Импульсные уравнения Кельвина-Фойгта

С.Н. Антонцев, И.В. Кузнецов

ИГиЛ СО РАН

Доклад на конференции “Математические проблемы механики сплошных сред посвященной 105-летию со дня рождения академика Л.В. Овсянникова, 13-17 мая 2024"

Аннотация

В докладе будут рассмотрены уравнения Кельвина-Фойгта с импульсными членами. Отметим, что подобные задачи возникают в работах Ладыженской, Осколкова, Павловского, где сложная реология соответствует неньютоновским жидкостям. Новизна подобных уравнений заключается в умножении коэффициентов уравнений на аппроксимацию дельта функции Дирака по времени. Обычно, дельта функция присутствуют в правой части. Если положить плотность постоянной, т.е. однородный несжимаемый случай, то это соответствует резкому изменению скорости жидкости при импульсных нагрузках. Таким образом, ускорение становиться функционалом по времени. Это может иметь отношение к импульсной неустойчивости активной жидкости, о которой будет сказано в конце доклада.

План доклада

1. Примеры импульсных ОДУ. Обычно, под импульсным уравнениями понимаются уравнения с заданными условиями на разрывах. Но здесь мы полагаем аппроксимацию дельта-функции Дирака в правой части.
2. Примеры импульсных скалярных уравнений в частных производных.
3. Импульсные уравнения Кельвина-Фойгта для однородной жидкости. Здесь плотность полагается равной 1 и аппроксимация дельта-функции Дирака умножается на неизвестное решение.
4. Уравнения Кельвина-Фойгта для неоднородной жидкости с разрывным профилем плотности.
5. Возможная импульсная неустойчивость.
6. Заключение и Список литературы

Пример уравнения Каратеодори

Рассмотрим пример

$$\dot{z}^{\varepsilon}(t) = \frac{1}{\varepsilon}\chi_{[0,\varepsilon]}(t), \quad z^{\varepsilon}(0) = y_0. \tag{1}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$z^{\varepsilon}(t) = \begin{cases} z_0 & \text{при} \quad t \leq 0, \\ z_0 + \frac{t}{\varepsilon} & \text{при} \quad 0 \leq t \leq \varepsilon, \\ z_0 + 1 & \text{при} \quad t \geq \varepsilon. \end{cases} \tag{2}$$

Тогда предельное решение имеет вид

$$z(t) = \lim_{\varepsilon \to 0+} z^{\varepsilon}(t) = \begin{cases} z_0 & \text{при} \quad t \leq 0, \\ z_0 + 1 & \text{при} \quad t > 0. \end{cases} \tag{3}$$

Дельта-функция Дирака

Отметим, что последовательность $\frac{1}{\varepsilon}\chi_{[0,\varepsilon]}(t)$ порождает семейство функционалов, которые стремятся $*$-слабо к дельта-функции Дирака $\delta_{(t=0)}$:

$$\langle \delta_{(t=0)}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} \varphi(t)\, dt = \varphi(0).$$

Отметим, что это предельное решение будет и решением уравнения

$$\dot{z}(t) = \delta_{(t=0)}, \quad z(0) = z_0, \tag{4}$$

с условием на разрыве

$$z(+0) = z(-0) + 1.$$

Пример обобщенного дифференциального уравнения

Рассмотрим пример

$$\dot{y}^{\varepsilon}(t) = \frac{1}{\varepsilon}\chi_{[0,\varepsilon]}(t) y^{\varepsilon}(t), \quad y^{\varepsilon}(0) = y_0. \tag{5}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$y^{\varepsilon}(t) = \begin{cases} y_0 & \text{при} \quad t \le 0, \\ y_0 \exp\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) & \text{при} \quad 0 \le t \le \varepsilon, \\ y_0 e & \text{при} \quad t \ge \varepsilon. \end{cases} \tag{6}$$

Тогда предельное решение имеет вид

$$y(t) = \lim_{\varepsilon \to 0+} y^{\varepsilon}(t) = \begin{cases} y_0 & \text{при} \quad t \le 0, \\ e y_0 & \text{при} \quad t > 0, \end{cases} \tag{7}$$

Пример обобщенного дифференциального уравнения

и удовлетворяет не уравнению

$$\dot{y}(t) = \delta_{(t=0)} y(t), \quad y(0) = y_0, \tag{8}$$

и, соответственно, условию на разрыве

$$y(+0) = 2y(-0),$$

а уравнению

$$\frac{d}{dt} \ln y(t) = \delta_{(t=0)}, \quad y(0) = y_0. \tag{9}$$

с условием на разрыве

$$\ln y(+0) = \ln y(-0) + 1, \text{ т.е. } y(+0) = ey(-0). \tag{10}$$

Условие на разрыве

Это условие на разрыве можно вывести иначе. Рассмотрим процедуру масштабирования

$$\overline{y}^{\varepsilon}(\vartheta) = y^{\varepsilon}(\varepsilon\vartheta), \quad \vartheta \in (0,1), \tag{11}$$

