

Оценки консервативных загрязнений потоков в условиях неопределенности и распределенные вычисления

Рогалев А.Н.

Институт вычислительного моделирования СО РАН,

Красноярск, Россия

e-mail: rogalyov@icm.krasn.ru

- Основное препятствие в использовании математических моделей для оценки величины загрязнения потоков состоит в трудности определения точных значений параметров. Представляет существенный экологический интерес прогноз эволюции загрязнения – изменения его концентрации в увеличивающемся объеме загрязнения воды в процессе ее движения вниз по течению. От результатов количественной оценки этих изменений зависит принятие решений о проведении различных технических и организационных мероприятий.

Со времен классических исследований Стритера и Фелпса (Streeter - Phelps) моделированию и анализу содержания растворенного кислорода (РК) было посвящено значительное внимание в моделях качества воды. Это естественно по двум причинам: с одной стороны, РК является естественным показателем жизнедеятельности водной среды, с другой стороны, поскольку многие параметры загрязнения и качества воды взаимодействуют с РК, его изменения во времени трудно охарактеризовать. Один из более известных критериев загрязнения отходами (БПК), является основной причиной уменьшения содержания РК в воде и, следовательно, ухудшения качества воды. В силу важности взаимодействия между РК и БПК стало обычным говорить о РК – БПК моделях.

[1] Streeter H., Phelps E. A study of the population and natural purification of the Ohio river. Bulletin № 146. U.S. Public Health Service. 1925.

[2] Padgett W., Schultz G., Tsokos C. A random differential equation approach to the probability distribution of BOD and DO in streams. SIAM J. Appl. Math. 1977. v.32. p. 467 - 483.

[3] Padgett W. A stream pollution model with random deoxygenation and reaeration coefficients. Mathematical Biosciences. 1978. v.42. p. 137-148.

[4] Harrison G.W. A stream pollution model with intervals for the rate coefficients. Mathematical Biosciences. 1980. v.49. p. 11-120.

[5] Hui Peng Wei Yao Ping Huang. Application of Modified Streeter-Phelps Model and COD Changing Model to Xiangxi River in Three Gorges Reservoir Area. Bioinformatics and Biomedical Engineering (iCBBE), 2010.4th International Conference /Issue Date: 18-20 June 2010. ISSN: 2151-7614 .Print ISBN: 978-1-4244-4712-1

- Система уравнений, описывающих состояние потока принимает вид:

-
-

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} L(x) = \frac{1}{u} [-(k_1 + k_3) L(x) + l_a] \\ \frac{d}{dx} C(x) = \frac{1}{u} \{ -k_1 L(x) + k_2 [C_s - C(x)] - d_b \}, \end{cases} \quad (1)$$

- где x —расстояние вниз по течению, $C(x)$ — концентрация растворенного кислорода в воде на расстоянии, равном x , вниз по потоку, $L(x)$ — биохимическая потребность кислорода в воде на расстоянии x вниз по течению, u — средняя скорость течения (км/день), C_s — концентрация поглощения растворенного кислорода.

- Уравнения составлены в соответствии с гипотезой, что продукт, опосредующий биохимическую потребность в кислороде, и растворенный кислород вступают в реакцию и образуют в итоге инертный продукт, скорость реакции равна k_1L . В дополнение, продукт, опосредующий БПК, убывает в силу отложения в осадок или абсорбирования со скоростью k_3L , а также увеличивается со скоростью l_a , если источники загрязнения поступают вниз по течению.

- Величина растворенного кислорода возрастает в силу повторной вентиляции (аэрации) со скоростью $k_2(c_s - c(x))$ и уменьшается со скоростью d_b за счет поглощения (дыхания) организмов в воде. (Если фотосинтез водной растительности превышает поглощение (дыхание), то коэффициент должен быть отрицательным.)

Для установившихся течений влияние диффузии на загрязнение становится пренебрежимо малой, которой можно пренебречь. Коэффициенты этой системы могут изменяться вдоль потока, но остаются заключенными в заданные области. Описание их с помощью фиксированных значений, выбранных в пределах этих границ, становится недостаточно.

Выбор случайных коэффициентов для этих систем характеризуется несколькими недостатками, которые исправляют модели с коэффициентами – многозначными величинами. Так, например, уровень значимости оценок, полученных в стохастической модели не превосходит 66 процентов, что может приводить к тому, что все траектории этой системы покинут указанные области за исследуемое время.

Поставленную задачу можно рассматривать в более общей постановке. Задана система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) относительно состояния реального объекта (системы) и его эволюции во времени

$$\frac{dz}{dt} = g(t, z(t), u(t)), \quad (2)$$

- где $z = (z_i(t))$ вектор состояния объекта (системы),
- $u = u_j(t)$ воздействия, определяемые нашим выбором,

а также факторы, на выбор которых мы повлиять не можем - возмущения системы

Подобная постановка задачи охватывает как математические модели различных систем (физических, химических, биологических, технических и т.д.), находящиеся под влиянием возмущающих факторов, так и системы управления по определенным критериям в условиях неопределенности.

