О существовании решения задач Коши для двумерных нагруженных параболических уравнений и систем специального вида *

И.В. Фроленков
Сибирский федеральный университет
e-mail: igor@frolenkov.ru

Г.В. Романенко
e-mail: galina.romanencko@yandex.ru

В данной работе получены достаточные условия существования решения в классе гладких ограниченных функций задачи для двумерного нагруженного параболического уравнения специального вида (коэффициенты при старших, младших членах и правой части зависят от следов неизвестной функции и их производных) с данными Коши, задачи Коши для одномерного нагруженного уравнения типа Бюргерса (уравнение дополнительно содержит нелинейность относительно функции решения при младшей производной по пространственной переменной), задачи для системы двух одномерных нагруженных параболических уравнений, связанных по младшим членам, с данными Коши.

При исследовании коэффициентных обратных задач для параболических уравнений (или систем) с данными Коши, существуют различные способы, используя условия переопределения (дополнительная информация о решении), привести обратную задачу к прямой. Один из них состоит в том, что обратная задача сводится к неклассической прямой задаче для нагруженного (содержащего следы неизвестных функций и их производных) уравнения (или системы нагруженных уравнений) [1,2,3,4,5]. Необходимо знать, при каких условиях эти вспомогательные задачи разрешимы, а также знать свойства их решений.

Задача 1. Исследование нагруженного двумерного уравнения специального вида

Постановка задачи

В пространстве E_1 переменных x, выберем r различных точек a_k, $k=\overline{1,r}$. Также в пространстве E_1 переменных z выберем s различных точек $z=\beta_m$, $m=\overline{1,s}$

Рассмотрим теперь в полосе $G_{[0,T]}=\{(t,x,z)|0\le t\le T, x\in E_1, z\in E_1\}$ задачу Коши для нагруженного (содержащего следы неизвестной функции и ее производных) неклассического параболического уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x,z)=a_1(t,x,\overline{w}_0(t))u_{xx}+a_2(t,z,\overline{w}_0(t))u_{zz}+$$
$$+b_1(t,x,z,\overline{w}_0(t))u_x+b_2(t,x,z,\overline{w}_0(t))u_z+f(t,x,z,u,\overline{w}_0(t),\overline{w}_1(t,x),\overline{w}_2(t,z)), \qquad (1)$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-31033)

$$u(0,x,z)=u_0(x,z). \tag{2}$$

Через

$$\overline{w}_0(t)=\left(u(t,\alpha_k,\beta_m),\frac{\partial^{j_1+j_2}u(t,\alpha_k,\beta_m)}{\partial x^{j_1}\partial z^{j_2}}\right), k=\overline{1,r},\ m=\overline{1,s}, j_1=0,1,\ldots,p,\ j_2=0,1,\ldots,q,$$

обозначена вектор функция, компоненты которой является следами (зависящими только от переменной t) функции $u(t,x,z)$ и всех ее производных по пространственным переменным x до порядка p и по z до порядка q включительно.

Вектор-функция

$$\overline{w}_1(t,x)=\left(u(t,x,\beta_m),\frac{\partial^j}{\partial z^j}u(t,x,\beta_m)\right),\ m=\overline{1,s},\ j=0,1,\ldots,q,$$

состоит из следов (зависящих только от переменных t,x) функции $u(t,x,z)$ и ее производных по переменной z до порядка q включительно.

Аналогично вектор-функция

$$\overline{w}_2(t,z)=\left(u(t,\alpha_k,z),\frac{\partial^j}{\partial x^j}u(t,\alpha_k,z)\right), k=\overline{1,r},\ j=0,1,\ldots,p,$$

состоит из следов (зависящих только от переменных t,z) функции $u(t,x,z)$ и ее производных по переменной x до порядка p включительно.

Определение 1.1. Через $Z^{p,q}_{x,z}([0,t^*])$ обозначим множество функций $u(t,x,z)$, определенных в $G_{[0,t^*]}$, принадлежащих классу

$$C^{1,p,q}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]})=\left\{u(t,x,z)\mid\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^{j_1+j_2}u}{\partial x^{j_1}\partial z^{j_2}}\in C(G_{[0,t^*]}),\ j_1=\overline{0,p},\ j_2=\overline{0,q}\right\},$$

ограниченных при $(t,x,z)\in G_{[0,t^*]}$ вместе со всеми производными, входящими в уравнение (1),

$$\sum_{j_1=0}^{p}\sum_{j_2=0}^{q}\left|\frac{\partial^{j_1+j_2}}{\partial x^{j_1}\partial z^{j_2}}u(t,x,z)\right|\le C.$$

Определение 1.2. Под *классическим решением задачи* (1), (2) в $G_{[0,t^*]}$ будем понимать функцию $u(t,x,z)\in Z^{p,q}_{x,z}([0,t^*])$, удовлетворяющую (1), (2) в $G_{[0,t^*]}$.