где y^{ε} есть решение уравнения (5), из которого следует уравнение

$$\overline{y}^{\varepsilon\prime}(\vartheta) = \overline{y}^{\varepsilon}(\vartheta) \tag{12}$$

на начальном слое $[0,1]$ с начальными и финальными данными

$$\overline{y}^{\varepsilon}(0) = y^{\varepsilon}(0) \text{ и } \overline{y}^{\varepsilon}(1) = y^{\varepsilon}(\varepsilon),$$

что означает

$$\ln y^{\varepsilon}(\varepsilon) = \ln y^{\varepsilon}(0) + 1, \text{ т.е. } y^{\varepsilon}(\varepsilon) = e y^{\varepsilon}(0).$$

Пример обыкновенного дифференциального неравенства

Данное неравенство

$$\dot{y}^{\varepsilon}(t) \leq \frac{1}{\varepsilon}\chi_{[0,\varepsilon]}(t)y^{\varepsilon}(t), \quad y^{\varepsilon}(0) = y_0, \tag{13}$$

позволяет получить равномерную оценку на y^{ε}:

$$\ln y^{\varepsilon}(t) \leq \ln y_0 + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \chi_{[0,\varepsilon]}(s)\, ds, \tag{14}$$

т.е.

$$y^{\varepsilon}(t) \leq y_0 e. \tag{15}$$

Импульсное параболическое уравнение

We study the Cauchy–Dirichlet problem for the $p(x,t)$-parabolic equation with the nonlinear absorption term:

$$
\begin{cases}
\partial_t u^\varepsilon = \operatorname{div}(|\nabla u^\varepsilon|^{p(x,t)-2}\nabla u^\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon}\chi_{[0,\varepsilon]}|u^\varepsilon|^{q(x,t)-2}u^\varepsilon \quad \text{in } Q_T, \\
u^\varepsilon(x,0) = u_0(x) \quad \text{in } \Omega, \qquad u^\varepsilon = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \times (0,T).
\end{cases}
\tag{16}
$$

Импульсное псевдо-параболическое уравнение

In the present paper, we study the impulsive pseudo-parabolic differential equation with nonstandard growth

$$\begin{cases} u_{nt} = \operatorname{div}(|\nabla u_n|^{p(x,t)-2}\nabla u_n) + \Delta u_{nt} \\ \quad + \varphi_n(t)\left(-|u_n|^{q(x,t)-2}u_n + |\nabla u_n|\right) \text{ for } (x,t) \in Q_T = \Omega \times (0,T), \\ u_n(x,0) := u_0(x) \text{ for } x \in \Omega, \\ u_n(x,t) := 0 \text{ for } (x,t) \in \Gamma_T = \partial\Omega \times (0,T), \end{cases} \tag{17}$$

where Ω is a bounded domain with a smooth boundary $\partial\Omega \in C^2$.

Импульсные интегро-дифференциальные псевдо-параболические уравнения

We study the multi-dimensional Cauchy–Dirichlet problem for the pseudoparabolic integro-differential Volterra equation

$$\partial_t u_n = \varkappa \partial_t \Delta_x u_n + \mu \Delta_x u_n - a\varphi_n(t)\,\gamma\Big(\int_0^t \varphi_n(s) u_n(x,s)\,ds\Big) u_n, \quad (x,t) \in \tag{18a}$$

endowed with the homogeneous boundary condition

$$u_n(x,t) = 0 \quad \text{for } (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \tag{18b}$$

and the initial condition

$$u_n(x,0) = u_0(x) \quad \text{for } x \in \Omega. \tag{18c}$$

Импульсное псевдо-гиперболическое уравнение

In the present paper we study the initial-boundary value problem for the pseudo-hyperbolic equations

$$\begin{cases} u^\varepsilon_{tt} = \Delta u^\varepsilon + \Delta u^\varepsilon_t - |u^\varepsilon_t|^{q(x,t)-2} u^\varepsilon_t + \varepsilon^{-1} \chi_{[0,\varepsilon]}(t) u^\varepsilon_t, \quad (x,t) \in Q_T, \\ u^\varepsilon(x,0) = u_0(x) \text{ in } \Omega, \\ u^\varepsilon_t(x,0) = u_1(x) \text{ in } \Omega, \\ u^\varepsilon = 0 \text{ on } \partial\Omega \times (0, T), \end{cases} \tag{19}$$

where $Q_T = \Omega \times (0, T)$ and Ω is bounded domain with smooth boundary $\partial\Omega$, the term $q(x,t) > 1$.