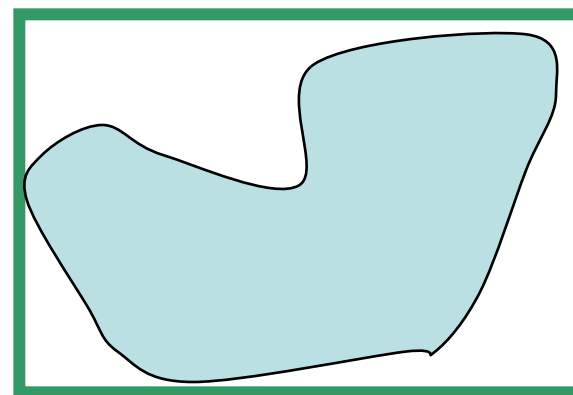
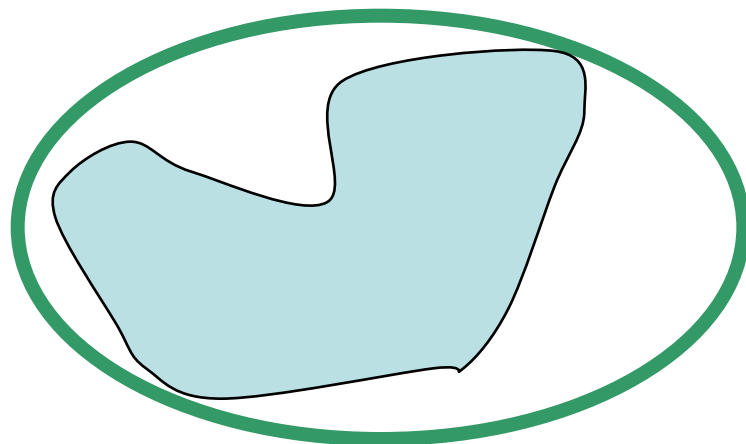
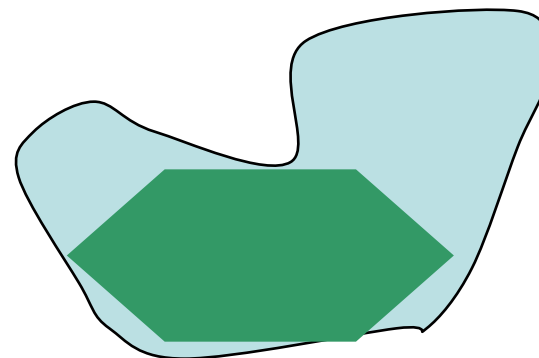
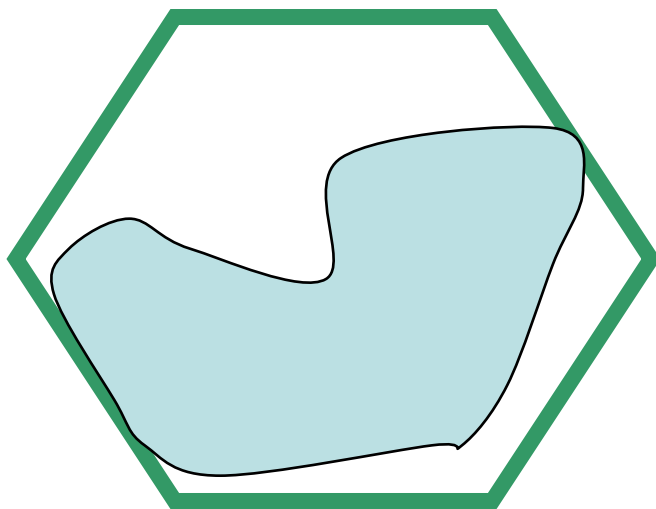
- Это актуально для тех задач, где отсутствует ансамбль усреднения и экспериментаторы, как правило, имеют дело с отдельными реализациями,
- например, задач практической устойчивости на конечном интервале времени,
- задач управления (для оценки множеств достижимости),
- задач нелинейной динамики (детерминированной стохастики), для которых динамические системы объединяют свойства глобальной устойчивости (траектории не уходят из некоторой области фазового пространства) с локальной неустойчивостью - малые погрешности начальных данных нарастают.

Множество всех векторов $u(t)$
удовлетворяет следующим
ограничениям

$$u(t) \in U(t)$$
$$u \in U(t)$$

- Вместо одной задачи с начальными данными мы имеем семейство таких задач, зависящих от множества параметров $u(t)$ и от множества начальных данных $y^0 \in Y^0$

Цель гарантированного метода - построить многогранник, ограничивающий (включающий) или входящий в множество всех решений поставленной задачи (2).



- Для решения этих задач предлагается класс методов, основанный на преобразовании символьных формул приближенных решений.
- Символьная формула (аналитическое выражение) – запись имен констант, переменных и действий, которые нужно проделать в определенном порядке над значениями этих переменных.
- При записи символьных формул, аппроксимирующих оператор сдвига вдоль траектории, допускается включение в них числовых констант, с отложенным выполнением действий с ними.

- Пусть H_i — последовательность пространств;
 $F^i, i = 1, 2, \dots, n-1$
- — последовательность символьных формул непрерывных отображений, таких, что определены на прямом произведении

$$H_1 \times H_2 \times \dots \times H_i$$
- отображают это произведение в пространство и задают зависимость между значениями H_{i+1} решения в каждой точке области определения и начальными значениями.

- Тогда результат последовательного исполнения преобразований формул

$$Y^1 = F^1(t^0, t^1, Y^0, Y^1) = S^1(Y^0),$$

$$Y^2 = F^2(t^0, t^1, t^2, Y^0, Y^1, Y^2) = S^2(Y^0) \circ S^1(Y^0),$$

.....

$$Y^i = F^i(t^0, \dots, t^i, Y^0, Y^1, \dots, Y^i) = S^i(Y^0) \circ \dots \circ S^2(Y^{i-1}) \circ S^1(Y^i), \quad (3)$$

.....

$$Y^m = F^m(t^0, \dots, t^m, Y^0, Y^1, \dots, Y^m) = S^m(Y^0) \circ \dots \circ S^2(Y^{i-1}) \circ S^1(Y^i)$$

- Принципиальное отличие заключается в способе реализации этих методов, то есть получении числовых оригиналов символьных формул. В процессе конструирования символьной формулы целесообразно использовать экономичные символьные формулы, то есть последовательности имен переменных и действий, позволяющие хранить формулы в памяти машины и обрабатывать их за минимальное время и с разумными затратами памяти.
- Существуют символьные формулы, непосредственная реализация которых невозможна, поскольку приведет к катастрофически возрастающим затратам памяти и времени выполнения.

- Выполнение гарантированных методов можно представить как исполнение последовательности следующих шагов:
- Шаг 1. Инициализируются переменные, идентифицирующие систему, они получают числовые значения, либо определяются как символьные величины.
- Шаг 2. Выполняется построение символьной формулы решения $S(t^k, y^0)$ (вектор с символьными компонентами).
- Каждая компонента символьного вектора определяется заново во всех точках как формула функции, зависящей в том числе от переменной, описывающей неопределенность данных, например Y^0
- Шаг 3. По символьной формуле решения определяются экстремальные значения множества решений на множестве начальных данных для всех узлов сетки t^k .

- В общем случае для описываемого класса методов предлагается модель вычислений (преобразований и вычислений) символьных формул, основанная на поэтапном статичном хранении информации и преобразовании ее в завершающей стадии метода.
- Таким образом, формула будет представлять рекурсивную структуру, размер которой изменяется.