Здесь $0<t^*\le T$ - некоторая фиксированная постоянная. Если t^* зависит от входные данные, и $t^*\le T$, то будем говорить, что $u(t,x,z)$ является решением задачи (1), (2) в малом временном интервале (или просто решение "в малом"). Если t^* фиксировано и $t^*=T$ при любом наборе входных данных, удовлетворяющих достаточным условиям разрешимости, будем говорить, что $u(t,x,z)$ является решением задачи (1), (2) во всем временном интервале (либо будем использовать термин "глобальная разрешимость").

Результат

Предположим, что выполняются следующие условия.

Условие 1.1. *Функции a_1, a_2, b_1, b_2, f действительнозначные функции, определены и непрерывны при любых значениях своих аргументов. $\forall t_1 \in (0,T]$, $\forall u(t,x,z) \in Z^{p+2,q+2}_{x,z}([0,t_1])$ данные функции, как функции переменных $(t,x,z) \in G_{[0,t_1]}$, непрерывны и обладают непрерывними производными, входящими в соотношение (3).*

Условие 1.2. *$\forall t_1 \in (0,T]$, $\forall u(t,x,z) \in Z^{p+2,q+2}_{x,z}([0,t_1])$ функции a_1, a_2 удовлетворяют условиям $a_1 \geq a_0 > 0$, $a_2 \geq a_0 > 0$. Функция u_0 также является действительнозначной, имеет все непрерывные производные входящие в соотношение ниже и удовлетворяет ему*

$$\sum_{j_1=0}^{p+2}\sum_{j_2=0}^{q+2}\left|\frac{\partial^{j_1+j_2}}{\partial x^{j_1}\partial z^{j_2}}u_0(x,z)\right| \leq C.$$

Условие 1.3. *Пусть $\forall t_1 \in (0,T]$, $\forall t \in [0,t_1]$ справедливы следующие оценки*

$$\sum_{j_1=0}^{p+2}\left|\frac{\partial^{j_1}}{\partial x^{j_1}}a_1(t,x,\overline{w}_0(t))\right| + \sum_{j_2=0}^{q+2}\left|\frac{\partial^{j_2}}{\partial z^{j_2}}a_2(t,z,\overline{w}_0(t))\right| +$$

$$+\sum_{j_1=0}^{p+2}\sum_{j_2=0}^{q+2}\left(\left|\frac{\partial^{j_1+j_2}}{\partial x^{j_1}\partial z^{j_2}}b_1(t,x,z,\overline{w}_0(t))\right| + \left|\frac{\partial^{j_1+j_2}}{\partial x^{j_1}\partial z^{j_2}}b_2(t,x,z,\overline{w}_0(t))\right|\right) \leq P_{\gamma_1}\left(U(t)\right), \qquad (3)$$

$$\sum_{j_1=0}^{p+2}\sum_{j_2=0}^{q+2}\left|\frac{\partial^{j_1+j_2}}{\partial x^{j_1}\partial z^{j_2}}f(t,x,z,u,\overline{w}_0(t),\overline{w}_1(t,x),\overline{w}_2(t,z))\right| \leq P_{\gamma_2}\left(U(t)\right), \qquad (4)$$

здесь γ_1, $\gamma_2 \geq 0$ – некоторые фиксированные целые числа,

$$P_\zeta(y) = \tilde{C}(1 + y + \ldots + y^\zeta),$$

$\tilde{C} > 1$ - постоянная, не зависящая от функции $u(t,x,z)$ и ее производных,

$$U(t) = \sum_{j_1=0}^{p+2}\sum_{j_2=0}^{q+2}\sup_{0<\xi\leq t}\sup_{(x,z)\in E_2}\left|\frac{\partial^{j_1+j_2}}{\partial x^{j_1}\partial z^{j_2}}u(\xi,x,z)\right|,\ u(t,x,z) \in Z^{p+2,q+2}_{x,z}([0,t_1]).$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия **1.1–1.3**.*