Импульсное псевдо-гиперболическое уравнение

In one-dimensional case this equation follows from mass and balance conservation laws

$$\begin{cases} u_t - v_x = 0, \\ v_t - \sigma(u)_x = \frac{1}{\varepsilon}\chi_{[0,\varepsilon]}(t)v - |v|^{q(x,t)-2}v + v_{xx}. \end{cases} \tag{20}$$

Импульсные уравнения Кельвина-Фойгта для однородной несжимаемой жидкости

Статья по этой системе была принята к печати в ПМТФ. Здесь мы предполагаем, что $\rho = 1$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}^\varepsilon}{\partial t} + \mathrm{div}(\boldsymbol{v}^\varepsilon \otimes \boldsymbol{v}^\varepsilon) = \nabla\pi + \mu\Delta\boldsymbol{v}^\varepsilon + \kappa\Delta\boldsymbol{v}^\varepsilon_t + \frac{1}{\varepsilon}\chi_{[0,\varepsilon]}(t)\boldsymbol{v}^\varepsilon, \tag{21}$$

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{v}^\varepsilon = 0 \quad \text{в } Q_T, \tag{22}$$

$$\boldsymbol{v}^\varepsilon\big|_{t=0} = \boldsymbol{v}_0, \quad \boldsymbol{v}^\varepsilon\big|_{\Gamma_T} = \boldsymbol{0} \tag{23}$$

Слабое решение уравнений Кельвина-Фойгта

Вектор-функция $\boldsymbol{v}^\varepsilon = \boldsymbol{v}^\varepsilon(\boldsymbol{x}, t)$ называется *регулярным слабым обобщенным решением* задачи (41)–(43), если выполняются

1) условия регулярности $\boldsymbol{v}^\varepsilon \in L^\infty(0, T; \boldsymbol{V}^2(\Omega))$, $\partial_t \boldsymbol{v}^\varepsilon \in L^2(0, T; \boldsymbol{V}^1(\Omega))$,

2) интегральное равенство

$$\int_{Q_T} \big(\partial_t \boldsymbol{v}^\varepsilon \cdot \boldsymbol{\phi} + \mathrm{div}_x(\boldsymbol{v}^\varepsilon \otimes \boldsymbol{v}^\varepsilon) \cdot \boldsymbol{\phi} + \mu \nabla_x \boldsymbol{v}^\varepsilon : \nabla_x \boldsymbol{\phi} + \varkappa \nabla_x \partial_t \boldsymbol{v}^\varepsilon : \nabla_x \boldsymbol{\phi}\big)\, d\boldsymbol{x} dt = \int_0^T \frac{1}{\varepsilon} \chi_{[0,\varepsilon]}(t) \int_\Omega \boldsymbol{v}^\varepsilon \cdot \boldsymbol{\phi}\, d\boldsymbol{x} dt \tag{24}$$

для всевозможных пробных вектор-функций $\boldsymbol{\phi} \in L^\infty(0, T; \boldsymbol{V}^2(\Omega))$, удовлетворяющих условию $\partial_t \boldsymbol{\phi} \in L^2(0, T; \boldsymbol{V}^1(\Omega))$,

3) начальное условие (43) в смысле сильного следа в $\boldsymbol{H}(\Omega)$, т.е.

$$\|\boldsymbol{v}^{\varepsilon}(\cdot,t)-\boldsymbol{v}_0(\cdot)\|_{\boldsymbol{H}(\Omega)} \xrightarrow[t\to 0+]{} 0. \tag{25}$$

Здесь мы используем следующие обозначения

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}(\Omega) := \left\{\boldsymbol{v} \in C_0^{\infty}(\Omega)^d : \ \mathrm{div}_x \boldsymbol{v} = 0\right\};$$

$\boldsymbol{H}(\Omega) :=$ замыкание $\boldsymbol{\mathcal{V}}(\Omega)$ по норме пространства $L^2(\Omega)^d$;

$\boldsymbol{V}^l(\Omega) :=$ замыкание $\boldsymbol{\mathcal{V}}(\Omega)$ по норме пространства $W^{l,2}(\Omega)^d, l = 1,$

Метод Галеркина

Вводим в рассмотрение $\{\psi_i\}_{i=1,2,\dots}$ — полную в $\boldsymbol{V}^2(\Omega)$ линейно независимую систему, ортонормированную в $\boldsymbol{H}(\Omega)$, состоящую из решений спектральной задачи

$$\int_\Omega \nabla_x \psi_i : \nabla_x \boldsymbol{\Phi}\, d\boldsymbol{x} = \lambda_i \int_\Omega \psi_i \cdot \boldsymbol{\Phi}\, d\boldsymbol{x} \quad \forall\, \boldsymbol{\Phi} \in \boldsymbol{V}^2(\Omega), \quad i = 1, 2, \dots . \tag{26}$$

Регулярное слабое решение $\boldsymbol{v}^\varepsilon$ задачи (41)–(43) конструируется как предел последовательности конечномерных галеркинских приближений

$$\boldsymbol{v}^\varepsilon = \lim_{m\to+\infty} \boldsymbol{v}^{\varepsilon,(m)}, \tag{27a}$$

где

$$\boldsymbol{v}^{\varepsilon,(m)}(\cdot, t) = \sum_{i=1}^{m} v_{i,m\varepsilon}(t)\psi_i(\cdot), \quad t \in [0, T]. \tag{27b}$$