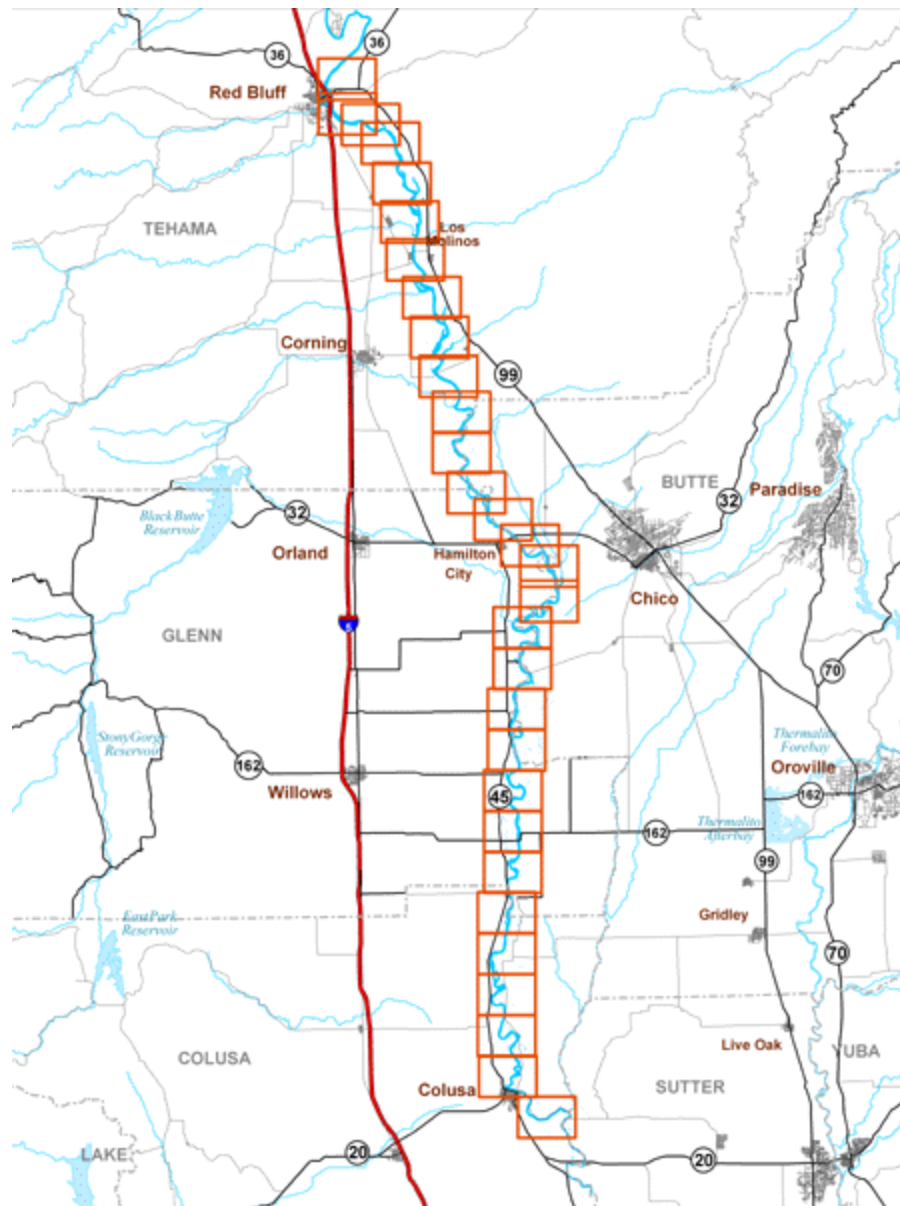
- В силу этого модель вычислений (преобразований и вычислений) символьных формул осуществляется без явного выписывания суперпозиций компонент формулы, определяемых на каждом шаге.
- Связь между этими компонентами определяется посредством задания механизма адресации. Ссылки на адреса различных уровней хранятся в стековой памяти в виде дерева. Генерация кода вычислений по формуле осуществляется в процессе обхода этого дерева, начиная с вершин.

- Для реки Sacramento на основе экспериментальных данных опубликованных в ряде работ [2], [3] полагают, что

$$L(0), D(0), k_1, k_2 -$$

это нормально распределенные случайные величины с математическими ожиданиями 6.8; 0.3; 0.35; 0.75 и дисперсиями 1.85; 0.01; 0.015; 0.0506 соответственно.

Сакраменто — самая длинная река [Калифорнии](#) (719 км). Берёт начало недалеко от горы [Шаста](#), сливается с рекой [Сан-Хоакин](#) и впадает в [залив Сан-Франциско](#). Протекает по [Калифорнийской долине](#), расположенной между хребтом [Сьерра-Невада](#) и [Береговыми хребтами](#). Место интенсивной добычи золота в период «[золотой лихорадки](#)». Длина судоходного участка, благодаря искусственным каналам, составляет около 290 км. Океанские корабли могут проходить вверх по реке до города [Сакраменто](#). На реке несколько плотин, в том числе Шаста и Кесвик. Дельта реки получила прозвище «[Эверглейдс Запада](#)». Популярное место отдыха и туризма



Случай 1. Для оценки значений величин характеризующих параметры водного потока реки Сакраменто использовались следующие параметры:

$$4.13 \leq L(0) \leq 9.46,$$

$$0.10 \leq D(0) \leq 0.50,$$

$$0.11 \leq k_1 \leq 0.59,$$

$$0.31 \leq k_2 \leq 1.19,$$

$$0.0 \leq k_3 \leq 0.10,$$

$$0.0 \leq d_B \leq 0.1,$$

$$0.0 \leq l_a \leq 0.2,$$

$$u = 5 \text{ миль в день},$$

$$c_s = 9.0 \text{ частей на миллион}$$



- Случай 2. Предполагая выполненными те же распределения величин характеризующих параметры водного потока реки Сакраменто использовались следующие параметры:

$$4.56 \leq L(0) \leq 9.04,$$

$$0.13 \leq D(0) \leq 0.470,$$

$$0.15 \leq k_1 \leq 0.55,$$

$$0.38 \leq k_2 \leq 1.12,$$

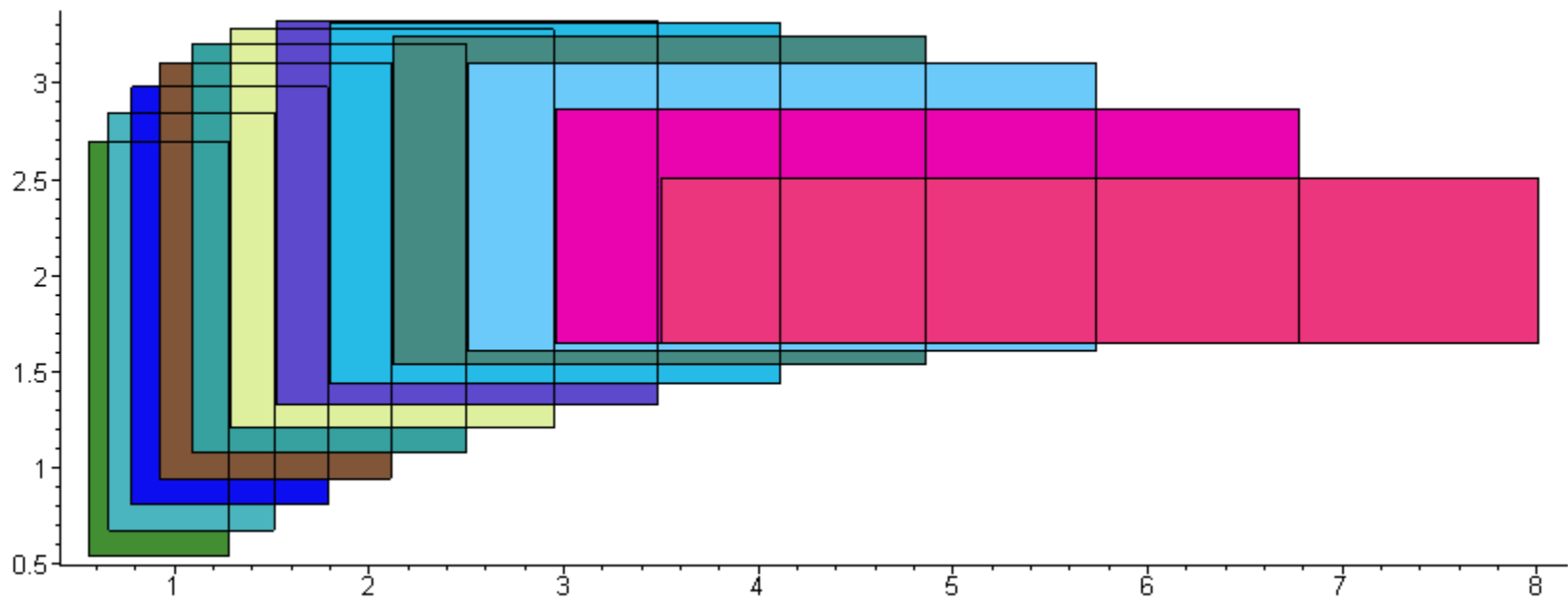
$$k_3 = 0.0,$$

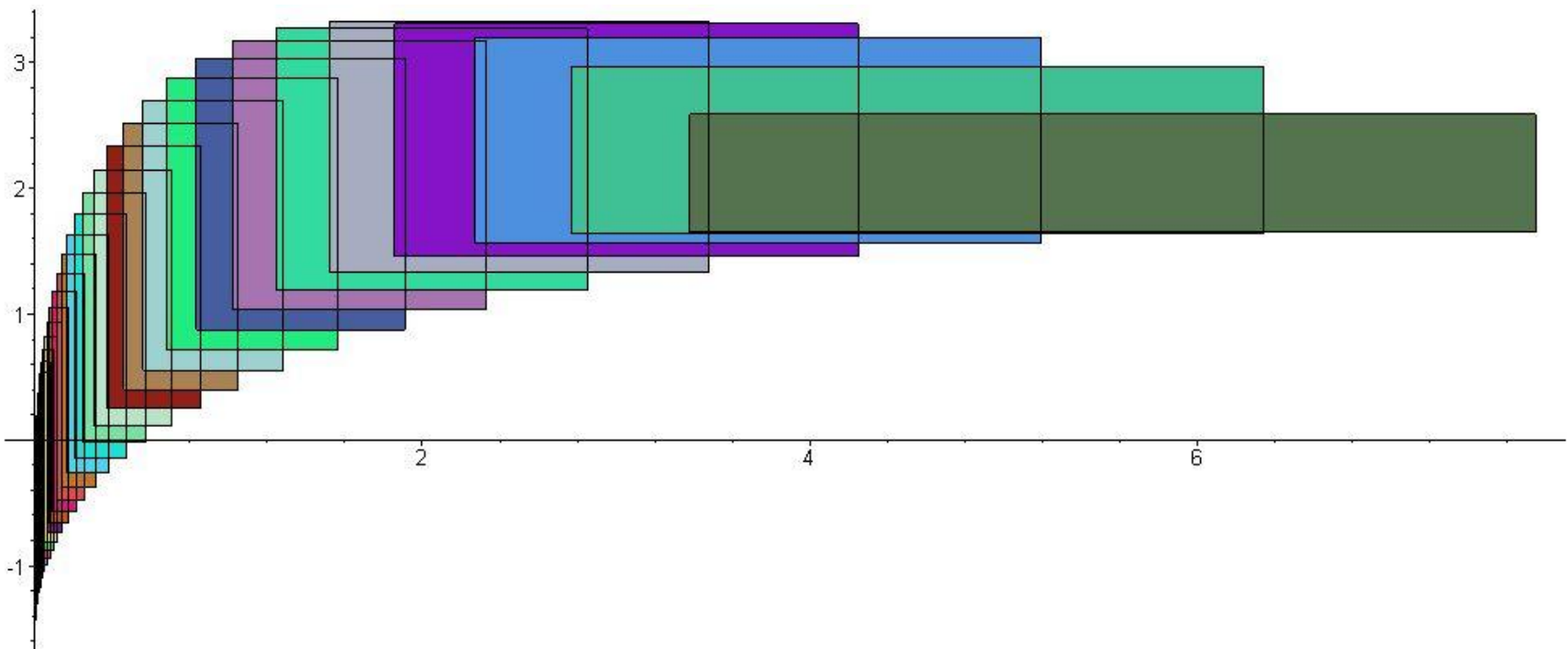
$$d_B = 0.0,$$

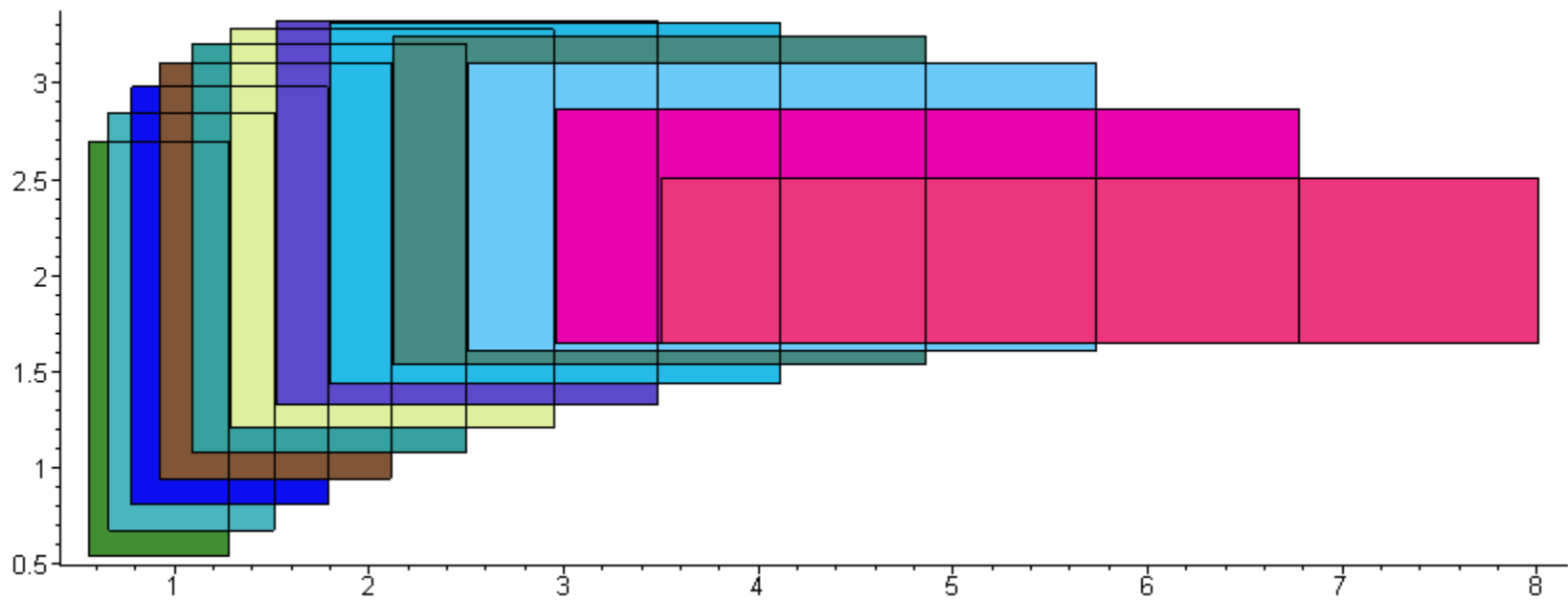
$$l_a = 0.0,$$

$$u = 5 \text{ миль в день},$$

$$c_s = 9.0 \text{ частей на миллион}$$







- Наибольший дефицит кислорода наблюдается в тот момент времени, когда реаэрация (повторное проветривание и выпадение осадка принимают минимальные значения на всем протяжении водного участка, тогда как реакция БПК-РК изменяется от своего минимального значения до максимального значения.

Енисей́ ([эвенк.](#) Ионесси — «большая вода», [тув.](#) Хем, [кет.](#) Хук) — [река](#) в [Сибири](#), одна из величайших рек [России](#) и мира.

Одна из [крупнейших рек мира](#): длина реки от места слияния [Большого Енисея](#) и [Малого Енисея](#) — 3487 км, от истоков [Малого Енисея](#) — 4287^[2] км, от истоков [Большого Енисея](#) — 4123^[3] км. Длина водного пути: [Идэр](#) — [Селенга](#) — оз. [Байкал](#) — [Ангара](#) — Енисей составляет 5075 км. По