROACH

L. L. Modisawatsona¹, G. Magalakwe¹, T. Motsepa²

¹*North-West University, Republic of South Africa*

²*University of Mpumalanga, Republic of South Africa*

In this study, we find closed-form solutions of momentum and temperature variation during the unsteady state filtration process to advance fluid purification [1]. Lie group analysis is used to transform a system of equations representing the flow and heat transfer [2] into a solvable system without changing the dynamics of the case study. The transformed solvable system is then solved to find closed-form solutions of momentum and temperature variation [3]. The obtained closed-form solutions [4] are then used to analyse the effects of physical parameters arising from the process dynamics to find combinations of parameters that yield maximum permeates outflow [5]. The results indicate that as time evolves, permeates production increases because internal momentum, work done, and energy intensifies with time. In addition, to increase permeates production, high injection rate, permeates wave speed parameter, permeation, angle of inclination and Grashof number enhance permeates outflow.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bruin S. *Temperature distributions in couette flow with and without additional pressure*. International Journal of Heat and Mass Transfer. 1972 V. 15 № 2. P. 341–349
2. Hartnett J.P., Kostic M. *Heat transfer to newtonian and non-newtonian fluids in rectangular ducts, in: Advances in heat transfer*. Elsevier. 1989 V. 19 P. 247–356
3. Shah R., London A. *Laminar flow forced convection in ducts*. Elsevier. 1978 V. 1
4. Davis E.J. *Exact solutions for a class of heat and mass transfer problems*. The Canadian Journal of Chemical Engineering. 1973 V. 51 № 5. P. 562–572
5. Nabwey H.A., El-Kabeir S., Rashad A. *Lie group analysis of effects of radiation and chemical reaction on heat and mass transfer by unsteady slip flow from a non-isothermal stretching sheet immersed in a porous medium*. Journal of Computational and Theoretical Nanoscience. 2015 V. 12 № 11. P. 4056–4062

PRELIMINARY GROUP CLASSIFICATION OF NONLINEAR REACTION-DIFFUSION EQUATION

D. M. Nkwanazana¹, R. J. Moitsheki²

¹*Sefako Makgatho Health Science University, ga-rankuwa (Pretoria), South Africa*

²*University of Witwatersrand, Johannesburg, South Africa*

In this study, we will look at the preliminary group classification, as well as direct group classification of a non-linear reaction diffusion equation describing the transient state of heat conduction with respect to heat transfer through the straight fin. Explicitly, we will be looking at the specific forms of heat source term in the equation, which extends the principal Lie algebras. We will be looking at both the preliminary group classification and the direct group classifications of this transient state problem. Finally, we will be constructing intermediate solutions based on the necessary reductions. This paper provides a more in-depth understanding of the dynamics of transient heat conduct problems, especially in relation to heat transfer via straight fins.

PUFFING AND MICRO-EXPLOSION IN COMPOSITE MULTI-COMPONENT DROPLETS: NEW APPROACHES TO MODELLING THE PROCESSES

S. S. Sazhin^{1,2}, D. V. Antonov², P. A. Strizhak²

¹*Advanced Engineering Centre, School of Architecture, Technology and Engineering,
University of Brighton, Brighton, United Kingdom*

²*National Research Tomsk Polytechnic University*

Recent developments in the modelling of puffing and micro-explosions in composite multi-component droplets are reviewed. The focus is on simple models, compared with Direct Numerical Simulations, which, despite their simplicity, are able to capture the most significant features of the phenomena. These models are based on the analytical solutions to the one-dimensional heat transfer and component diffusion equations in a composite droplet, assuming that a spherical water sub-droplet is placed exactly in the centre of a spherical fuel droplet [1]. The analytical solution to these equations were obtained, implemented into the numerical code, and used at each time step of the calculations. The effects of thermal swelling and evaporation, using the Abramzon and Sirignano model (see [1] for the details), are considered. The radiative heating of the droplet is considered assuming that the droplet is semi-transparent. The effect of a supporting wire is taken into account assuming that heat supplied from the wire is distributed instantaneously and homogeneously throughout the whole droplet volume. The effect of relative movement between the droplet and gas is considered using a non-self-consistent model, in which this effect on the Nusselt and Sherwood numbers was taken into account but not on the recirculation inside the droplet. The start of puffing/micro-explosion is linked with the time instant when the temperature at the water/rapeseed oil interface reaches the water nucleation temperature. The model predictions are shown to agree with experimental data. The results of adjustment of these models for use in practical engineering applications are discussed [2].

Financial support received from the Tomsk Polytechnic University development program, Priority 2030 (Priority-2030-NIP/EB-038-1308-2022) is gratefully acknowledged. The research presented in the paper was initiated during work on a project supported by the Royal Society (UK) (Grant no. IEC 192007).