1a *Если в уравнении (1) коэффициенты a_i, b_i не зависят от пространственных переменных:*

$$a_1 = a_1(t,\overline{w}_0(t)),\ a_2 = a_2(t,\overline{w}_0(t)),\ b_1 = b_1(t,\overline{w}_0(t)),\ b_2 = b_2(t,\overline{w}_0(t)),$$

*и **условие 1.3** выполняется при $\gamma_1 \geq 0$, $0 \leq \gamma_2 \leq 1$, то классическое решение $u(t,x,z)$ задачи (1), (2) существует в классе $Z^{p,q}_{x,z}([0,T])$.*

1b *Если коэффициенты a_i, b_i имеют такой же вид как в случае **1a**, и **условие 1.3** выполняется при $\gamma_1 \geq 0$, $\gamma_2 > 1$, то существует такая константа t^*, $0 < t^* \leq T$, зависящая от постоянной $\tilde{C}$ из (3), (4), такая, что классическое решение $u(t,x,z)$ задачи (1), (2) существует в классе $Z^{p,q}_{x,z}([0,t^*])$.*

2a *Если в уравнении (1) коэффициенты a_i, b_i имеют вид:*

$$a_1 = a_1(t, x, \overline{w}_0(t)),\ a_2 = a_2(t, x, \overline{w}_0(t)),$$

$$b_1 = b_1(t, x, z, \overline{w}_0(t)),\ b_2 = b_2(t, x, z, \overline{w}_0(t)),$$

и ***условие 1.3*** *выполняется для $\gamma_1 = 0$, а $0 \le \gamma_2 \le 1$, то классическое решение $u(t, x, z)$ задачи (1), (2) существует в классе $Z^{p,q}_{x,z}([0, T])$.*

2b *Если коэффициенты a_i, b_i имеют такой же вид как в случае* ***2a****, и* ***условие 1.3*** *выполняется для $\gamma_1 = 0$, а $\gamma_2 > 1$, то существует такая константа t^*, $0 < t^* \le T$, зависящая от постоянной $\tilde{C}$ из (3), (4), такая, что классическое решение $u(t, x, z)$ задачи (1), (2) существует в классе $Z^{p,q}_{x,z}([0, t^*])$.*

Доказательство существования классического решения данной задачи приведено в [6].

Задача 2. Исследование одномерного нагруженного уравнения типа Бюргерса специального вида

Постановка задачи

В пространстве E_1 переменных x, выберем r различных точек a_k, $k = \overline{1, r}$. В полосе $G_{[0,T]} = \{(t, x)|0 \le t \le T, x \in E_1\}$ рассматривается задача Коши

$$u_t = a(t)u_{xx} + b(t, x, u(t, x), w(t))u_x + f(t, x, u(t, x), w(t)), \quad u(0, x) = u_0(x). \tag{5}$$

Через

$$w(t) = \left(u(t, \alpha_k), \frac{\partial^j}{\partial x^j} u(t, \alpha_k)\right), k = \overline{1, r},\ j = 0, 1, \dots, p,$$

обозначена вектор функция, компоненты которой является следами (зависящими только от переменной t) функции $u(t, x)$ и всех ее производных по пространственным переменным x до порядка p включительно.

Определение 2.1. Через $Z^p([0, t^*])$ обозначим множество функций $u(t, x)$, определенных в $G_{[0,t^*]}$, принадлежащих классу

$$C^{1,p}_{t,x}(G_{[0,t^*]}) = \left\{u(t, x) \mid \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^j u}{\partial x^j} \in C(G_{[0,t^*]}),\ j = \overline{0, p}\right\},$$

ограниченных при $(t, x) \in G_{[0,t^*]}$ вместе со всеми производными, входящими в уравнение (5),

$$\sum_{j=0}^{p} \left|\frac{\partial^j}{\partial x^j} u(t, x)\right| \le C.$$

Определение 2.2. Под *классическим решением задачи* (5) в $G_{[0,t^*]}$ будем понимать функцию $u(t, x, z) \in Z^p([0, t^*])$, удовлетворяющую (5) в $G_{[0,t^*]}$.

Здесь $0 < t^* \le T$ - некоторая фиксированная постоянная. Если t^* зависит от входные данные, и $t^* \le T$, то будем говорить, что $u(t, x)$ является решением задачи (5) в малом временном интервале (или просто решение "в малом"). Если t^* фиксировано и $t^* = T$ при любом наборе входных данных, удовлетворяющих достаточным условиям разрешимости, будем говорить, что $u(t, x, z)$ является решением задачи (5) во всем временном интервале (либо будем использовать термин "глобальная разрешимость").