площади бассейна (2580 тыс. км²) Енисей занимает 7-е место среди рек мира. Для бассейна Енисея характерна резкая асимметричность: его правобережная часть в 5,6 раза больше левобережной.



**«...Уведи меня в ночь,
где течет Енисей
И сосна до звезды
достаёт,...»**

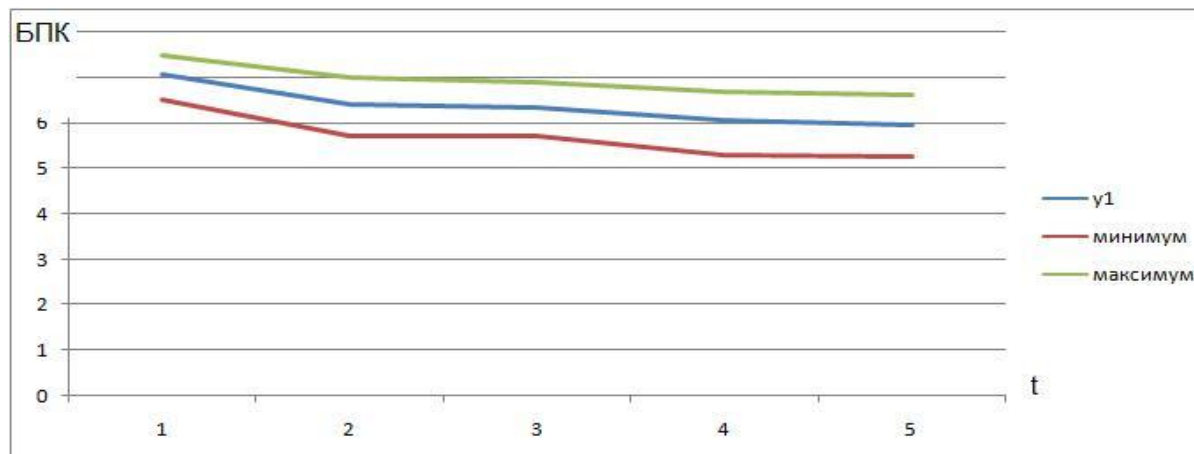
Енисей — граница между [Западной](#) и [Восточной Сибирью](#). Левобережье Енисея заканчивает великие [западносибирские равнины](#), а правобережье представляет царство горной тайги. От [Саян](#) до [Северного Ледовитого океана](#) Енисей проходит через все климатические зоны [Сибири](#). В его верховьях живут [верблюды](#), в низовьях — [белые медведи](#).

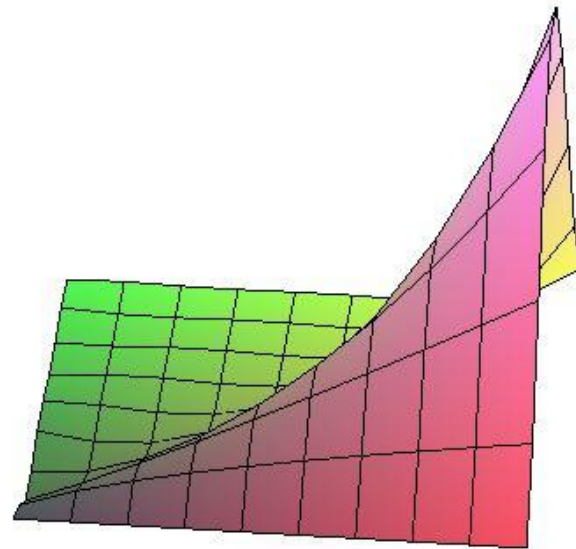
Енисей относится к типу рек смешанного питания с преобладанием снегового. Доля последнего немного менее 50 %, дождевого 36—38 %, подземного в верховьях до 16 %, к низовьям она уменьшается. Для Енисея характерны интенсивное образование внутриводного льда, осенний ледоход. Ледостав в низовьях с конца октября, в середине ноября в среднем течении и у [Красноярска](#) и в конце ноября — декабре в горной части.