ЛИТЕРАТУРА

1. Sazhin S.S. *Droplets and Sprays: Simple Models of Complex Processes*. Springer (Series 'Mathematical Engineering'), 2022
2. Antonov D.V., Strizhak P.A., Shchepakina E.A., Sobolev V.A., Sazhin S.S. *A combined analytical/numerical approach to the modelling of the processes leading to puffing and micro-explosion in a composite multi-component fuel/water droplet*. Atomization and Sprays. 2024 (in press)

HEATING AND EVAPORATION OF SESSILE DROPLETS: NEW APPROACHES TO MODELLING THE PROCESSES

S. S. Sazhin^{1,2,3}, D. V. Antonov², E. M. Starinskaya^{3,4}, V. V. Terekhov³,
S. V. Starinskiy^{3,4,5}

¹*Advanced Engineering Centre, School of Architecture, Technology and Engineering, University of Brighton, Brighton, United Kingdom*

²*National Research Tomsk Polytechnic University*

³*Kutateladze Institute of Thermophysics, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk*

⁴*Novosibirsk State University*

⁵*Theoretical and Physical Chemistry Institute, National Hellenic Research Foundation, Athens, Greece*

New advanced and simple two-dimensional (2D) and one-dimensional (1D) models of sessile droplet heating and cooling and evaporation, suggested and described in [1, 2], are reviewed. The one-dimensional (1D) model is based on the assumption that heat supplied from the supporting surface is homogeneously and instantaneously spread throughout the droplet. Both new 2D models consider the spatial distribution of this heat. The advanced 2D model is based on the numerical solution to the equations of conservation of mass, momentum, vapour mass fraction, and energy with standard boundary and initial conditions, using COMSOL Multiphysics code. Simple 2D and 1D models assume that droplets retain their truncated spherical shapes during the evaporation process. In the 1D model, the analytical solution to the 1D heat conduction equation inside the droplet is implemented into a numerical code. In the simple 2D model, the 2D version of this equation is solved numerically using COMSOL Multiphysics code. Droplet deformation, temperature gradients along the droplet surface, and the Marangoni effect are not considered in this model. The predictions of all three models are validated using in-house experimental data obtained from studies of sessile droplets of distilled water with initial volumes of 5.2, 3.2, and 2.2 μL , at an ambient temperature of 298.15 K, and at atmospheric pressure.

The authors would like to thank the Russian Science Foundation (Grant 23-73-30004) for financial support. The research presented in the paper was initiated during work on a project supported by the Royal Society (UK) (Grant no. IEC 192007).

ЛИТЕРАТУРА

1. Antonov D. V., Fedorenko R. M., Strizhak P. A., Sazhin S. S. *A simple model of heating and evaporation of droplets on a superhydrophobic surface*. Int. J of Heat and Mass Transfer 2023, V. 201 123568.
2. Antonov D. V., Starinskaya E. M., Starinskiy, S. V., Miskiv N. B., Terekhov V. V., Strizhak P. A., Sazhin S. S. *Heating and evaporation of sessile droplets: simple and advanced models* Langmuir 2024 doi.org/10.1021/acs.langmuir.3c03171

**SHORT-WAVE ASYMPTOTIC SOLUTIONS OF STRICTLY
HYPERBOLIC SYSTEMS WITH ABRUPTLY VARYING
COEFFICIENTS**

A. I. Shafarevich

Lomonosov Moscow State University

It is well known that short-wave asymptotic solutions of linear strictly hyperbolic systems, the coefficients of which do not depend on a small parameter (or regularly depend on it), can be described in terms of the Maslov canonic operator on a number of Lagrangian surfaces. These surfaces are invariant with respect to Hamiltonian fields whose Hamiltonians satisfy the characteristic equation for the leading symbol of the hyperbolic system.

If the coefficients depend singularly on a small parameter (i.e., their weak limits are not smooth), the solution has a more complex form near the singularity support of this weak limit; in the general case, the corresponding theory is not developed. In the talk, we describe the asymptotics of the solution to the Cauchy problem in the case when the coefficients change abruptly, i.e. their weak limits are discontinuous on some hypersurface in the space of independent variables. In this situation, the Lagrangian surfaces are rearranged at points corresponding to the specified surface, and the rearrangement is controlled by the geometry of the projective hypersurface in the dual space, determined by the highest symbol of the system. It is proved that the solution is expanded into an asymptotic series, the terms of which are expressed through the Maslov canonic operator on rearranged Lagrangian surfaces; the functions to which these operators are applied satisfy the auxiliary scattering problem for a linear system of ordinary differential equations, and the coefficients of the monodromy operator of such a problem determine the coefficients of reflection and transmission of waves through the coefficient jump surface.

DYNAMICAL ANALYSIS OF THE IONIC FLOWS THROUGH ION CHANNELS VIA POISSON-NERNST-PLANCK MODEL EQUATIONS**L. Zhang, Y. Wang***Shandong University of Science and Technology, Qingdao, China*

Ion channels embedded in cell membrane are important channels for maintaining the material exchange in the internal and external environment of cells. The ionic flow produces electrical signals that control many life-related biological functions. It is critical to grasp the dynamic properties of ion flow through ion channels. Poisson-Nernst-Planck (PNP) system is a basic continuous model based on treating the process of ions passing through ion channels as the free diffusion of charged particles in dilute solutions. This paper reviews how PNP system is established, and introduces the dynamic system research method of PNP system based on geometric singular perturbation theory and asymptotic analysis method. It mainly expounds a series of research results of PNP system in recent years, the challenges it faces and the research problems that need to be solved further.

Научное издание

ВСЕРОССИЙСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ, ПОСВЯЩЕННАЯ
105-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ АКАДЕМИКА РАН
Л. В. ОВСЯННИКОВА

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД**

13 – 17 мая 2024 г.

Новосибирск, Россия

Тезисы докладов

Оригинал-макет подготовлен
Институтом гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН

Дизайн обложки В. Ю. Антонов

Подписано в печать 02.05.2024

Усл. печ. л. 22.9

Тираж 30 экз.

Формат 60×84 1/8.

Заказ № 77.

Сибирское отделение РАН
630090, г. Новосибирск, просп. акад. Лаврентьева, 17
Отпечатано в Сибирском отделении РАН
630090, г. Новосибирск, Морской просп., 2
Тел. 330-84-66, e-mail: e.lyannaya@sb-ras.ru