Результат

Предположим, что выполняются следующие условия.

Условие 2.1. *Функции b, f, u_0 действительнозначные функции, определены и непрерывны при любых значениях своих аргументов. $\forall t_1 \in (0,T]$, $\forall u(t,x,z) \in Z^{p+2}([0,t_1])$ данные функции, как функции переменных $(t,x) \in G_{[0,t_1]}$, непрерывны и обладают непрерывними производными, входящими в соотношение (6). Функция $a \geq a_0 > 0$ — непрерывная функция на отрезке $[0,T]$.Функция u_0 имеет все непрерывные производные входящие в соотношение ниже и удовлетворяет ему*

$$\sum_{j=0}^{p+2} \left| \frac{d^j}{dx^j} u_0(x) \right| \leq \tilde{C}.$$

Условие 2.2. *Пусть $\forall t_1 \in (0,T]$, $\forall t \in [0,t_1]$ справедливы следующие оценки*

$$\sum_{j=0}^{p+2} \left| \frac{\partial^j}{\partial x^j} b(t,x,u(t,x),w(t)) \right| \leq P_{\gamma_1}\left(U(t)\right), \tag{6}$$

$$\sum_{j=0}^{p+2} \left| \frac{\partial^j}{\partial x^j} f(t,x,u(t,x),w(t)) \right| \leq P_{\gamma_2}\left(U(t)\right), \tag{7}$$

здесь γ_1, $\gamma_2 \geq 0$ – некоторые фиксированные целые числа,

$$P_\zeta(y) = \tilde{C}(1 + y + \ldots + y^\zeta),$$

$\tilde{C} > 1$ – постоянная, не зависящая от функции $u(t,x)$ и ее производных,

$$U(t) = \sum_{j=0}^{p+2} \sup_{0<\xi\leq t} \sup_{x\in E_1} \left| \frac{\partial^j}{\partial x^j} u(\xi,x) \right|, \ u(t,x) \in Z^{p+2}([0,t_1]).$$

Теорема 2. *Пусть выполняются* ***условия 2.1, 2.2*** *при $\gamma_1 \geq 0$, $0 \leq \gamma_2 \leq 1$, тогда существует такая константа t^*, $0 < t^* \leq T$, зависящая от постоянных a_0, $\tilde{C}$ из условия 2.1, и условий (6), (7), такая, что классическое решение $u(t,x)$ задачи (5) существует в классе $Z^p([0,t^*])$.*

Задача 3. Исследование системы одномерных параболических уравнений специального вида

Постановка задачи

В пространстве E_1 переменных x, выберем r различных точек α_k, $k = \overline{1,r}$, и s различных точек β_m, $m = \overline{1,s}$.

Рассмотрим теперь в полосе $G_{[0,T]} = \{(t,x)|0 \leq t \leq T, x \in E_1\}$ задачу Коши для системы нагруженных неклассических параболических уравнений

$$u_t(t,x) = a_1(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t))u_{xx} + b_1(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t))u_x + f_1(t,x,u,v,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t)),$$

$$v_t(t,x) = a_2(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t))v_{xx} + b_2(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t))v_x + f_2(t,x,u,v,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t)), \tag{8}$$

$$u(0,x) = u_0(x),\ \ v(0,x) = v_0(x),\ \ x \in E_1, \tag{9}$$

Через $\overline{\varphi}_u(t) = \Big(u(t,\alpha_k), \frac{\partial^j}{\partial x^j}u(t,\alpha_k)\Big)$, $\overline{\varphi}_v(t) = \Big(v(t,\beta_m), \frac{\partial^j}{\partial x^j}v(t,\beta_m)\Big)$ ($k = \overline{1,r}$, $m = \overline{1,s}$, $j = 0,1,\dots,p$) обозначены вектор-функции, компоненты которой является следами (зависящими только от переменной t) функций $u(t,x)$ и $v(t,x)$, а также соответственно всех их производных по пространственной переменной x до порядка p включительно.

Определение 3.1. Через $Z^p([0,t^*])$ обозначим множество функций $u(t,x)$, $v(t,x)$ определенных в $G_{[0,t^*]}$, принадлежащих классу $C^{1,p}_{t,x}(G_{[0,t^*]})$, где

$$C^{1,p}_{t,x}(G_{[0,t^*]}) = \left\{\psi(t,x) \mid \frac{\partial\psi}{\partial t}, \frac{\partial^j\psi}{\partial x^j} \in C(G_{[0,t^*]}),\ j = \overline{0,p}\right\},$$

ограниченных при $(t,x) \in G_{[0,t^*]}$ вместе со всеми производными, входящими в систему уравнений (8),

$$\sum_{j=0}^{p}\left(\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}u(t,x)\right| + \left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}v(t,x)\right|\right) \le C.$$

Определение 3.2. Под *классическим решением задачи* (8), (9) в $G_{[0,t^*]}$ будем понимать пару функций $\{u(t,x), v(t,x)\} \in Z^p([0,t^*])$, удовлетворяющую (8), (9) в $G_{[0,t^*]}$.