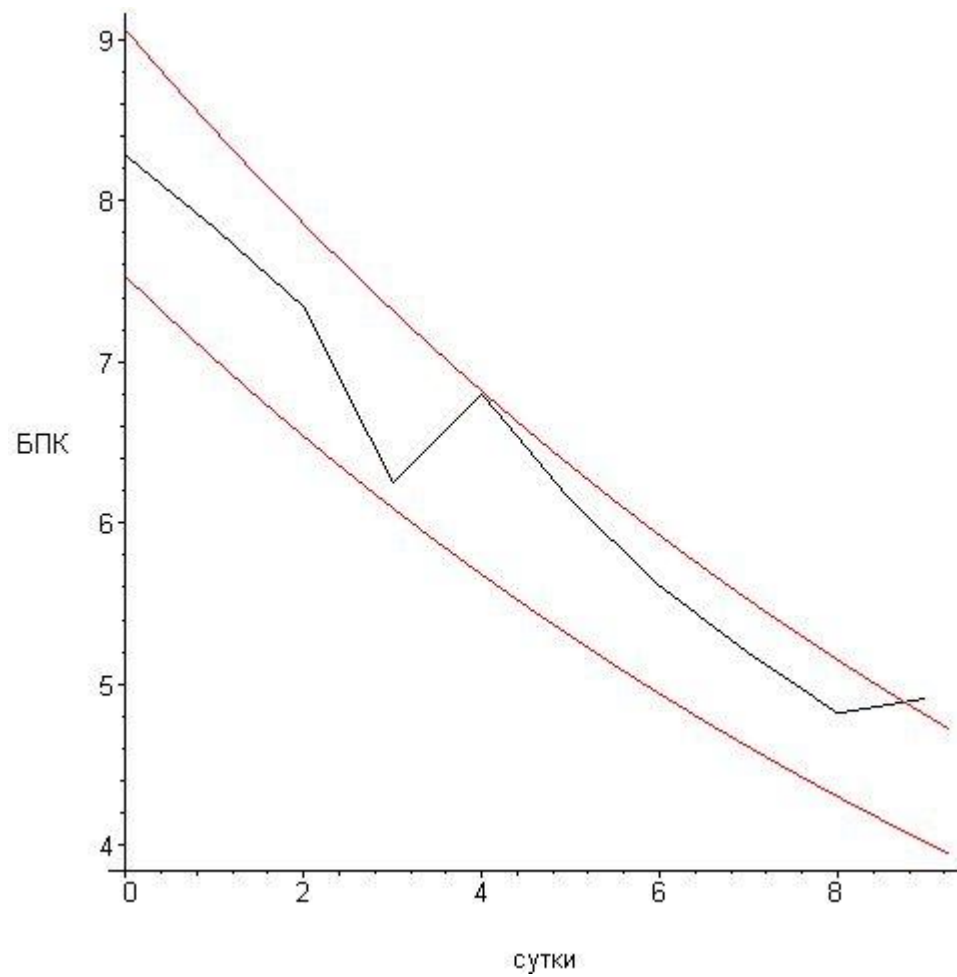
Енисей –
 П.Тунгуск- Сумароково Лесосиб. -Кас -Предивинск -Сым –Стрелка-
 Б.Пит -Кан -Казачинск - Кр. Ворогово

БПК	L(x)	D(x)	K1		K3	la	db
	7.45-5.93	0.17-0.79	0.15-0.68	0.45-0.63	0.0-0.1	0.0-0.2	0.01-0.14
	7.15	0.49	0.59	0.51	0.1	0.1	0.5

