## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ СМЕСИ ГАЗОВ И ИЗБИРАТЕЛЬНО ПРОНИЦАЕМЫХ МИКРОСФЕР

**А.С. Верещагин, В.М. Фомин**

***Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН 630090, Новосибирск, Россия***

**Введение.** В настоящее время в промышленном масштабе гелий извлекают из природного газа с помощью криогенной технологии, физическую основу которой составляет конденсация углеводородных фракций, являющихся основными компонентами природного газа. В результате выделение небольших объемов гелия из природного газа требует высоких энергетических и капитальных затрат [1].

Альтернативной заменой криогенной технологии может являться принципиально новая мембранно-сорбционная технология, которая может найти успешное применение для извлечения гелия из природного газа газоконденсатных месторождений. Эта технология, подтвержденная авторами проекта в патентах РФ, основана на экспериментально подтвержденной способности полых проницаемых сферических частиц (микросфер/ценосфер) избирательно поглощать гелий из гелиеносных газов [2], а затем выделять его и накапливать в виде концентрата с высоким содержанием гелия. Этот метод может быть конкурентоспособной альтернативой криогенным и мембранным технологиям в силу простоты конструкции оборудования, меньших энергетических и капитальных затрат, а также благодаря цикличности разнонаправленных процессов сорбции и десорбции, предотвращающей поверхностное загрязнение полых проницаемых сферических частиц (микросфер/ценосфер). Высокая селективность разделения смеси гелий-метан является отличительной особенностью силикатных стекол, газопроницаемость которых также зависит от их состава.

**Результаты и обсуждения.** Для описания процесса сорбции гелия микросферами разработаны ряд математических моделей и проведены экспериментальные и теоретические исследования [3-5], позволяющие из экспериментальных данных находить требуемые константы проницаемости материалов.

Интерес представляет строгий вывод модели, описывающей нестационарные эффекты, происходящие при одновременном движении смеси гелиеносного газа и микросфер, в качестве сорбента гелия. Такая модель выводится в рамках механики многофазных сред, используя подход предложенный в литературе [6,7], предполагающий проводить осреднения уравнений движения смеси газов и твердых частиц по некоторому макрообъему (см. рисунок).

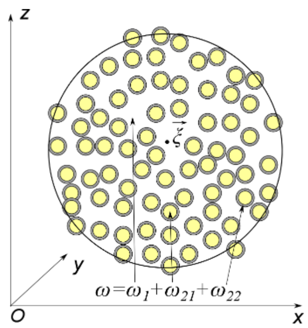
В результате такого осреднения в правых частях уравнений появляются источниковые члены и модель теряет свойство гиперболичности, но позволяет описывать систему в терминах осредненных параметров как для газовой фазы, так и для фазы частиц.

Законы сохранения массы

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\rho_{11}\rangle + div_{\vec{\xi}}\langle\rho_{11}\rangle\langle\vec{v}_1\rangle_1 = -K, \quad \frac{\partial}{\partial t}\langle\rho_{12}\rangle + div_{\vec{\xi}}\langle\rho_{12}\rangle\langle\vec{v}_1\rangle_1 = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\rho_{21}\rangle + div_{\vec{\xi}}\langle\rho_{21}\rangle\langle\vec{v}_2\rangle_2 = K, \quad \frac{\partial}{\partial t}\langle\rho_{22}^0\rangle + div_{\vec{\xi}}\langle\rho_{22}^0\rangle\langle\vec{v}_2\rangle_2 = 0,$$

где




Определение макрообъема для проведения осреднения основных уравнений
(Oxyz – лабораторная система координат; $\vec{\xi}$ – фиксированная точка пространства; $\omega_1$ – часть объема, не занятая микросферами; $\omega_{21}$ – часть объема, занимаемая полостями всех микросфер; $\omega_{22}$ – часть объема, занятая твердой оболочкой микросфер)

$$K = \frac{3C_m\beta}{Rd} m_2\left(p_{11} - p_{21}\right),$$

$$p_{11} = \left\langle\rho_{11}\right\rangle R_1\left\langle T_1\right\rangle_1, \quad p_{12} = \left\langle\rho_{12}\right\rangle R_2\left\langle T_1\right\rangle_1, \quad p_{21} = \left\langle\rho_{21}\right\rangle R_1\left\langle T_2\right\rangle_2,$$