Метод Галеркина

Неизвестные коэффициенты $v_{i,mn}(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ находятся как решения системы Галеркина — задачи Коши для системы m нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} (1+\varkappa\lambda_i)\dfrac{dv_{i,m\varepsilon}(t)}{dt} = -\displaystyle\int_\Omega \operatorname{div}_x(\boldsymbol{v}^{\varepsilon,(m)} \otimes \boldsymbol{v}^{\varepsilon,(m)}) \cdot \boldsymbol{\psi}_i d\boldsymbol{x} \\ -\displaystyle\int_\Omega \big(\mu\nabla_x \boldsymbol{v}^{\varepsilon,(m)} : \nabla_x \boldsymbol{\psi}_i - \frac{1}{\varepsilon}\chi_{[0,\varepsilon]}(t)\boldsymbol{v}^{\varepsilon,(m)} \cdot \boldsymbol{\psi}_i\big) d\boldsymbol{x}, \\ v_{i,m\varepsilon}(0) = v_{0,i}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \end{cases} \tag{28}$$

где постоянные $v_{0,i}$ — это коэффициенты Фурье вектор-функции $\boldsymbol{v}_0$ по базису $\{\boldsymbol{\psi}_i\}_{i=1,2,\ldots}$. Имеем

$$v_{0,i} = \int_\Omega \boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{\psi}_i \, d\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{v}_0^{(m)} = \sum_{i=1}^m v_{0,i}\boldsymbol{\psi}_i \xrightarrow[m\to+\infty]{} \boldsymbol{v}_0 \quad \text{сильно в } \boldsymbol{V}^2(\Omega).$$

Первая энергетическая оценка

Умножение на $\boldsymbol{v}^{\varepsilon,(m)}$, т.е. умножение на $v_{i,m\varepsilon}$ и суммирование по i

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\boldsymbol{v}^{\varepsilon,(m)}|^2\,dx + \frac{\varkappa}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla \boldsymbol{v}^{\varepsilon,(m)}|^2\,dx \\
&+ \int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{v}^{\varepsilon,(m)} \otimes \boldsymbol{v}^{\varepsilon})\boldsymbol{v}^{\varepsilon,(m)}dx \\
&+ \mu \int_\Omega |\nabla \boldsymbol{v}^{\varepsilon,(m)}|^2 dx = -\frac{1}{\varepsilon}\chi_{[0,\varepsilon]}(t)\int_\Omega |\boldsymbol{v}^{\varepsilon,(m)}|^2 dx,
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Получим равномерную ограниченность $\boldsymbol{v}^{\varepsilon,(m)}$ по ε в пространстве $L^\infty(0,T;\boldsymbol{V}^1(\Omega))$.

Первая энергетическая оценка

Здесь

$$\int_\Omega \mathrm{div}(\boldsymbol{v}^{\varepsilon,(m)} \otimes \boldsymbol{v}^{\varepsilon})\boldsymbol{v}^{\varepsilon,(m)} dx = 0.$$

Вводим функцию $Y(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\boldsymbol{v}^{\varepsilon,(m)}|^2\, dx + \frac{\varkappa}{2}\int_\Omega |\nabla \boldsymbol{v}^{\varepsilon,(m)}|^2\, dx$ и сводим к неравенству

$$\dot{Y}(t) \leq \frac{1}{\varepsilon}\chi_{[0,\varepsilon]}(t)Y(t).$$

Вторая энергетическая оценка

Умножение на $\Delta \boldsymbol{v}^{\varepsilon,(m)}$, т.е. умножение на $-\lambda_i v_{i,m\varepsilon}$ и суммирование по i

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla \boldsymbol{v}^{\varepsilon,(m)}|^2\,dx + \frac{\varkappa}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\Delta \boldsymbol{v}^{\varepsilon,(m)}|^2\,dx \\
&-\int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{v}^{\varepsilon,(m)}\otimes \boldsymbol{v}^{\varepsilon,(m)})\Delta \boldsymbol{v}^{\varepsilon,(m)} dx \\
&+\mu\int_\Omega |\Delta \boldsymbol{v}^{\varepsilon,(m)}|^2 dx = -\frac{1}{\varepsilon}\chi_{[0,\varepsilon]}(t)\int_\Omega |\nabla \boldsymbol{v}^{\varepsilon,(m)}|^2 dx,
\end{aligned}
\tag{30}
$$

Получим равномерную ограниченность $\boldsymbol{v}^{\varepsilon,(m)}$ по ε в пространстве $L^\infty(0,T;\boldsymbol{V}^2(\Omega))$.

Третья энергетическая оценка

Умножение на $\boldsymbol{v}_t^{\varepsilon,(m)}$, т.е. умножение на $v'_{i,m\varepsilon}$ и суммирование по i

$$\int_\Omega |\boldsymbol{v}_t^{\varepsilon,(m)}|^2\,dx + \varkappa \int_\Omega |\nabla \boldsymbol{v}_t^{\varepsilon,(m)}|^2\,dx + \int_\Omega \mathrm{div}(\boldsymbol{v}^{\varepsilon,(m)} \otimes \boldsymbol{v}^{\varepsilon,(m)})\boldsymbol{v}_t^{\varepsilon,(m)} dx = +\mu \int_\Omega \Delta \boldsymbol{v}^{\varepsilon,(m)} \boldsymbol{v}_t^{\varepsilon,(m)} dx - \frac{1}{\varepsilon}\chi_{[0,\varepsilon]}(t) \int_\Omega \boldsymbol{v}^{\varepsilon,(m)} \cdot \boldsymbol{v}_t^{\varepsilon,(m)} dx, \tag{31}$$

Получим равномерную ограниченность $\boldsymbol{v}_t^{\varepsilon,(m)}$ по ε в пространстве $L^1(0, T; \boldsymbol{V}^1(\Omega))$.