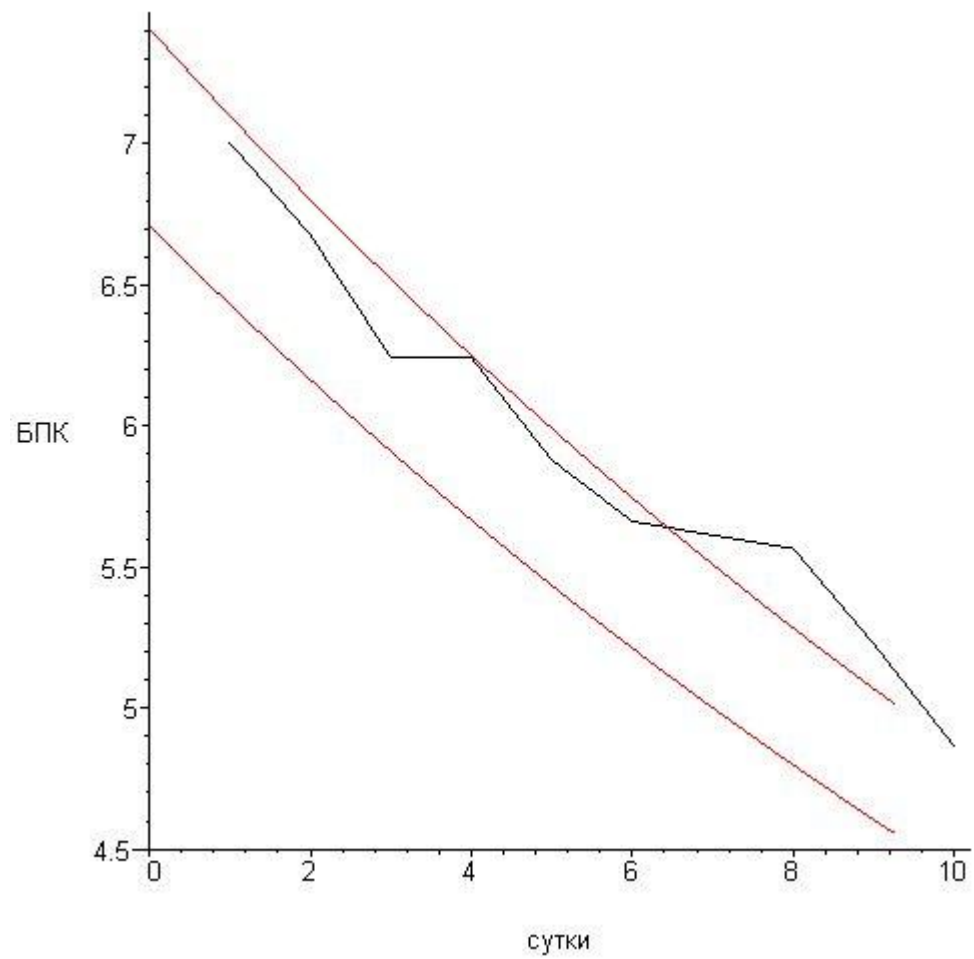




2006 г. май
район Творогово



2007 г. май
район Творогово

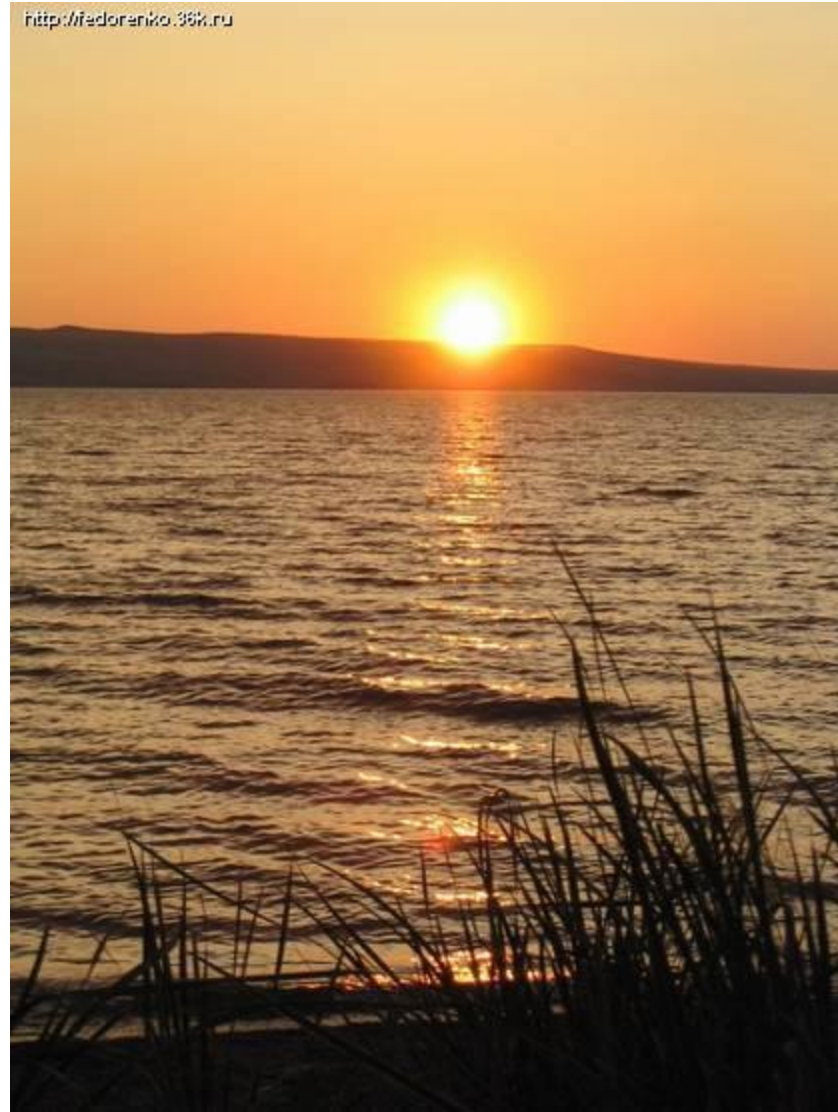


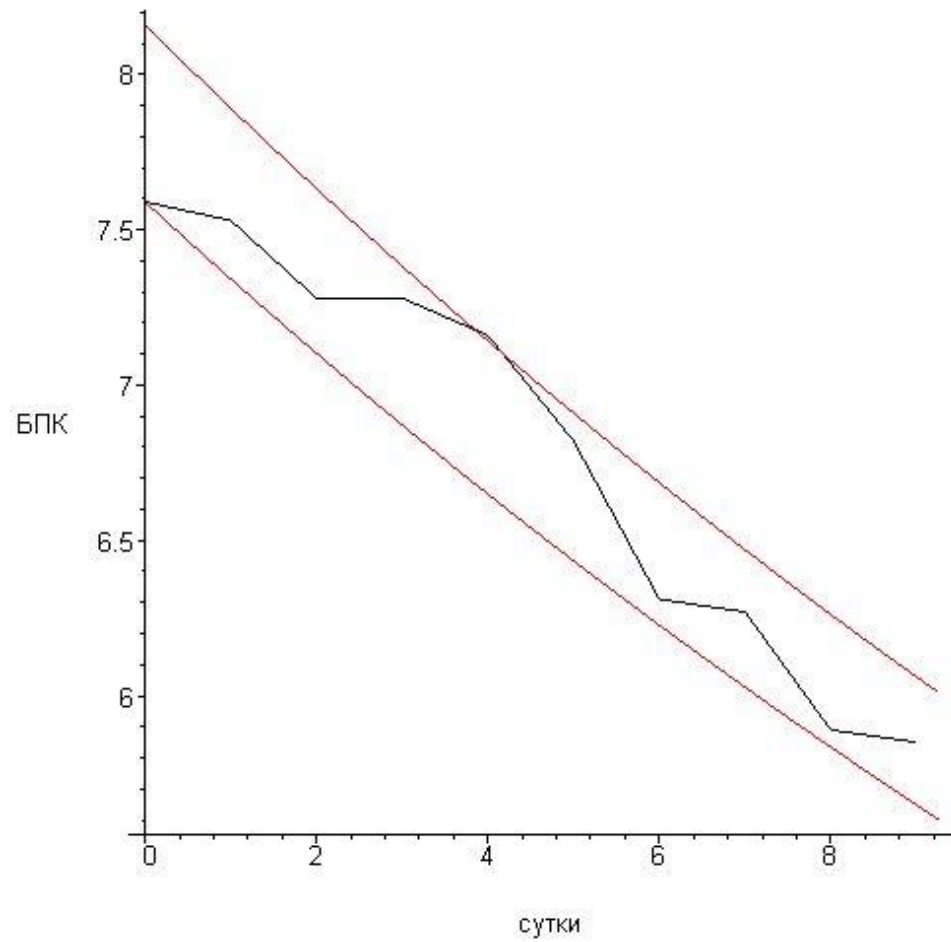
Озеро Белё - крупнейшее озеро в Хакасии. Степная местность этого озера имеет свою прелесть.

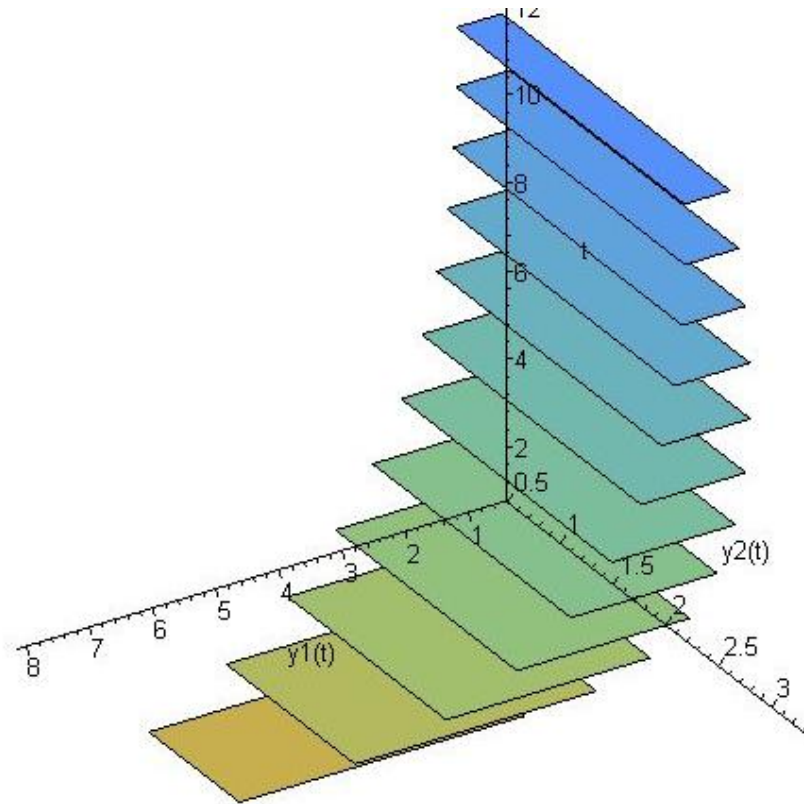
Своеобразна красота одиноких кряжистых лиственниц, березовых рощиц. Расстояние по степи от озера Шира до озера Белё около 30-ти километров. Состоит озеро Белё из двух половин, соединенных между собой узкой и глубокой протокой. Площадь его водной поверхности составляет около 80-ти квадратных километров, протяженность береговой линии более 60-ти километров, глубина достигает нескольких десятков метров. Вода слабо минерализована, в ее составе преобладает сернокислый натрий, или глауберова соль. Из за чего по своему составу она близка к морской.