Здесь $0 < t^* \le T$ - некоторая фиксированная постоянная. Если t^* зависит от входных данных, и $t^* \le T$, то будем говорить, что пара функций $\{u(t,x), v(t,x)\}$ является решением задачи (8), (9) в малом временном интервале (или просто решение "в малом"). Если t^* фиксировано и $t^* = T$ при любом наборе входных данных, удовлетворяющих достаточным условиям разрешимости, будем говорить, что пара функций $\{u(t,x), v(t,x)\}$ является решением задачи (8), (9) во всем временном интервале (либо будем использовать термин "глобальная разрешимость").

Результат

Предположим, что выполняются следующие условия.

Условие 3.1. *Функции a_1, a_2, b_1, b_2 действительнозначные функции, определены и непрерывны при любых значениях своих аргументов и функции a_1, a_2 удовлетворяет условию $a_1 \ge a_0 > 0$, $a_2 \ge a_0 > 0$. $\forall t_1 \in (0,T]$, $\forall u(t,x)$, $v(t,x) \in Z^{p+2}([0,t_1])$ данные функции, как функции переменных $(t,x) \in G_{[0,t_1]}$, непрерывны и обладают непрерывными производными, входящими в следующее соотношение*

$$|a_1(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t))| + |a_2(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t))| + |b_1(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t))| + |b_2(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t))| \le P_{\gamma_1}\left(S(t)\right). \tag{10}$$

Условие 3.2. *Функции $u_0(x)$, $v_0(x)$ действительнозначные и имеют все непрерывные производные входящие в следующее соотношение и удовлетворяют ему*

$$\sum_{j=0}^{p+2}\left(\left|\frac{d^j}{dx^j}u_0(x)\right| + \left|\frac{d^j}{dx^j}v_0(x)\right|\right) \le C.$$

Условие 3.3. *Функции f_1, f_2 действительнозначные функции, определены и непрерывны при любых значениях своих аргументов. Пусть $\forall t_1 \in (0,T]$, $\forall t \in [0,t_1]$ справедлива оценка*

$$\sum_{j=0}^{p+2}\left(\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j} f_1(t,x,u,v,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t))\right| + \left|\frac{\partial^j}{\partial x^j} f_2(t,x,u,v,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t))\right|\right) \le P_{\gamma_2}\left(S(t)\right). \qquad (11)$$

В условиях 3.1 и 3.3 под γ_1, $\gamma_2 \ge 0$ понимаются некоторые фиксированные целые числа, $P_\zeta(y) = \tilde{C}(1 + y + \ldots + y^\zeta)$, $\tilde{C} > 1$ - постоянная, не зависящая от функций $u(t,x)$, $v(t,x)$ и их производных,

$$S(t) = \sum_{j=0}^{p+2}\left(\sup_{0<\xi\le t}\sup_{(x)\in E_1}\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}u(\xi,x)\right| + \sup_{0<\xi\le t}\sup_{(x)\in E_1}\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}v(\xi,x)\right|\right),\ u(t,x),\ v(t,x) \in Z^{p+2}([0,t_1]).$$

Теорема 3. *Пусть выполняются условия **3.1–3.3**.*

a *Если **условия 3.1, 3.3** выполняются при $\gamma_1 \ge 0$, $0 \le \gamma_2 \le 1$, то классическое решение $\{u(t,x), v(t,x)\}$ задачи (8), (9) существует в классе $Z^p([0,T])$.*

b *Если **условия 3.1, 3.3** выполняются при $\gamma_1 \ge 0$, $\gamma_2 > 1$, то существует константа t^*, $0 < t^* \le T$, зависящая от постоянной $\tilde{C}$ из (10), (11), такая, что классическое решение $\{u(t,x),\ v(t,x)\}$ задачи (8), (9) существует в классе $Z^p([0,t^*])$.*

Доказательство данной теоремы проводится с использованием метода расщепления на дифференциальном уровне (метод слабой аппроксимации [7, 8]).