Относительная компактность семейства решений

Применение леммы Обена-Лионса

Здесь мы используем $\|\boldsymbol{v}^{\varepsilon,(m)}\|_{L^\infty(0,T;\boldsymbol{V}^2(\Omega))} \leq C_0$, $\|\partial_t \boldsymbol{v}^{\varepsilon,(m)}\|_{L^1(0,T;\boldsymbol{V}^1(\Omega))} \leq C_1$ и компактное вложение $\boldsymbol{V}^2(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \boldsymbol{V}^1(\Omega)$.

Будем считать, что пробная вектор-функция ϕ в интегральном равенстве (24) обращается в нуль в окрестности сечения $\{t = T\}$, проинтегрируем в первом и четвертом слагаемых в левой части (24) по t по частям, отделив интегралы по сегментам $(0, \varepsilon)$ и (ε, T) друг от друга. Получим:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\varepsilon \int_\Omega \big(-\boldsymbol{v}^\varepsilon \cdot \partial_t \boldsymbol{\phi} - (\boldsymbol{v}^\varepsilon \otimes \boldsymbol{v}^\varepsilon) : \nabla_x \boldsymbol{\phi} + \mu \nabla_x \boldsymbol{v}^\varepsilon : \nabla_x \boldsymbol{\phi} \\
&- \varkappa \nabla_x \boldsymbol{v}^\varepsilon : \nabla_x \partial_t \boldsymbol{\phi} + \frac{1}{\varepsilon} \chi_{[0,\varepsilon]}(t) \boldsymbol{v}^\varepsilon \cdot \phi\big) \, d\boldsymbol{x} dt \\
&- \int_\Omega \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{x}) \cdot \phi(\boldsymbol{x}, 0) \, d\boldsymbol{x} - \varkappa \int_\Omega \nabla_x \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{x}) : \nabla_x \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}, 0) \, d\boldsymbol{x} \\
&+ \int_\varepsilon^T \int_\Omega \big(-\boldsymbol{v}^\varepsilon \cdot \partial_t \boldsymbol{\phi} - (\boldsymbol{v}^\varepsilon \otimes \boldsymbol{v}^\varepsilon) : \nabla_x \boldsymbol{\phi} + \mu \nabla_x \boldsymbol{v}^\varepsilon : \nabla_x \boldsymbol{\phi} \\
&- \varkappa \nabla_x \boldsymbol{v}^\varepsilon : \nabla_x \partial_t \boldsymbol{\phi}\big) \, d\boldsymbol{x} dt = 0.
\end{aligned} \tag{32}
$$

В (32) на интервалах $\{0 < t < \varepsilon\}$ и $\{\varepsilon < t \leq T\}$ производим следующие замены независимой переменной t и искомой функции $\boldsymbol{v}^\varepsilon$. На $(\varepsilon, T]$ сдвигаем шкалу времени назад и полагаем

$$\widetilde{t} := t - \varepsilon, \quad \widetilde{\boldsymbol{v}}^\varepsilon(\boldsymbol{x}, \widetilde{t}) := \boldsymbol{v}^\varepsilon(\boldsymbol{x}, t) \equiv \boldsymbol{v}^\varepsilon(\boldsymbol{x}, \widetilde{t} + \varepsilon) \quad \text{при } t \in (\varepsilon, T].$$

Отметим, что $\widetilde{t} \in (0, t - \varepsilon]$, $dt = d\widetilde{t}$, $\partial_t = \partial_{\widetilde{t}}$ и $t = \widetilde{t} + \varepsilon$. Далее, следуя идее рескейлинга, берем

$$\vartheta := \varepsilon^{-1} t, \quad \overline{\boldsymbol{v}}^\varepsilon(\boldsymbol{x}, \vartheta) := \boldsymbol{v}^\varepsilon(\boldsymbol{x}, t) \equiv \boldsymbol{v}^\varepsilon(\boldsymbol{x}, \varepsilon\vartheta) \quad \text{при } t \in [0, \varepsilon].$$

Отметим, что $\vartheta \in [0, 1]$, $dt = \varepsilon\, d\vartheta$, $\partial_t = \varepsilon^{-1}\partial_\vartheta$ и $t = \varepsilon\vartheta$.