$$p_1 = p_{11} + p_{12}.$$

Законы сохранения импульса

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle\rho_1\right\rangle \left\langle\vec{v}_1\right\rangle_1 + div_{\vec{\xi}}\left\langle\rho_1\right\rangle \left\langle\vec{v}_1\right\rangle_1 \otimes \left\langle\vec{v}_1\right\rangle_1 = -\nabla p_1 - \vec{M}_{12} + \vec{f},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle\rho_2\right\rangle \left\langle\vec{v}_2\right\rangle_2 + div_{\vec{\xi}}\left\langle\rho_2\right\rangle \left\langle\vec{v}_2\right\rangle_2 \otimes \left\langle\vec{v}_2\right\rangle_2 = \vec{M}_{12} - \vec{f},$$

где

$$\left\langle\rho_1\right\rangle = \left\langle\rho_{11}\right\rangle + \left\langle\rho_{12}\right\rangle, \quad \left\langle\rho_2\right\rangle = \left\langle\rho_{21}\right\rangle + \left\langle\rho_{22}^0\right\rangle,$$

$$\vec{M}_{12} = K\left(\left(\frac{R}{3m_2}\right)^2 \frac{K}{\left\langle\rho_{11}\right\rangle_1}\nabla m_2 + \left\langle\vec{v}_2\right\rangle_2\right), \quad \vec{f} = -\frac{p_1}{m_1}\nabla m_2 + \frac{m_2}{4/3\pi R^3} 6\pi f_D R\left\langle\mu\right\rangle_1(\left\langle\vec{v}_2\right\rangle_2 - \left\langle\vec{v}_1\right\rangle_1).$$

Законы сохранения энергии

$$\frac{\partial}{\partial t}U_1 + div_{\vec{\xi}}\left(U_1\left\langle\vec{v}_1\right\rangle_1 + p_1\left\langle\vec{v}_1\right\rangle_1 - \left\langle\vec{q}\right\rangle\right) = -R_{12} + Q_{12} + A_{12},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}U_2 + div_{\vec{\xi}}U_2\left\langle\vec{v}_2\right\rangle_2 = R_{12} - Q_{12} - A_{12},$$

где

$$U_1 = \left\langle\rho_{11}\right\rangle C_V^1\left\langle T_1\right\rangle_1 + \left\langle\rho_{12}\right\rangle C_V^2\left\langle T_1\right\rangle_1 + \frac{\left\langle\rho_1\right\rangle\left\langle\vec{v}_1\right\rangle_1^2}{2}, \ U_2 = \left\langle\rho_{21}\right\rangle C_V^1\left\langle T_2\right\rangle_2 + \left\langle\rho_{22}^0\right\rangle C_S\left\langle T_2\right\rangle_2 + \frac{\left\langle\rho_2\right\rangle\left\langle\vec{v}_2\right\rangle_2^2}{2},$$

$$R_{12} = K\left[C_V^1\left\langle T_2\right\rangle_2 + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{R}{3m_2}\right)^2 \frac{K}{\left\langle\rho_{11}\right\rangle_1}\nabla m_2 + \left\langle\vec{v}_2\right\rangle_2\right)^2\right],$$

$$Q_{12} = \frac{3m_2}{R}\alpha(\left\langle T_2\right\rangle_2 - \left\langle T_1\right\rangle_1), \ A_{12} = \vec{f}\cdot\vec{M}_{12}/K.$$

Эти уравнения дополняются уравнениями для связи объемных концентраций

$$m_1 + m_2 = 1, \qquad m_{21} = (1-\beta^3)m_2, \quad m_{22} = \beta^3 m_2.$$

Также необходимо добавить связь между объемной концентрацией и осредненной плотностью твердой фазы

$$\left\langle \rho_{22}^0 \right\rangle = \rho_{22}^0 (1-\beta^3) m_2,$$

где $\rho_{22}^0$ – плотность твердой стенки микросферы; $\beta$ – безразмерная характеристика размера полости микросферы. Введенные обозначения общеприняты и описаны, например, в [6].