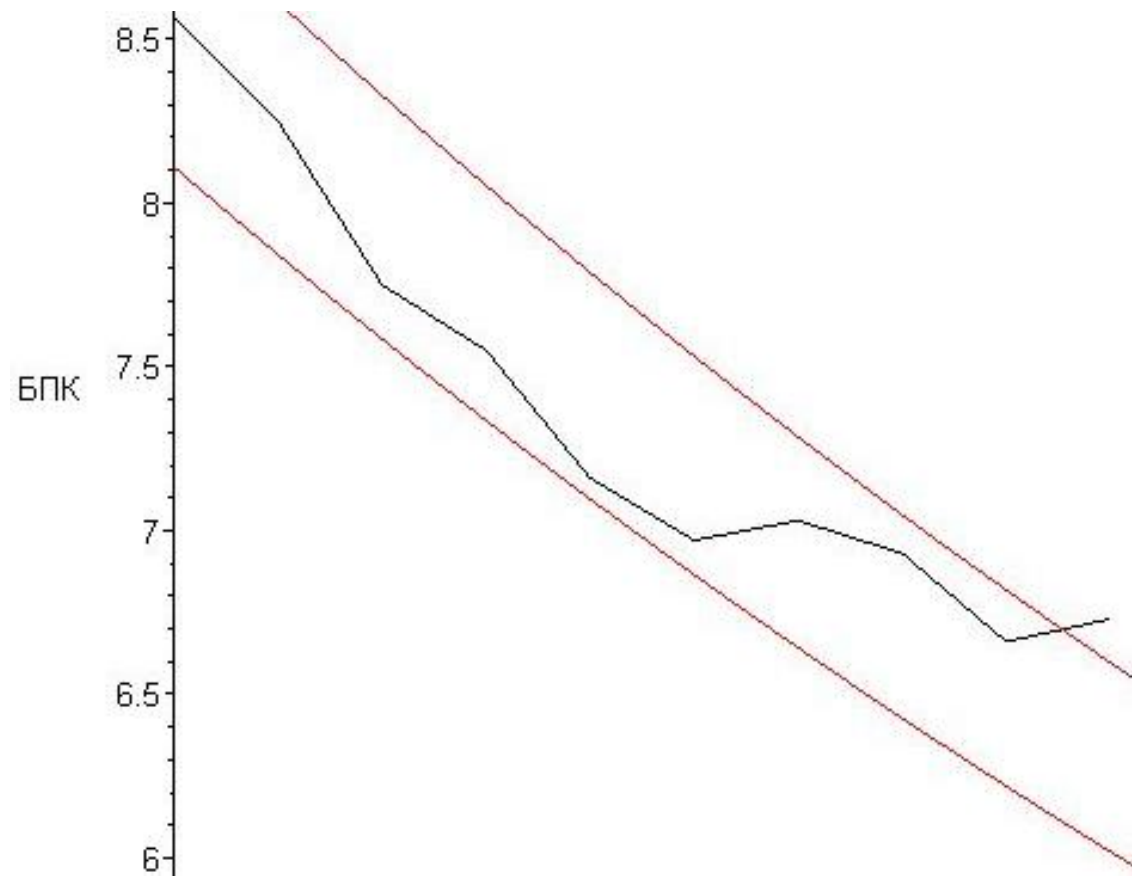
Математическое моделирование загрязнения пресноводного водоема рассматривают физические процессы распространения загрязнений, а также химические и биохимические процессы связывания и трансформации. При распространении загрязнений более детально исследуется вертикальная стратификация. Более широк спектр доставки загрязнителей в водоем: с берега на поверхность воды, с берега на дно, вдали от берега под воду.







**Графики динамики соотношений БПК и РК
для озера Беле**



Распараллеливание численного метода.

Основания.

Развитие моделей с внутренней структурой.

Стритер и Фелпс получили свое уравнение на основе стационарного решения уравнения в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial \bar{y}(t, z)}{\partial t} = f\left(\frac{\partial \bar{y}(t, z)}{\partial z}, \bar{y}(t, z), u(t, z), \xi(t, z)\right), \quad (\text{React})$$

$\frac{\partial \bar{y}(t, z)}{\partial z}$ – основная часть адвективной составляющей в потоке вещества

$\xi(t, z)$ – шум,

Уравнение описывает модель реактора с поршневым течением, в котором

$\frac{\partial \bar{y}(t, z)}{\partial z}$ характеризует основную часть адвективной составляющей в потоке вещества.

- Концептуально правильно происходящие в реке изменения рассматривать как непрерывный во времени процесс со свойствами, меняющимися как во времени, так и в пространстве.
- В классическом исследовании РК-БПК Стритера и Фелпса используется независимая переменная, названная время потока. В большинстве приложений предполагается, что скорость течения реки постоянна по времени, и следовательно время потока эквивалентно независимой переменной, означающей расстояние вдоль течения.
- Переход к уравнению (React) обоснован, но при его решении разумно также применить параллельный метод его решения.

- Изучение проблем управления взаимодействия РК и БПК связано с разработкой математических моделей взаимодействия РК и БПК с учетом всех возможных неточностей данных.
- С их помощью можно построить динамическое управление, чтобы поддерживать заранее заданную величину РК в речной воде.
- В другом случае удобно использовать вариабельность во времени качества воды для удовлетворения и сбалансирования противоречивых требований к самоочистительной способности реки, рассматриваемой как приемник сточных вод с одной стороны и как источник питьевой воды — с другой.
- Реализован надежный численный метод, позволяющий учитывать неточности определения входных данных, обеспечивает выполнение этих аналитических задач.