На начальном слое мы имеем дело с уравнениями

$$\overline{\boldsymbol{v}}^{\varepsilon}_{\vartheta}(\boldsymbol{x},\vartheta) + \varepsilon \operatorname{div}(\overline{\boldsymbol{v}}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},\vartheta) \otimes \overline{\boldsymbol{v}}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},\vartheta)) - \varepsilon\mu\Delta_x \overline{\boldsymbol{v}}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},\vartheta)$$
$$- \varkappa\Delta_x \overline{\boldsymbol{v}}^{\varepsilon}_{\vartheta}(\boldsymbol{x},\vartheta) - \overline{\boldsymbol{v}}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},\vartheta) = 0,$$

а вне начального слоя мы имеем дело с уравнениями

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}^{\varepsilon}_{\widetilde{t}}(\boldsymbol{x},\widetilde{t}) + \operatorname{div}(\widetilde{\boldsymbol{v}}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},\widetilde{t}) \otimes \widetilde{\boldsymbol{v}}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},\widetilde{t})) - \mu\Delta_x \widetilde{\boldsymbol{v}}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},\widetilde{t})$$
$$- \varkappa\Delta_x \widetilde{\boldsymbol{v}}^{\varepsilon}_{\vartheta}(\boldsymbol{x},\widetilde{t}) = 0.$$

Таким образом, (32) принимает вид

$$\int_0^1 \int_\Omega \Big(-\overline{\boldsymbol{v}}^\varepsilon(\boldsymbol{x},\vartheta)\cdot\partial_\vartheta\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x},\varepsilon\vartheta)$$
$$-\varepsilon(\overline{\boldsymbol{v}}^\varepsilon(\boldsymbol{x},\vartheta)\otimes\overline{\boldsymbol{v}}^\varepsilon(\boldsymbol{x},\vartheta)):\nabla_x\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x},\varepsilon\vartheta)+\varepsilon\mu\nabla_x\overline{\boldsymbol{v}}^\varepsilon(\boldsymbol{x},\vartheta):\nabla_x\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x},\varepsilon\vartheta)$$
$$-\varkappa\nabla_x\overline{\boldsymbol{v}}^\varepsilon(\boldsymbol{x},\vartheta):\nabla_x\partial_\vartheta\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x},\varepsilon\vartheta)-\overline{\boldsymbol{v}}^\varepsilon(\boldsymbol{x},\vartheta)\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x},\varepsilon\vartheta)\Big)\,d\boldsymbol{x}d\vartheta$$
$$-\int_\Omega \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x},0)\,d\boldsymbol{x}-\varkappa\int_\Omega\nabla_x\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{x}):\nabla_x\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x},0)\,d\boldsymbol{x}$$
$$+\int_0^{T-\varepsilon}\int_\Omega\Big(-\widetilde{\boldsymbol{v}}^\varepsilon(\boldsymbol{x},\widetilde{t})\cdot\partial_{\widetilde{t}}\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x},\widetilde{t}+\varepsilon)$$
$$-(\widetilde{\boldsymbol{v}}^\varepsilon(\boldsymbol{x},\widetilde{t})\otimes\widetilde{\boldsymbol{v}}^\varepsilon(\boldsymbol{x},\widetilde{t})):\nabla_x\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x},\widetilde{t}+\varepsilon)$$
$$+\mu\nabla_x\widetilde{\boldsymbol{v}}^\varepsilon(\boldsymbol{x},\widetilde{t}):\nabla_x\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x},\widetilde{t}+\varepsilon)$$
$$-\varkappa\nabla_x\widetilde{\boldsymbol{v}}^\varepsilon(\boldsymbol{x},\widetilde{t}):\nabla_x\partial_{\widetilde{t}}\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x},\widetilde{t}+\varepsilon)\Big)\,d\boldsymbol{x}d\widetilde{t}=0. \tag{33}$$

Ввиду предстоящего в дальнейшем предельного перехода при $\varepsilon \to +0$, в (33) берем пробную вектор-функцию $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}^\varepsilon(\boldsymbol{x}, t)$, зависящую от n, в следующем виде:

$$\boldsymbol{\phi}^\varepsilon(\boldsymbol{x}, t) = \begin{cases} \overline{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{x}, \vartheta) \equiv \overline{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{x}, t/\varepsilon) & \text{при } t \in [0, \varepsilon]; \\ \widetilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{x}, \widetilde{t}) \equiv \widetilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{x}, t - \varepsilon) & \text{при } t \in (\varepsilon, T], \end{cases}$$

где $\overline{\boldsymbol{\phi}} = \overline{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{x}, \vartheta)$ и $\widetilde{\boldsymbol{\phi}} = \widetilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{x}, \widetilde{t})$ — произвольные гладкие пробные вектор-функции, определенные на $\overline{\Omega} \times [0, 1]$ и $\overline{\Omega} \times (0, T]$, соответственно, такие что $\overline{\boldsymbol{\phi}} = \widetilde{\boldsymbol{\phi}} \equiv 0$ в окрестности $\partial\Omega$, $\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \equiv 0$ в окрестности сечения $\{\widetilde{t} = T\}$ и выполняется условие согласования

$$\overline{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{x}, 1 - 0) = \widetilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{x}, 0+). \tag{34}$$