Производя переобозначения переменных и записывая вместо $\vec{\xi}$ переменную $x$, рассмотрим приведенную систему законов сохранения в одномерном нестационарном изотермическом случае ( $T_1 = T_2 = T = const$ )

$$\frac{d_1\rho_{11}}{dt} + \rho_{11}\frac{\partial v_1}{\partial x} = -\frac{3m_2}{R}K, \quad \frac{d_1\rho_{12}}{dt} + \rho_{12}\frac{\partial v_1}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{d_2\rho_{21}}{dt} + \rho_{21}\frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{3m_2}{R}K, \quad \frac{d_2 m_2}{dt} + m_2\frac{\partial v_2}{\partial x} = 0,$$

$$\rho_1\frac{d_1 v_1}{dt} + \frac{\partial p_1}{\partial x} + \left(\frac{p_1}{m_1} + \frac{K^2 m_1}{\rho_{11}}\right)\frac{\partial m_2}{\partial x} = \frac{3m_2}{R}K(v_1 - v_2) + \frac{m_2}{V^+}f_S,$$

$$\rho_2\frac{d_2 v_2}{dt} - \left(\frac{p_1}{m_1} + \frac{K^2 m_1}{\rho_{11}}\right)\frac{\partial m_2}{\partial x} = -\frac{m_2}{V^+}f_S,$$

здесь $K = \dfrac{C_m\beta}{d}\left(\dfrac{\rho_{11}}{m_1} - \dfrac{\rho_{21}}{\beta^3 m_2}\right)R_1T_1,\ \rho_1 = \rho_{11} + \rho_{12}, \qquad \rho_2 = \rho_{21} + \rho_{22}, \quad p_{11} = \rho_{11}R_1T_1,$

$p_{12} = \rho_{12}R_2T_1,\ \ p_1 = p_{11} + p_{12},\ \ f_S = 6\pi R f_D \mu (v_2 - v_1).$

Дополнительно в уравнениях используются объемные доли фаз $m_1 = m_1(t,x)$ и $m_2 = m_2(t,x)$. Для них справедливы следующие соотношения

$$m_1 + m_2 = 1, \quad \rho_{22} = \rho_{22}^0(1-\beta^3)m_2.$$

В векторной форме система законов сохранения запишется для функции $\vec{u} = \vec{u}(t,x)$ в виде системы квазилинейных уравнений

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + A(\vec{u})\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \vec{f},$$

где $\vec{u} = \{\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{21}, m_2, v_1, v_2\}^T$,

Тип системы уравнений зависит от собственных значений матрицы $A$. В данном случае имеется четыре действительных собственных значения $v_1$, $v_2$, $v_1 \pm \sqrt{\dfrac{p_1}{\rho_1}}$ и два комплексно сопряженных $v_2 \pm i\sqrt{\dfrac{m_2}{\rho_2}\left(\dfrac{p_1}{m_1} + \dfrac{K^2 m_1}{\rho_{11}}\right)}$. Из чего можно сделать вывод, что система квазилинейных уравнений составного типа, что согласуется с результатами для аналогичных моделей из [8].

Работа выполнена в рамках научной школы академика В.М. Фомина НШ-679.2014.1 и программы фундаментальных исследований Президиума РАН «Поисковые фундаментальные научные исследования в интересах развития Арктической зоны Российской Федерации» № II.3.5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Андреев И.Л.** // Химическое и нефтяное машиностроение, 1995, № 2, с. 16-22.
2. **Tsugawa R. T., Moen I., Roberts P. E., Souers P. C.** // Journal of Applied Physics, 1976,V. 47, No. 5, p. 1987–1993
3. **Верещагин А. С., Казанин И. В., Зиновьев В. Н., Пак А. Ю., Фомина А. Ф., Лебига В. А., Фомин В. М.** // Прикладная механики и техническая физика, 2013, Т. 54, № 2, с. 88-96.
4. **Верещагин А.С., Зиновьев В.Н., Фомин В.М., Лебига В.А., Пак А.Ю., Фомина А.Ф., Казанин И.В.** // Вестник НГУ. Серия: Физика, 2010, пом 5, выпуск 2, с. 8-16.
5. **Верещагин А.С., Верещагин С.Н., Фомин В.М.** // Прикладная механика и техническая физика, 2007, №3, т. 48, с. 92-102.
6. **Нигматулин Р.И.** // Динамика многофазных сред, 1987, Т. 1, 464 с.
7. **Whitaker S.** // The Method of Volume Averaging: 1999, 220 p.
8. **Яненко Н. Н., Солоухин Р. И., Папырин А. Н., Фомин В. М.** // Сверхзвуковые двухфазные течения в условиях скоростной неравновесности частиц, 1980, 160 с.