Пример

В качестве модельного примера рассмотрим обратную задачу, которая исследовалась ранее в [4].

В полосе $\Pi_{[0,T]} = \{(t,x)|\, t \in [0,T], x \in E_1\}$ рассматривается задача нахождения действительнозначных функций $U(t,x), V(t,x), g_i(t), i = 1,2$, удовлетворяющих системе уравнений

$$U_t = U_{xx} + b_{11}(t)U^2 + b_{12}(t)V + g_1(t)m_1(t,x),$$
$$V_t = V_{xx} + b_{21}(t)U + b_{22}(t)V^2 + g_2(t)m_2(t,x),$$

начальным условиям

$$U(0,x) = U_0(x),\ \ V(0,x) = V_0(x),\ \ x \in E_1,$$

и условиям переопределения

$$U(t,0) = \beta_1(t),\ \ V(t,0) = \beta_2(t),\ \ t \in [0,T],$$

где $b_{ij}(t), m_i(t,x), U_0(x), V_0(x), \beta_i(t), i,j = 1,2$ — заданные действительнозначные функции.

Считаем, что выполнены условия согласования $U_0(0) = \beta_1(0)$, $V_0(0) = \beta_2(0)$.

Пусть выполняется соотношение $|m_i(t,0)| \ge \delta > 0,\ \ i = 1,2,\ \ t \in [0,T],\ \ \ \delta - const.$

Обратная задача приводится к вспомогательной прямой задаче

$$U_t = U_{xx} + b_{11}(t)U^2 + b_{12}(t)V + m_1(t,x)\frac{\beta_1'(t) - U_{xx}(t,0) - b_{11}(t)\beta_1^2(t) - b_{12}(t)V(t,0)}{m_1(t,0)},$$

$$V_t = V_{xx} + b_{21}(t)U + b_{22}(t)V^2 + m_2(t,x)\frac{\beta_2'(t) - V_{xx}(t,0) - b_{21}(t)U(t,0) - b_{22}(t)\beta_2^2(t)}{m_2(t,0)}, \quad (12)$$

$$U(0,x) = U_0(x), \;\; V(0,x) = V_0(x). \quad (13)$$

Прямая задача в данном примере — это система одномерных параболических уравнений, правые части которых зависят от следов неизвестных функций и их производных по пространственной переменной. Полученная задача является частным случаем задачи (8), (9). Несложно показать, что в предположении достаточной гладкости и ограниченности входных данных в $\Pi_{[0,T]}$, задача (12), (13) удовлетворяет условиям **теоремы 3** с константами $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 2$. Следовательно, существует такая константа $t^* : \; 0 < t^* \leq T$, зависящая от входных данных, что классическое решение $\{U(t,x), \, V(t,x)\}$ прямой задачи (12), (13) существует, по крайней мере, в классе $Z^2([0,t^*])$.

Список литературы

[1] Белов Ю.Я., Фроленков И.В. Некоторые задачи идентификации коэффициентов полулинейных параболических уравнений // Доклады Академии Наук. 2005. Т. 404. №5. С. 583 – 585.

[2] Фроленков И.В., Кригер Е.Н. О задаче идентификации функции источника специального вида в двумерном параболическом уравнении // J. Sib. Fed. University. Math. Phys. 2010. 3(4). С. 556 – 564.

[3] Белов Ю.Я, Коршун К.В. О задаче идентификации функции источника для уравнения типа Бюргерса // J. Sib. Fed. University. Math. Phys. 2012. V.5, N 4. P. 497-506.

[4] Спичак Г.А., Шипина Т.Н. Задачи идентификации коэффициентов в одной нелинейной системе уравнений параболического типа // Международная конференция, посвященная 80-летию со дня рождения академика М.М.Лаврентьева "Обратные и некорректные задачи математической физики", Сибирское научное издательство, Новосибирск, 2012., С. 108.

[5] Вячеславова П.Ю., Сорокин Р.В. Задача идентификации коэффициентов при младших членах в системе составного типа // Журн.СФУ: математика и физика. 2009. Т.2, № 3. С.288–297.

[6] Фроленков И.В., Белов Ю.Я. О существовании решения для класса нагруженных двумерных параболических уравнений с данными Коши // Неклассические уравнения математической физики, сб. науч. статей, Отв. ред. А.И. Кожанов, Изд. Института мат., Новосибирск, 2012, С.262-279.

[7] Belov Yu.Ya. Inverse Problems for Partial Differential Equations. Utrecht: VSP, 2002.

[8] Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, 1967.