В силу этого условия обобщенные производные $\partial_t \boldsymbol{\phi}^\varepsilon$ и $\nabla_x \partial_t \boldsymbol{\phi}^\varepsilon$ существенно ограничены в Q_T, откуда $\boldsymbol{\phi}^\varepsilon \in L^2(0, T; \boldsymbol{V}^1(\Omega))$, $\partial_t \boldsymbol{\phi}^\varepsilon \in L^2(0, T; \boldsymbol{V}^1(\Omega))$ и, следовательно, $\boldsymbol{\phi}^\varepsilon$ является допустимой пробной вектор-функцией:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_\Omega \big(-\overline{\boldsymbol{v}}^\varepsilon(\boldsymbol{x},\vartheta)\cdot\partial_\vartheta\overline{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{x},\vartheta) - \varepsilon(\overline{\boldsymbol{v}}^\varepsilon(\boldsymbol{x},\vartheta)\otimes\overline{\boldsymbol{v}}^\varepsilon(\boldsymbol{x},\vartheta)) : \nabla_x\overline{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{x},\vartheta)\\
&\qquad + \varepsilon\mu\nabla_x\overline{\boldsymbol{v}}^\varepsilon(\boldsymbol{x},\vartheta) : \nabla_x\overline{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{x},\vartheta) - \varkappa\nabla_x\overline{\boldsymbol{v}}^\varepsilon(\boldsymbol{x},\vartheta) : \nabla_x\partial_\vartheta\overline{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{x},\vartheta)\\
&+ \overline{\boldsymbol{v}}^\varepsilon(x,\vartheta)\overline{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{x},\vartheta)\big)\,d\boldsymbol{x}d\vartheta - \int_\Omega \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{x})\cdot\overline{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{x},0)\,d\boldsymbol{x}\\
&- \varkappa\int_\Omega \nabla_x\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{x}) : \nabla_x\overline{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{x},0)\,d\boldsymbol{x} + \int_0^{T-\varepsilon}\int_\Omega \big(-\widetilde{\boldsymbol{v}}^\varepsilon(\boldsymbol{x},\widetilde{t})\cdot\partial_{\widetilde{t}}\widetilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{x},\widetilde{t})\\
&- (\widetilde{\boldsymbol{v}}^\varepsilon(\boldsymbol{x},\widetilde{t})\otimes\widetilde{\boldsymbol{v}}^\varepsilon(\boldsymbol{x},\widetilde{t})) : \nabla_x\widetilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{x},\widetilde{t})\\
&+ \mu\nabla_x\widetilde{\boldsymbol{v}}^\varepsilon(\boldsymbol{x},\widetilde{t}) : \nabla_x\widetilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{x},\widetilde{t}) - \varkappa\nabla_x\widetilde{\boldsymbol{v}}^\varepsilon(\boldsymbol{x},\widetilde{t}) : \nabla_x\partial_{\widetilde{t}}\widetilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{x},\widetilde{t})\big)\,d\boldsymbol{x}d\widetilde{t} = 0.
\end{aligned} \tag{35}
$$

Дополнительно замечаем, что

$$
\overline{\boldsymbol{v}}^\varepsilon(\boldsymbol{x},1-0) = \widetilde{\boldsymbol{v}}^\varepsilon(\boldsymbol{x},0+) \text{ в } \overline{\Omega} \tag{36}
$$

Предельный переход

В равенстве (35) поочередно выбираем одну из функций $\overline{\phi}$ или $\widetilde{\phi}$ равной нулю, и осуществляем предельный переход при $\varepsilon \to 0$.
Получим две задачи, которые решаются последовательно

$$\int_0^1 \int_\Omega \Big(-\overline{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x},\vartheta) \cdot \partial_\vartheta \overline{\phi}(\boldsymbol{x},\vartheta) - \varkappa \nabla_x \overline{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x},\vartheta) : \nabla_x \partial_\vartheta \overline{\phi}(\boldsymbol{x},\vartheta)$$

$$+ \overline{\boldsymbol{v}}(x,\vartheta) \overline{\phi}(\boldsymbol{x},\vartheta) \Big)\, d\boldsymbol{x} d\vartheta - \int_\Omega \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{x}) \cdot \overline{\phi}(\boldsymbol{x},0)\, d\boldsymbol{x}$$

$$- \varkappa \int_\Omega \nabla_x \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{x}) : \nabla_x \overline{\phi}(\boldsymbol{x},0)\, d\boldsymbol{x} = 0$$

Предельный переход

и

$$\int_0^T \int_\Omega \Big(-\widetilde{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x},\widetilde{t}) \cdot \partial_{\widetilde{t}}\widetilde{\phi}(\boldsymbol{x},\widetilde{t}) - (\widetilde{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x},\widetilde{t}) \otimes \widetilde{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x},\widetilde{t})) : \nabla_x \widetilde{\phi}(\boldsymbol{x},\widetilde{t})$$
$$+ \mu \nabla_x \widetilde{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x},\widetilde{t}) : \nabla_x \widetilde{\phi}(\boldsymbol{x},\widetilde{t}) - \varkappa \nabla_x \widetilde{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x},\widetilde{t}) : \nabla_x \partial_{\widetilde{t}} \widetilde{\phi}(\boldsymbol{x},\widetilde{t})\Big)\, d\boldsymbol{x} d\widetilde{t} = 0,$$

которые решаются последовательно, учитывая условие

$$\overline{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}, 1-0) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, 0+) \text{ в } \overline{\Omega} \tag{37}$$

Предельный переход в смысле распределений

Получим две начально краевых задачи

$$\frac{\partial \overline{\boldsymbol{v}}}{\partial \vartheta} = \nabla \overline{\pi} + \kappa \Delta \overline{\boldsymbol{v}}_{\vartheta} + \overline{\boldsymbol{v}}, \tag{38}$$

$$\operatorname{div} \overline{\boldsymbol{v}} = 0 \quad \text{в } Q_1, \tag{39}$$

$$\overline{\boldsymbol{v}}\big|_{\vartheta=0} = \boldsymbol{v}_0, \quad \overline{\boldsymbol{v}}\big|_{\Gamma_1} = \boldsymbol{0} \tag{40}$$

и

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}) = \nabla \pi + \mu \Delta \boldsymbol{v} + \kappa \Delta \boldsymbol{v}_t, \tag{41}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \quad \text{в } Q_T, \tag{42}$$

$$\boldsymbol{v}\big|_{t=0} = \overline{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}, 1), \quad \boldsymbol{v}\big|_{\Gamma_T} = \boldsymbol{0} \tag{43}$$

Уравнения Кельвина-Фойгта с разрывным профилем плотности

Рассмотрим уравнения

$$(\rho \boldsymbol{v})_t + \rho \operatorname{div}(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}) = -\nabla \pi + \operatorname{div}(\mu \nabla \boldsymbol{v} + \varkappa \nabla \boldsymbol{v}_t) \text{ в } Q_T, \tag{44}$$

с условием несжимаемости

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \tag{45}$$

и с уравнением баланса массы

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = -\varepsilon^{-1} \rho \mathbf{1}_{[0,\varepsilon]}(t) \text{ в } Q_T. \tag{46}$$

Здесь мы выбираем частное решение $\rho^\varepsilon(t) = \rho_0 \exp\left(-\varepsilon^{-1} \int_0^t \mathbf{1}_{[0,\varepsilon]}(s)\, ds\right)$.

Импульсная неустойчивость

Каждая частица дает вклад как $\delta_{(x=x_i)}\delta_{(t=t_j)}\alpha_{ij}\boldsymbol{(}x_i, t_j)$. Тогда мы рассматриваем сумму источников $\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\delta_{(x=x_i)}\delta_{(t=t_j)}\alpha_{ij}\boldsymbol{v}(x_i, t_j)$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_t + \operatorname{div}(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v}) = \nabla\pi + \mu\Delta\boldsymbol{v} + \kappa\Delta\boldsymbol{v}_t \\ + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\delta_{(x=x_i)}\delta_{(t=t_j)}\alpha_{ij}\boldsymbol{v}(x_i, t_j). \end{aligned} \tag{47}$$

In the present report I deal with abstract mathematical structures. Namely, I deal with integral effect of multiple point sources $\delta_{(x=x_i)}$ on the hyperplane $t = \mathrm{const}$. We deal with the following limit

$$\sum_{i=1}^{N} \mathrm{mes}(\Omega_i)\beta(x_i)\delta_{(x=x_i)} \rightharpoonup T_\beta$$

in the sense of $*$-weak convergence in the domain Ω, where $\{\Omega_i\}$ is the partition of the domain Ω, T_β is a functional acting as $T_\beta(\varphi) = \int_\Omega \varphi\beta\, dx$.

Заключение

В докладе были рассмотрены примеры обыкновенных дифференциальных уравнений. Уравнения Кельвина-Фойгта содержали импульсные члены в однородном и неоднородном случаях.

Работа была выполнена за счет проекта РНФ № 23-21-00381 "Нелинейная динамика неоднородных и многокомпонентных сред"

- S. N. Antontsev, H. B. de Oliveira, Kh. Khompysh, The classical Kelvin-Voigt problem for incompressible fluids with unknown non-constant density: existence, uniqueness and regularity // Nonlinearity. 2021. V. 34. P. 3083–3111.
- S. N. Antontsev, H. B. de Oliveira, Kh. Khompysh, Kelvin-Voigt equations for incompressible and nonhomogeneous fluids with anisotropic viscosity, relaxation and damping // Nonlinear Differ. Equ. Appl. 2022. V. 29. No. 60.
- S. Antontsev, I. Kuznetsov, S. Sazhenkov, S. Shmarev, Strong solutions of a semilinear impulsive pseudoparabolic equation with an infinitesimal initial layer // J. Math. Anal. Appl. 2024. V. 530, Is. 1. No. 127751.
- I. Kuznetsov, S. Sazhenkov, Weak solutions of impulsive pseudoparabolic equations with an infinitesimal transition layer // Nonlinear Anal. TMA. 2023. V. 228. No. 113190.